Sandrine CARUSO

Lemme de Bernstein

Référence : A. Pommellet, Agrégation de mathématiques, cours d'analyse

Théorème. *Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$, f une fonction de classe C^∞ de $[-a, a]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f^{(2n)}$ est positive. Alors f est analytique (au voisinage de 0) sur $]-a, a[$.*

Dans un premier temps, on suppose que f est une fonction paire. Chaque dérivée d'ordre impair $f^{(2n+1)}$ est alors impaire, et par conséquent, $f^{(2n+1)}(0) = 0$. Écrivons la formule de Taylor avec reste intégral au voisinage de 0, à l'ordre $2n+1$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n} + I_n(x)$$

où $I_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} f^{(2n+2)}(t)dt$. Notons que $I_n(x) \geqslant 0$ (on sépare deux cas selon le signe de x). La fonction $\phi(t) = \frac{x-t}{a-t}$ est décroissante car $\phi'(t) = \frac{-(a-t)+(x-t)}{(a-t)^2} = \frac{x-a}{(a-t)^2} \leqslant 0$. Donc, si $x \geqslant 0$, pour tout $t \in [0, x]$, $\frac{x-t}{a-t} \leqslant \frac{x}{a}$ et ainsi $x - t \leqslant \frac{x}{a}(a-t)$. Si $x \leqslant 0$, pour $t \in [x, 0]$, $\frac{x-t}{a-t} \geqslant \frac{x}{a}$ et on obtient alors $x - t \geqslant \frac{x}{a}(a-t)$. Ceci nous permet donc de majorer l'intégrale :

$$I_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} \left| \int_0^x \frac{(a-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} f^{(2n+2)}(t)dt \right| \leqslant \left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} I_n(a) \leqslant \left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} f(a),$$

la dernière égalité venant de la formule de Taylor et du fait que les dérivées paires successives sont positives. Si, maintenant, $x \in]-a, a[$, en faisant tendre n vers l'infini, on obtient que $I_n(x)$ tend vers 0. Par conséquent, la série de Taylor de f converge vers f sur $]-a, a[$.

Revenons maintenant au cas général. Soit g la fonction paire définie par $g(x) = f(x) + f(-x)$. On a $g^{(2n)}(x) = f^{(2n)}(x) + f^{(2n)}(-x)$, et en particulier, d'une part, $g^{(2n)}(0) = 2f^{(2n)}(0)$, d'autre part, $g^{(2n)}(x) \geqslant f^{(2n)}(x) \geqslant 0$. La formule de Taylor avec reste intégral pour f s'écrit

$$f(x) = f(0) + \cdots + \frac{f^{2n+1}(0)}{(2n+1)!}x^{2n+1} + I_n(x)$$

où I_n est défini comme précédemment. Si l'on note $J_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} g^{(2n+2)}(t)dt$, on a $I_n(x) \leqslant J_n(x)$ puisque $g^{(2n+2)}(x) \geqslant f^{(2n+2)}(x)$. On a également $I_n(x) \geqslant 0$. D'après le premier cas, $J_n(x)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini pour tout $x \in]-a, a[$, donc c'est également le cas de $I_n(x)$. Ainsi, la suite des sommes partielles *d'ordre impair* de la série de Taylor de f converge vers f. Pour conclure que la série elle-même converge vers f, il suffit de montrer que c'est également le cas de la suite des sommes partielles d'ordre pair. Or, ces deux suites ont même limite car leur différence, $\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n}$, est égal à $\frac{1}{2}\frac{g^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n}$ et ce dernier terme tend vers 0 d'après le cas des fonctions paires. Finalement, on a bien le résultat voulu.