Sandrine CARUSO

Irréductibilité du déterminant

Référence : Briançon - Maisonobe, Éléments d'algèbre commutative, p 83, exo 6.6

Théorème. *Soit K un corps et $n \in \mathbb{N}$. Soit $\Delta = \det((X_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n})$. On peut voir Δ comme un polynôme de $K[X_{1,1}, \ldots, X_{1,n}, X_{2,1}, \ldots, X_{n,1}, \ldots, X_{n,n}]$. Alors ce polynôme est irréductible.*

Rappelons l'expression explicite de Δ :

$$\Delta = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} X_{i,\sigma(i)}.$$

Lemme. *Soit $\mathbb{A}$ un anneau commutatif intègre, et soient $P, Q \in \mathbb{A}[Y_1, \ldots, Y_m]$, non nuls. Alors PQ est homogène si et seulement si P et Q sont homogènes.*

Démonstration. 1) Tout d'abord, si P et Q sont homogènes, il est clair que PQ l'est aussi.

2) Afin de démontrer la réciproque, faisons quelques considérations utiles. Rappelons que le degré d'un monôme $Y_1^{\alpha_1} \cdots Y_m^{\alpha_m}$ est $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m$, et que le degré d'un polynôme P non nul est le plus grand degré de ses monômes (on le note $\deg(P)$). On définit de manière analogue la « valuation » de P, notée ici $\omega(P)$, comme le plus petit degré de ses monômes. On remarque que pour tout P non nul, $\omega(P) \leqslant \deg(P)$ et que $\omega(P) = \deg(P)$ si et seulement si P est homogène. Rappelons en outre que tout polynôme s'écrit de manière unique comme somme de polynômes homogènes de degrés deux à deux distincts. Si P et Q sont deux polynômes non nuls, le produit de leurs polynômes homogènes de plus petit degré (resp. de plus grand degré) est le polynôme homogène de plus petit degré (resp. de plus grand degré) de PQ. C'est une conséquence du point 1) et de l'intégrité de l'anneau $\mathbb{A}[Y_1, \ldots, Y_m]$ (qui est intègre car $\mathbb{A}$ l'est). On en déduit les relations suivantes :

$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q \quad \text{et} \quad \omega(PQ) = \omega(P) + \omega(Q).$$

Supposons maintenant que PQ est homogène. Alors $\deg(PQ) = \omega(PQ)$, et par conséquent $\deg(P) + \deg(Q) = \omega(P) + \omega(Q)$. Comme $\deg(P) \geqslant \omega(P)$ et $\deg(Q) \geqslant \omega(Q)$, on en déduit que $\deg(P) = \omega(P)$ et $\deg(Q) = \omega(Q)$, c'est-à-dire que P et Q sont homogènes. $\square$

Démonstration du théorème. Supposons qu'il existe $\Delta_1, \Delta_2 \in K[X_{1,1}, \dots, X_{n,n}]$ tels que $\Delta = \Delta_1 \Delta_2$.

Considérons les variables $X_{1,1}, \dots, X_{1,n}$. La formule de développement par rapport à la première ligne montre que Δ est homogène de degré 1 en ces variables. D'après le lemme précédent, Δ_1 et Δ_2 sont donc également homogènes en ces variables, l'un de ces deux polynômes étant de degré 1 et l'autre de degré 0. Sans perte de généralité, supposons que Δ_1 est de degré 1 en $X_{1,1}, \dots, X_{1,n}$ et que Δ_2 ne dépend pas de ces variables. Plus précisément, comme Δ est de degré 1 en *chacune* des variables considérées, c'est également le cas de Δ_1.

Soit $j \in \{1, \dots, n\}$, et intéressons-nous maintenant aux variables $X_{1,j}, \dots, X_{n,j}$. Comme précédemment, Δ est homogène de degré 1 en ces variables, et donc Δ_1 et Δ_2 sont homogènes en $X_{1,j}, \dots, X_{n,j}$. Mais Δ_1 est de degré 1 en $X_{1,j}$ d'après le cas précédent, et par conséquent, il est homogène de degré 1 en $X_{1,j}, \dots, X_{n,j}$ tandis que Δ_2 ne dépend pas de ces variables.

Finalement, Δ_2 ne dépend d'aucune des variables $X_{i,j}$, et est donc un élément de K. D'où l'irréductibilité de Δ sur K. $\square$

Remarque. On peut également montrer cette irréductibilité sur tout anneau commutatif intègre, il suffit de constater que Δ_2 est inversible. En effet, il divise les coefficients de Δ, qui sont tous 1 ou -1.

Application. *Soit $n \geqslant 2$ et soit K un corps infini. Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(K)$ contient une matrice inversible.*

Démonstration. Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(K)$, et supposons par l'absurde qu'il ne contient aucune matrice inversible. Il existe une forme linéaire non nulle ℓ telle que $H = \mathrm{Ker}(\ell)$. L'hypothèse implique que $H \subset \{M \in \mathcal{M}_n(K), \det(M) = 0\}$, c'est-à-dire que toute matrice qui annule ℓ annule $\det$. En outre, ℓ est un polynôme de degré 1 de $K[X_{1,1}, \dots, X_{n,n}]$ puisque c'est une forme linéaire. Notons $\ell = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} X_{i,j}$; ℓ est non nulle donc l'un des $\alpha_{i,j}$ est non nul. Sans perte de généralité, on peut supposer que c'est le cas d'$\alpha_{1,1}$. Regardons ℓ et $\det$ comme polynômes en $X_{1,1}$ à coefficients dans $K[X_{1,2}, \dots, X_{n,n}]$. Dans cet anneau, le coefficient $\alpha_{1,1}$ est inversible puisque c'est un élément non nul de K, et par conséquent, on peut effectuer la division euclidienne de $\det$ par ℓ :

$$\det = q\ell + r$$

avec $q \in K[X_{1,1}, \dots, X_{n,n}]$ et $r \in K[X_{1,2}, \dots, X_{n,n}]$. Soit $(x_{1,2}, \dots, x_{n,n}) \in K^{n^2-1}$, et posons $x_{1,1} = -\alpha_{1,1}^{-1}(\alpha_{1,2}x_{1,2} + \cdots + \alpha_{n,n}x_{n,n})$. Alors $\ell(x_{1,1}, \dots, x_{n,n}) = 0$, ce qui implique également $\det((x_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}) = 0$, et par conséquent, $r(x_{1,2}, \dots, x_{n,n}) = 0$. La fonction polynôme associée à r est identiquement nulle, et comme K est infini, r est le polynôme nul. Donc ℓ divise $\det$. Or, $\det$ est de degré $n \geqslant 2$ et est irréductible, d'où la contradiction. $\square$