Sandrine CARUSO

Générateurs de $\mathfrak{S}_n$.

Référence : Francinou – Gianella – Nicolas, Oraux X-ENS, Algèbre 1

Théorème. *Le nombre minimum de transpositions engendrant $\mathfrak{S}_n$ est $n-1$.*

Montrons tout d'abord que les $n-1$ transpositions $(1\ 2), (1\ 3), \ldots, (1\ n)$ engendrent $\mathfrak{S}_n$. On procède par récurrence sur n. Il est évident que $(1\ 2)$ engendre $\mathfrak{S}_2$. Soit $n \geqslant 2$; supposons que $(1\ 2), (1\ 3), \ldots, (1\ n)$ engendrent $\mathfrak{S}_n$ et montrons que $(1\ 2), (1\ 3), \ldots, (1\ n+1)$ engendrent $\mathfrak{S}_{n+1}$. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$. De deux choses l'une :

- Si $\sigma(n+1) = n+1$, alors $\sigma_{|[\![1,n]\!]} \in \mathfrak{S}_n$ et donc σ est engendrée par $(1\ 2), (1\ 3), \ldots, (1\ n)$.
- Si $\sigma(n+1) = j$ avec $j \in [\![1,n]\!]$, alors l'application $\sigma' = (1\ n+1)(1\ j)\sigma$ vérifie $\sigma'(n+1) = n+1$, et est redevable du point précédent.

Finalement, $(1\ 2), (1\ 3), \ldots, (1\ n+1)$ engendrent bien $\mathfrak{S}_{n+1}$, ce qui conclut la récurrence.

Nous allons montrer maintenant que $\mathfrak{S}_n$ ne peut pas être engendrée par moins de $n-1$ transpositions, à l'aide de la théorie des graphes. Étant donné un ensemble $T = \{\tau_1, \ldots, \tau_k\}$ de transpositions de $\mathfrak{S}_n$, on lui associe le graphe (non orienté) G_T, dont l'ensemble des sommets est $[\![1,n]\!]$, et où une arête relie i et j si et seulement si $(i\ j) \in T$. Remarquons alors que si l'ensemble T engendre $\mathfrak{S}_n$ alors le graphe G_T est connexe. En effet, si ce n'est pas le cas, deux éléments i et j qui sont dans deux composantes connexes distinctes ne peuvent être envoyé l'un sur l'autre par un élément de $< T >$.

Pour conclure, il suffit d'établir le lemme suivant :

Lemme. *Soit G un graphe à n sommets. Si G est connexe, alors G a au moins $n-1$ arêtes.*

Démonstration. On procède par récurrence sur n. Si $n = 2$, le résultat est clair. Soit $n \geqslant 3$. Supposons que tout graphe connexe à $n-1$ sommets a au moins $n-2$ arêtes. Notons S l'ensemble des sommets de G, et $a(G)$ le nombre d'arêtes de G. Pour $x \in S$, on note $\delta(x)$ la valence, c'est-à-dire le nombre d'arêtes arrivant en x. Comme toute arête a au moins deux sommets[1],

$$2a(G) \geqslant \sum_{x \in S} \delta(x) \tag{1}$$

Le fait que G soit connexe entraîne l'inégalité $\delta(x) \geqslant 1$ pour tout x. Séparons deux cas :

- si pour tout $x \in S$, $\delta(x) \geqslant 2$, alors l'inégalité (1) donne immédiatement $a(G) \geqslant n$;

[1]Éventuellement un seul si l'arête « boucle » sur le même sommet.

– s'il existe $x_0 \in S$ tel que $\delta(x_0) = 1$, on considère le graphe G' privé de x_0 et de l'unique arête y arrivant. Alors G' a $n-1$ sommets et $a(G') = a(G) - 1$. De plus, G' est encore connexe, et par hypothèse de récurrence, $a(G') \geqslant n - 2$. Ce qui donne bien $a(G) \geqslant n - 1$.

$\square$