Sandrine CARUSO

Décomposition polaire

Référence : Mneimné - Testard

Théorème. *L'application*

$$\begin{array}{rcccl} \varphi & : & \mathcal{O}(n) \times \mathcal{S}_n^{++} & \to & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ & & (\Omega, S) & \mapsto & \Omega S \end{array}$$

est un homéomorphisme.

Montrons tout d'abord qu'il s'agit d'une bijection. Pour cela, un résultat préliminaire est le suivant :

Lemme. *Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}$. Il existe une unique matrice $S \in \mathcal{S}_n^{++}$ telle que $S^2 = A$ (on note $S = \sqrt{A}$.*

Démonstration. La matrice A est diagonalisable dans une base orthonormée : il existe $O \in \mathcal{O}(n)$ telle que $O^{-1}AO = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i > 0$. La matrice

$$S = O \,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}) O^{-1}$$

convient.

Supposons qu'on ait une autre matrice $S' \in \mathcal{S}_n^{++}$ telle que $S'^2 = A$. Soit P un polynôme (par exemple de Lagrange) tel que $P(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ pour $i = 1, \ldots, n$. On a $P(S^2) = P(S'^2) = S$, et par conséquent, S et S' commutent car S est un polynôme en S'. Elle sont alors simultanément diagonalisables, et comme elles ont nécessairement les mêmes valeurs propres, elles sont égales. □

Revenons à la démonstration du théorème. Soient $(\Omega, S) \in \mathcal{O}(n) \times \mathcal{S}_n^{++}$ et $M = \Omega S$. Alors ${}^tMM = S^2$ est définie positive et nécessairement, d'après le lemme précédent, $S = \sqrt{{}^tMM}$ et $\Omega = MS^{-1}$. On en déduit l'injectivité de φ.

Si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors la matrice ${}^tMM$ est symétrique définie positive. Posons $S = \sqrt{{}^tMM}$ (qui est donc symétrique définie positive) et $\Omega = MS^{-1}$. On a ${}^t\Omega\Omega = S^{-1}\,{}^tMMS^{-1} = I_n$ de sorte que $\Omega \in \mathcal{O}(n)$. Ainsi φ est-elle surjective.

Il reste à établir que φ est bicontinue. Elle est bien évidemment continue. Pour montrer que φ^{-1} est continue, nous allons utiliser montrer sa continuité séquentielle en utilisant le fait que $\mathcal{O}(n)$ est compact. Soit (M_p) une suite de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ qui converge vers $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Écrivons $M = \Omega S$ et $M_p = \Omega_p S_p$ les décompositions polaires de ces matrices. Il s'agit de montrer que Ω_p tend vers Ω et S_p vers S.

Comme $\mathcal{O}(n)$ est compact, il existe une suite extraite (Ω_{p_k}) qui converge vers $\Omega' \in \mathcal{O}(n)$. Alors (S_{p_k}) converge vers $S' = M\Omega'^{-1}$. Mais alors $M = \Omega' S'$ est la décomposition polaire de M : on en déduit que $\Omega' = \Omega$ et $S' = S$. La suite (Ω_p) possède donc une unique valeur d'adhérence, et encore en vertu de la compacité de $\mathcal{O}(n)$, elle converge (vers Ω). Et (S_p) converge vers S.