Sandrine CARUSO

Billard elliptique

Référence : Petit guide de calcul différentiel, Rouvière (exercice 132)

Proposition. *Sur un billard elliptique, il existe une trajectoire fermée à trois rebonds.*

Si A, B et C sont trois points de $\mathbb{R}^2$, on note

$$f(A,B,C) = AB + BC + CA$$

l'application de $(\mathbb{R}^2)^3 = \mathbb{R}^6$ dans $\mathbb{R}$ qui à A, B, C associe le périmètre du triangle ABC. Cette application est continue, et l'ellipse, notée $\mathcal{E}$, est compacte, donc il existe un triangle de périmètre maximal inscrit dans l'ellipse. Nous allons montrer qu'un tel triangle forme une trajectoire de billard (qui répond donc aux conditions de l'énoncé), c'est-à-dire que les normales à l'ellipse en chaque sommet sont les bissectrices intérieure du triangle.

Tout d'abord, remarquons que si ABC est un triangle inscrit dans $\mathcal{E}$ de périmètre maximal, alors A, B et C sont deux à deux distincts. En effet, si tel n'était pas le cas, par exemple si $A = B$, tout point A' de $\mathcal{E}$ distinct de B et C vérifierait $f(A', B, C) = A'B + CA' + BC > 2BC = f(A, B, C)$ par l'inégalité triangulaire. Notons U l'ouvert de $\mathbb{R}^6$ formé des triplets de points de $\mathbb{R}^2$ deux à deux distincts. L'application f est de classe C^1 sur U (en effet, $AB = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}$, le produit scalaire est de classe C^1, et la racine carrée est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$).

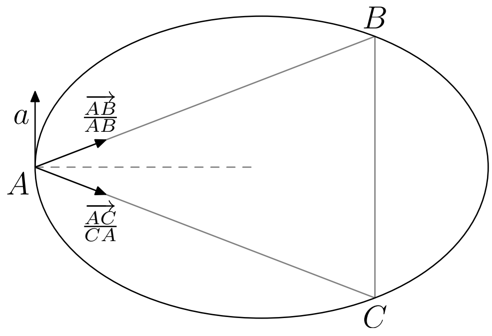
Soit g une équation implicite de l'ellipse $\mathcal{E}$ (par exemple, $g(x, y) = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - 1$). Pour $(A, B, C) \in (\mathbb{R}^2)^3$, on note $g_1(A, B, C) = g(A)$, $g_2(A, B, C) = g(B)$ et $g_3(A, B, C) = g(C)$. Pour tous (A, B, C) et (a, b, c), on a $Dg_1(A, B, C)(a, b, c) = Dg(A)(a)$, $Dg_2(A, B, C) = Dg(B)(b)$ et $Dg_3(A, B, C)(a, b, c) = Dg(C)(c)$. Alors pour tout $(A, B, C) \in \mathcal{E}^3$, $Dg_1(A, B, C)$, $Dg_2(A, B, C)$ et $Dg_3(A, B, C)$ sont des formes linéaires indépendantes (en d'autres termes, $\mathcal{E}^3$ est une variété de $\mathbb{R}^6$), car si $\lambda_1 Dg_1(A, B, C) + \lambda_2 Dg_2(A, B, C) + \lambda_3 Dg_3(A, B, C) = 0$, en appliquant cette forme linéaire à $(a, 0, 0)$, on obtient $\lambda_1 Dg(A)(a) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}^2$, donc $\lambda_1 = 0$, et de même pour λ_2 et λ_3. On peut donc appliquer le théorème des extrema liés sur l'ouvert U, de sorte que, si (A, B, C) maximise f, alors $Df(A, B, C) \in \mathrm{Vect}(Dg_i(A, B, C), i = 1, 2, 3)$. En particulier, si (a, b, c) est tel que $Dg(A)(a) = Dg(B)(b) = Dg(C)(c) = 0$, on obtient $Df(A, B, C)(a, b, c) = 0$. En différentiant

$$AB = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}} = \sqrt{(B - A) \cdot (B - A)} = \sqrt{B \cdot B + A \cdot A - 2A \cdot B}$$

par rapport à A et B, on calcule la différentielle $Df(A, B, C)(a, b, c)$:

$$Df(A,B,C)(a,b,c) = \left(\frac{\overrightarrow{BA}}{AB} + \frac{\overrightarrow{CA}}{CA} \right) \cdot a + \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{CB}}{BC} \right) \cdot b + \left(\frac{\overrightarrow{BC}}{BC} + \frac{\overrightarrow{AC}}{CA} \right) \cdot c.$$

Or, $Dg(A)(a) = 0$ signifie exactement que le vecteur a est tangent à $\mathcal{E}$ en A. En appliquant la relation précédente et $Df(A, B, C)(a, b, c) = 0$ avec $b = c = 0$ et un vecteur a non nul tangent à $\mathcal{E}$, on obtient que $\frac{\overrightarrow{BA}}{AB} + \frac{\overrightarrow{CA}}{CA}$ est normal à $\mathcal{E}$; or $\frac{\overrightarrow{BA}}{AB} + \frac{\overrightarrow{CA}}{CA}$ dirige la bissectrice de $\widehat{BAC}$, et on obtient ce que l'on voulait. On raisonne de même en B et en C.



Remarque. Nous avons choisi de travailler sur une ellipse, mais le raisonnement ci-dessus est valable pour toute variété différentiable de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$ délimitant une zone convexe (le « billard »). On peut montrer de même que pour tout $n \geqslant 2$, il existe une trajectoire fermée à n rebonds.