Sandrine CARUSO

Automorphismes de $K(X)$.

Référence : Francinou-Gianella, Oraux X-ENS, algèbre 1

Théorème. *Soit K un corps. Les automorphismes de K-algèbre de $K(X)$ sont les $G \mapsto G(\frac{aX+b}{cX+d})$ où $a, b, c, d \in K$ tels que $ad - bc \neq 0$.*

Cherchons tout d'abord les morphismes de K-algèbre de $K(X)$ dans $K(X)$. Soit Φ un tel morphisme. Soit $F = \Phi(X)$. Alors, si $G \in K(X)$, on écrit $G = \frac{\sum_{i=0}^{p} a_i X^i}{\sum_{j=0}^{q} b_j X^j}$, et on a

$$\Phi(G) = \frac{\sum_{i=0}^{p} a_i \Phi(X)^i}{\sum_{j=0}^{q} b_j \Phi(X)^j} = G \circ F.$$

Réciproquement, pour tout $F \in K(X)$, $\Phi_F : G \mapsto G \circ F$ est un morphisme de K-algèbre.

Nous allons maintenant chercher à quelle condition sur F le morphisme Φ_F ci-dessus est un automorphisme. Il est tout d'abord nécessaire que X est une image réciproque. Ainsi, il existe $F' \in K(X)$ tel que $F' \circ F = X$. Soient $A, B, C, D \in K[X]$, A et B premiers entre eux, C et D premiers entre eux, tels que $F' = \frac{A}{B}$ et $F = \frac{C}{D}$. On écrit $A = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i$ et $B = \sum_{j=0}^{q} b_j X^j$, avec $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$. L'égalité $F' \circ F = X$ s'écrit

$$\sum_{i=0}^{p} a_i \frac{C^i}{D^i} = X \sum_{j=0}^{q} b_j \frac{C^j}{D^j}.$$

En notant $m = \max(p, q)$, elle s'écrit encore

$$\sum_{i=0}^{p} a_i C^i D^{m-i} = X \sum_{j=0}^{q} b_j C^j D^{m-j}.$$

Dans cette somme, tous les termes sont divisibles par C, sauf éventuellement ceux pour $i = 0$ et $j = 0$. On en déduit que C divise $a_0 D^m - X b_0 D^m$, et comme on a supposé C premier avec D, C divise $a_0 - X b_0$. De plus, $(a_0, b_0) \neq (0, 0)$ car A et B sont également premiers entre eux, donc nécessairement, $\deg C \leqslant 1$.

De même, tous les termes sont divisibles par D sauf éventuellement celui en p si $p = m$ et celui en q si $q = m$. Ainsi, si $p = q = m$, D divise $a_m C^m - X b_m C^m$, et par suite divise $a_m - b_m X$, donc est de degré inférieur à 1 car a_m et b_m sont non nuls. Si $p > q$, alors D divise a_p, et si $p < q$, alors D divise $b_q X$, et dans ces deux cas, on a encore $\deg D \leqslant 1$.

Bref, au final, nécessairement, $\Phi_F(G) = G(\frac{aX+b}{cX+d})$ où $a, b, c, d \in K$. En outre, $\frac{aX+b}{cX+d}$ ne peut être constant, ce qui signifie que $ad - bc \neq 0$.

Réciproquement, montrons qu'un tel morphisme est bien un automorphisme de $K(X)$. Notons $\Phi_{a,b,c,d} : G \mapsto G(\frac{aX+b}{cX+d})$. On a $\Phi_{1,0,0,1} = \mathrm{Id}$, et on vérifie que si

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix},$$

alors $\Phi_{a,b,c,d} \circ \Phi_{a',b',c',d'} = \Phi_{a'',b'',c'',d''}$ (il suffit de vérifier que $\Phi_{a,b,c,d} \circ \Phi_{a',b',c',d'}(X) = \Phi_{a'',b'',c'',d''}(X)$ d'après le premier alinéa). Par conséquent, si

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I_2$$

alors $\Phi_{a,b,c,d} \circ \Phi_{a',b',c',d'} = \Phi_{a',b',c',d'} \circ \Phi_{a,b,c,d} = \mathrm{Id}$. Donc si $ad - bc \neq 0$, $\Phi_{a,b,c,d}$ est inversible.