Sandrine CARUSO

Une histoire de diamants

Référence : Oraux X-ENS, Francinou-Ginanella-Nicolas, algèbre 2, p 56

Problème. *Un joaillier possède 2009 diamants. On suppose que quand il en choisit un au hasard, il peut toujours séparer les 2008 autres en deux groupes de 1004 ayant le même poids. Alors les diamants ont tous le même poids.*

Démonstration. Posons $n = 1004$, et soient $x_1, \dots, x_{2n+1}$ les poids des diamants. L'hypothèse se formule de la manière suivante : pour tout $i \in \{1, \dots, 2n+1\}$, il existe une partie J de $\{1, \dots, i-1, i+1, \dots, 2n+1\}$ de cardinal n telle que $\sum_{j \in J} x_j = \sum_{j \notin J \cup \{i\}} x_j$. Les x_i vérifient donc un système d'équations de la forme

$$\left\{\begin{array}{cccccccccccccc} & & \pm & x_2 & \pm & x_3 & \pm & \cdots & \pm & x_{2n} & \pm & x_{2n+1} & = & 0 \\ \pm & x_1 & & & \pm & x_3 & \pm & \cdots & \pm & x_{2n} & \pm & x_{2n+1} & = & 0 \\ & & & & & & & \vdots & & & & & & \\ \pm & x_1 & \pm & x_2 & \pm & x_3 & \pm & \cdots & \pm & x_{2n} & & & = & 0 \end{array}\right.$$

où il y a autant de $+$ que de $-$ sur chaque ligne. La matrice de ce système est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & \cdots & \pm 1 \\ \pm 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \pm 1 \\ \pm 1 & \cdots & \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Résoudre le problème revient à montrer que $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}(1, \cdots, 1)$. Comme il y a autant de $+$ que de $-$ sur chaque ligne, la somme de chaque ligne est nulle et donc $(1, \dots, 1)$ est solution du système, par conséquent $\operatorname{Vect}(1, \cdots, 1) \subset \operatorname{Ker} A$. Pour montrer l'inclusion inverse, il suffit de montrer que $\dim \operatorname{Ker} A = 1$, et donc par le théorème du rang, que $\operatorname{rg} A = 2n$. D'après la caractérisation du rang par les mineurs, ceci est équivalent à l'existence d'un cofacteur non nul et à $\det A = 0$. On sait déjà que $\det A = 0$ puisque A n'est pas injective. Nous allons montrer que le cofacteur en haut à gauche est non nul. Pour cela, nous allons le réduire modulo 2 en utilisant l'égalité $\det(B \mod 2) = \det(B) \mod 2$ où B est une matrice carrée à coefficient dans $\mathbb{Z}$. Notons D_{2n} ce cofacteur modulo 2 (les calculs qui suivent sont faits dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) :

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

En ajoutant la deuxième colonne à la première, on obtient

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Puis, on développe par rapport à la première colonne :

$$D_{2n} = D_{2n-1} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Notons

$$\delta_{2n-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

En ajoutant la deuxième colonne à la première puis en développant par rapport à la première colonne, on obtient

$$\delta_{2n-1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \delta_{2n-2}.$$

Par une récurrence immédiate, $\delta_{2n-1} = \delta_1 = 1$, d'où $D_{2n} = D_{2n-1} + 1$. Une seconde récurrence immédiate montre que $D_{2n} = D_1 + 1 = 1$.

Finalement, on en déduit que le cofacteur considéré est impair, et en particulier non nul, ce qui conclut. $\square$