Sandrine CARUSO

Prolongement de la fonction Γ

Référence : Objectif agrégation

Proposition. *Soit* $\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0\}$. *On définit la fonction* Γ *de* $\mathcal{P}$ *dans* $\mathbb{C}$ *par*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Alors

1. *La fonction* Γ *est bien définie.*
2. *Pour tout* $z \in \mathcal{P}$,
$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$
3. *On note* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}$. *Alors* f *est méromorphe sur* $\mathbb{C}$. *Ses pôles sont les entiers négatifs et sont simples.*
4. *La fonction* Γ *se prolonge en une fonction méromorphe sur* $\mathbb{C}$.

1. Soient $z \in \mathcal{P}$ et $t \in [0, +\infty[$. On a $|e^{-t} t^{z-1}| = e^{-t} t^{\operatorname{Re} z - 1}$.
- Sur $[0, 1]$, $e^{-t} t^{\operatorname{Re} z - 1} \leqslant t^{\operatorname{Re} z - 1}$ est intégrable car $\operatorname{Re} z > 0$.
- Sur $[1, +\infty[$, $e^{-t} t^{\operatorname{Re} z - 1}$ est intégrable car est un $o(1/t^2)$.

Donc $e^{-t} t^{\operatorname{Re} z - 1}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, et Γ est bien définie. □

2. On écrit

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Dans la première intégrale, nous allons développer l'exponentielle en série entière puis utiliser un théorème d'intervertion. Pour tous t et z,

$$e^{-t} t^{z-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}.$$

On a, pour $t \geqslant 0$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1} \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} t^{\operatorname{Re} z - 1} = e^t t^{\operatorname{Re} z - 1}.$$

Cette fonction est intégrable sur $[0, 1]$ car $\operatorname{Re} z > 0$. Le théorème de Fubini s'applique donc et nous donne

$$\int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{n+z-1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}$$

d'où l'égalité voulue. □

3. Nous allons utiliser le théorème suivant qui traite des séries de fonctions méromorphes.

Théorème. *Soit* (f_n) *une suite de fonctions méromorphes sur un ouvert* Ω *de* $\mathbb{C}$*. On suppose que pour tout compact* K *de* Ω*, il existe un entier* N_K *tel que :*

(i) *pour tout entier* $n > N_K$*,* f_n *n'a pas de pôle dans* K*,*

(ii) *la série* $\sum_{n>N_K} f_n$ *converge uniformément sur* K*.*

Alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *définit une fonction méromorphe sur* Ω*.*

Appliquons ce théorème aux fonctions $f_n : z \mapsto \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}$. La fonction f_n est méromorphe, avec un unique pôle simple en $-n$. Soit K un compact de $\mathbb{C}$. Il existe $N_K \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset D(0, N_K)$. Alors pour tout $n > N_K$, f_n d'a pas de pôle dans K, et de plus, si $z \in K$,

$$|z+n| \geqslant n - |z| \geqslant n - N_K.$$

Donc $|\frac{(-1)^n}{n!(n+z)}| \leqslant \frac{1}{n!(n-N_K)}$, qui est le terme général d'une série convergente. Par conséquent, $\sum_{n>N_K} f_n$ est normalement, donc uniformément convergente sur K.

Le théorème permet donc bien d'affirmer que $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, et ses pôles sont les entiers négatifs, et sont simples. □

4. Pour conclure, nous allons établir que $z \mapsto \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

La fonction $z \mapsto e^{-t} t^{z-1} = e^{-t} e^{(z-1)\ln t}$ est holomorphe pour tout $t \geqslant 1$. Soit K un compact de $\mathbb{C}$. Il existe M tel que $K \subset \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z < M\}$. Alors pour tous $z \in K$ et $t \geqslant 1$, on a

$$\left|e^{-t} t^{z-1}\right| = e^{-t} t^{\operatorname{Re} z - 1} \leqslant e^{-t} t^{M-1}$$

qui est intégrable sur $[1, +\infty[$. Ceci montre d'une part que l'intégrale ci-dessus est bien définie pour tout z dans $\mathbb{C}$ (et pas seulement dans $\mathcal{P}$), et d'autre part, cela permet d'appliquer le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale. Ainsi, $z \mapsto \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Au final,

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$; d'après l'égalité montrée en *2.*, c'est l'unique prolongement analytique de Γ sur $\mathbb{C} \backslash (-\mathbb{N})$. □