Sandrine CARUSO

Complétude des espaces L^p.

Référence : Rudin

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un ensemble mesuré.

Théorème. *Pour* $p \in [1, +\infty]$, $L^p(X, \mu)$ *muni de la norme* $\|\cdot\|_p$ *est un espace complet.*

Démonstration. Dans cette démonstration, on identifiera à plusieurs reprises un élément de L^p à un de ses représentant dans $\mathcal{L}^p$.

Supposons tout d'abord que $p \in [1, +\infty[$. Pour abréger, on note $\|\cdot\|$ la norme $\|\cdot\|_p$. Soit (f_n) une suite de Cauchy de L^p. Soit (f_{n_i}) une suite extraite telle que

$$\forall i, \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\| \leqslant \frac{1}{2^i}. \tag{1}$$

Posons

$$g_k = \sum_{i=0}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| \quad \text{et} \quad g = \sum_{i=0}^{+\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|.$$

On a $\|g_k\| \leqslant \sum_{i=0}^{k} \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\| \leqslant 2$ d'après l'inégalité triangulaire et (1), et d'après le théorème de convergence monotone, $\|g\| \leqslant 2 < +\infty$. En particulier, g est finie presque partout. La série

$$f_{n_0}(x) + \sum_{i=0}^{+\infty} (f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x))$$

est donc absolument convergente pour presque tout x. Notons $f(x)$ sa limite. Ainsi,

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_0}(x) + \sum_{i=0}^{k} (f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)) = \lim_{k\to\infty} f_{n_{k+1}}(x)$$

est limite simple presque partout de la suite extraite (f_{n_i}). Montrons que f est limite de (f_n) dans L^p. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après le lemme de Fatou,

$$\int |f - f_n|^p = \int \liminf_{i\to\infty} |f_{n_i} - f_n|^p \leqslant \liminf_{i\to\infty} \int |f_{n_i} - f_n|^p$$

c'est-à-dire $\|f - f_n\|_p^p \leqslant \liminf_i \|f_{n_i} - f_n\|_p^p$. Comme (f_n) est de Cauchy, cela assure que $\lim_n \|f - f_n\|_p = 0$, et en même temps que $f \in L^p$.

Traitons maintenant le cas où $p = +\infty$. Soit

$$N = \{x \in X, \exists n, |f_n(x)| > \|f_n\|_\infty \text{ ou } \exists n, m, |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\}.$$

Cet ensemble est réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle (par définition de $\|\cdot\|_\infty$), et donc est aussi de mesure nulle. Sur $X\backslash N$, les fonctions f_n sont bornées et forment encore une suite de Cauchy ; l'espace des fonctions bornées de $X\backslash N$ dans $\mathbb{C}$ est complet pour la norme uniforme, donc (f_n) converge vers une fonction f bornée sur $X\backslash N$. En complétant f par 0 sur N, on obtient bien une limite de (f_n) dans L^∞ pour $\|\cdot\|_\infty$. $\square$

Remarquons que l'on a également démontré le résultat suivant :

Théorème. *De toute suite convergente de L^p, on peut extraire une sous-suite qui converge presque partout.*