Sandrine CARUSO

Générateurs de $\mathrm{GL}_n(K)$ et $\mathrm{SL}_n(K)$

Référence : Francinou Gianella Nicolas, exos X-ENS, algèbre 2

Théorème. *Soit K un corps. Le groupe $\mathrm{SL}_n(K)$ est engendré par les transvections. Le groupe $\mathrm{GL}_n(K)$ est engendré par les transvections et les dilatations.*

On note E_{ij} la matrice avec un 1 en position (i,j) et des 0 ailleurs. On rappelle qu'une transvection est une matrice de la forme $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ avec $i \neq j$, et une dilatation est une matrice de la forme $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$, où $\lambda \in K^*$. On a $\det T_{ij}(\lambda) = 1$ et $\det D_i(\lambda) = \lambda$. Multiplier à droite par $T_{ij}(\lambda)$ revient à effectuer l'opération sur les colonnes $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$, et multiplier à gauche revient à effectuer l'opération sur les lignes $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

Soit $M = (m_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(K)$. Nous allons montrer qu'il existe des transvections $T_1, \ldots, T_r$ et $T'_1, \ldots T'_s$ telles que $M = T_1 \cdots T_r D_n(\det M) T'_1 \cdots T'_s$, en effectuant des opérations sur les lignes et les colonnes telles que les deux évoquées ci-dessus.

On raisonne par récurrence sur n. Si $n = 1$, alors $M = D_1(\det M)$ de manière évidente. Soit $n \geqslant 2$ et supposons le résultat vrai pour toute matrice de $\mathrm{GL}_{n-1}(K)$.

Dans un premier temps, supposons que l'un au moins des coefficients m_{i1} pour $i \geqslant 2$ est non nul[1]. On effectue alors l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - \frac{m_{11}-1}{m_{i1}} L_i$, ce qui revient à multiplier M à gauche par $T_{1i}(-\frac{m_{11}-1}{m_{i1}})$. Dans ce cas, le coefficient $(1,1)$ de la matrice obtenue est $m_{11} - \frac{m_{11}-1}{m_{i1}} \times m_{i1} = 1$.

Si tous les coefficients m_{i1}, $i \geqslant 2$ sont nuls, alors m_{11} n'est pas nul car la matrice M est inversible. On effectue alors les opérations $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, puis $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$. Cela entraîne, par multiplication par des transvections, les transformations suivantes :

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} L_1 + L_2 \\ L_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} L_1 + L_2 \\ -L_1 \\ \vdots \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} L_2 \\ -L_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

et ainsi, on est ramené au cas où m_{21} est non nul.

Enfin, pour i de 2 à n, on effectue les opérations $L_i \leftarrow L_i - m_{i1} L_1$ et $C_i \leftarrow C_i - m_{1i} C_1$ (en identifiant m_{ij} au coefficient (i,j) de la matrice obtenue après les opérations précédentes), annulant ainsi tous les coefficients de la première colonne et de la première ligne sauf le coefficient $(1,1)$ qui reste égal à 1.

[1]Remarque : ces coefficients existent puisque $n \geqslant 2$, c'est ce qui fait fonctionner les choses !

Pour résumer, la situation est la suivante. Il existe des transvections $S_1, \dots, S_p$ et $S'_1, \dots, S'_q$ telles que

$$S_1 \cdots S_p M S'_1 \cdots S'_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence à M', et en complétant les matrices de transvection de taille $n-1$ obtenues ainsi par un coefficient 1 en haut à gauche, on obtient

$$T_r^{-1} \cdots T_1^{-1} M T_s'^{-1} \cdots T_1'^{-1} = D_n(\det M').$$

On a bien sûr $\det M = \det M'$, et on en déduit le résultat annoncé.

Si $M \in \mathrm{SL}_n(K)$, alors $D_n(\det M') = I_n$ et donc $\mathrm{SL}_n(K)$ est bien engendré par les transvections seules.

Application. *Les groupes* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ *et* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ *sont connexes par arcs. Le groupe* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *est connexe par arcs.*

Démonstration. Montrons que toute matrice de ces groupes peut être reliée par un chemin continu à I_n. Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit $M \in \mathrm{SL}_n(K)$. Alors il existe $T_1, \dots, T_r$ des transvections telles que $M = T_1 \cdots T_r$. Si $T = T_{ij}(\lambda)$ est une transvection, notons ψ_T l'application de $[0,1]$ dans $\mathrm{SL}_n(K)$ qui à t associe $T_{ij}(t\lambda)$ (si $t = 0$, c'est l'identité). Considérons maintenant l'application

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & [0,1] & \to & \mathrm{SL}_n(K) \\ & t & \mapsto & \psi_{T_1}(t) \cdots \psi_{T_r}(t) \end{array}.$$

Pour toute transvection T, l'application ψ_T est continue. Le produit d'applications continues étant continu, Φ est également continue. Or, $\Phi(1) = M$ et $\Phi(0) = I_n$, ce qui conclut.

Le cas de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un peu plus délicat, car l'application $t \in [0,1] \mapsto D_n(t\lambda)$ n'est pas à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, et on ne peut donc pas utiliser la même technique que précédemment. Mais remarquons que $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs. Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, il existe une application continue ρ_λ de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}^*$ telle que $\rho_\lambda(0) = 1$ et $\rho_\lambda(1) = \lambda$. Alors l'application $t \in [0,1] \mapsto D_n(\rho_\lambda(t))$ est à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, et on conclut par la même méthode que précédemment. $\square$

Remarque. Pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, ça ne marche pas, car $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe par arcs. En fait, on peut montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ a, tout comme $\mathbb{R}^*$, deux composantes connexes.