Sandrine Caruso

Similitude et équivalence

Référence : Les Matrices, Denis Serre

Théorème. *Soit K un corps. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$. Alors A et B sont semblables si et seulement si $XI_n - A$ et $XI_n - B$ sont équivalentes dans $\mathcal{M}_n(K[X])$.*

Si A et B sont semblables, alors $XI_n - A$ et $XI_n - B$ sont évidemment équivalentes (et même semblables). Supposons que $XI_n - A$ et $XI_n - B$ soient équivalentes, et soient $P, Q \in \mathrm{GL}_n(K[X])$, telles que $P(XI_n - A) = (XI_n - B)Q$ $(*)$. Comme I_n est une matrice inversible, on peut faire la division euclidienne, à droite, de P par $XI_n - B$:

$$P = (XI_n - B)P_1 + G$$

avec $\deg G < 1$, c'est-à-dire $G \in \mathcal{M}_n(K)$. De même, on effectue la division euclidienne à gauche de Q par $XI_n - A$:

$$Q = Q_1(XI_n - A) + H$$

avec $H \in \mathcal{M}_n(K)$. L'égalité $(*)$ s'écrit alors

$$((XI_n - B)P_1 + G)(XI_n - A) = (XI_n - B)(Q_1(XI_n - A) + H)$$

ou encore

$$(XI_n - B)(P_1 - Q_1)(XI_n - A) = (XI_n - B)H - G(XI_n - A).$$

Si le premier terme de l'égalité est non nul, il est de degré au moins 2. En revanche, le deuxième terme de l'égalité, lui, est de degré au plus 1 puisque H et G sont dans $\mathcal{M}_n(K)$. On en déduit que les deux termes sont nuls, et en particulier, $G = H$ et $GA = BH = BG$. Pour conclure, il suffit d'établir que G est dans $\mathrm{GL}_n(K)$. Pour cela, notons R l'inverse de P dans $\mathrm{GL}_n(K[X])$, et faisons la division euclidienne à droite de R par $XI_n - A$:

$$R = (XI_n - A)R_1 + K$$

avec $K \in \mathcal{M}_n(K)$. En multipliant la relation ci-dessus par P, on obtient

$$\begin{aligned} I_n &= P(XI_n - A)R_1 + PK \\ &= (XI_n - B)QR_1 + (XI_n - B)P_1K + GK \\ &= (XI_n - B)(QR_1 + P_1K) + GK. \end{aligned}$$

Par conséquent, $I_n - GK = (XI_n - B)(QR_1 + P_1K)$. Le premier terme de l'égalité est constant, le deuxième, s'il n'est pas nul, est de degré au moins 1. On en déduit là encore que les deux termes sont nuls, et donc $I_n = GK$. Ainsi, G est inversible.