Sandrine CARUSO

Un théorème de Bézout.

Référence : Francinou-Gianella, Oraux X-ENS, algèbre 1

On rappelle que si $P \in A[X]$ (A anneau factoriel), on appelle contenu de P, et on note $c(P)$, le PGCD (dans A) des coefficients de P. On dit que P est *primitif* si son contenu est égal à 1. On admet le lemme suivant :

Lemme. *Si $P, Q \in A[X]$, alors $c(PQ) = c(P)c(Q)$.*

Théorème (Bézout)**.** *Soit K un corps. Soient $P, Q \in K[X, Y]$ premiers entre eux. Alors*

1. *Il existe $\Delta \in K[X]$ et $U, V \in K[X, Y]$ tels que $\Delta = UP + VQ$.*
2. *Application : il n'existe qu'un nombre fini de $(x, y) \in K^2$ tels que $P(x, y) = Q(x, y) = 0$.*

1. L'anneau $K[X, Y]$ n'étant pas principal, on ne peut pas appliquer le théorème de Bézout « classique ». Nous allons nous ramener à l'anneau principal $K(X)[Y]$. On peut voir P et Q comme des éléments de $K(X)[Y]$; montrons qu'ils sont encore premiers entre eux dans cet anneau.

Soit $D' \in K(X)[Y]$ un diviseur de P et Q dans $K(X)[Y]$. Soit $D'' \in K[X, Y]$ obtenu en multipliant D, en tant que polynôme en Y à coefficients dans $K(X)$, par le produit des dénominateurs de ses coefficients. Puis, soit $D \in K[X, Y]$, obtenu en divisant D'', en tant que polynôme en Y à coefficients dans $K[X]$, par son contenu (élément de l'anneau $K[X]$), de sorte que D sont primitif comme polynôme de $(K[X])[Y]$. Alors D est toujours un diviseur de P et Q dans $K(X)[Y]$, et soient $F_1, F_2 \in K(X)[Y]$ tels que $F_1 D = P$ et $F_2 D = Q$. Montrons que F_1 et F_2 sont en fait dans $K[X, Y]$. Traitons le cas de F_1. On peut l'écrire sous la forme $F_1 = \frac{F}{R}$ où $F \in K[X, Y]$ et $R \in K[X]$. Quand à F, on l'écrit $F = c(F)\tilde{F}$ où $\tilde{F} \in (K[X])[Y]$ est primitif et $c(F) \in K[X]$. On a alors

$$c(F)\tilde{F}D = RP$$

puis en prenant les contenus dans $K[X]$ et en appliquant le lemme, $c(F)c(D) = Rc(P)$. On a supposé D primitif donc $c(D) = 1$. On en déduit que $c(F) = Rc(P)$, et ainsi que R divise $c(F)$. Donc $F_1 = \frac{c(F)}{R}\tilde{F} \in K[X, Y]$. Par symétrie des rôles, il en est de même pour F_2.

Comme P et Q sont premiers entre eux dans $K[X, Y]$, c'est que, nécessairement, D est constant. Donc D' est un élément de $K(X)$ (et même de $K[X]$), ce qui montre que P et Q sont premiers entre eux dans $K(X)[Y]$.

On applique alors le théorème de Bézout « classique » à P et Q dans $K(X)[Y]$. Il existe $U', V' \in K(X)[Y]$ tels que $1 = U'P + V'Q$. Puis il existe $U, V \in K[X, Y]$ et $\Delta \in K[X]$ tels que $U' = \frac{U}{\Delta}$ et $V' = \frac{V}{\Delta}$, et on obtient bien $\Delta = UP + VQ$. $\square$

2. Soit $(x, y) \in K^2$ tel que $P(x, y) = Q(x, y) = 0$. Alors, d'après l'égalité ci-dessus, $\Delta(x) = 0$. Le polynôme Δ est non nul, et donc n'a qu'un nombre fini de racines. Ainsi, seul un nombre fini de x peut vérifier le système d'équations. Par symétrie des rôles, il n'y a également qu'un nombre fini de y le vérifiant, donc un nombre fini de couples (x, y). $\square$