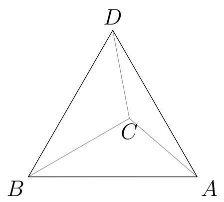
Sandrine CARUSO

Isométries et déplacements du tétraèdre et du cube

Références : Michèle Audin, *Géométrie*, exercice V.29 p 167,
Jean de Biasi, mathématiques pour le Capes et l'agrégation interne, Livre II Géométrie

Théorème. *On se place dans un espace affine réel de dimension 3. Le groupe des isométries préservant un tétraèdre régulier est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$. Celui des déplacements est isomorphe à $\mathfrak{A}_4$. Le groupe des isométries préservant un cube est isomorphe à $\mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Celui des déplacements est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.*



Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier[1]. Tout d'abord, remarquons qu'une isométrie qui préserve $ABCD$ préserve l'ensemble de ses sommets $\{A, B, C, D\}$. En effet, une isométrie préserve les barycentres ; en particulier, une isométrie qui préserve un convexe préserve ses points extrémaux. Or, les sommets d'un tétraèdre sont précisément ses points extrémaux.

Par conséquent, si l'on note $\mathrm{Is}(T)$ le groupe des isométries du tétraèdre, il existe une application

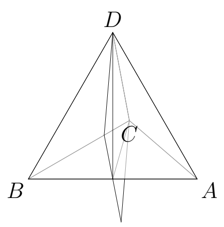
$$\phi : \mathrm{Is}(T) \to \mathfrak{S}_{\{A,B,C,D\}} \simeq \mathfrak{S}_4$$

qui à f associe la permutation

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ f(A) & f(B) & f(C) & f(D) \end{pmatrix}.$$

On vérifie aisément que cette application est un morphisme de groupes. Montrons que c'est un isomorphisme.

Injectivité. Soit $f \in \mathrm{Is}(T)$ telle que $\phi(f) = \mathrm{id}$. Alors $f(A) = A$, $f(B) = B$, $f(C) = C$ et $f(D) = D$. En utilisant encore le fait qu'une isométrie préserve les barycentres, on en déduit que $f = \mathrm{id}$. Donc ϕ est injective.



Surjectivité. Il s'agit de montrer que $\phi(\mathrm{Is}(T)) = \mathfrak{S}_{\{A,B,C,D\}}$. Pour cela, nous allons montrer que $\phi(\mathrm{Is}(T))$ contient les transpositions, et le fait que le groupe symétrique soit engendré par les transpositions permet alors de conclure.

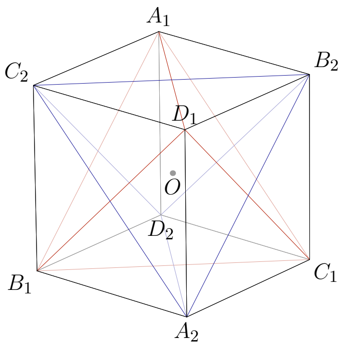
Considérons le plan médiateur du segment $[AB]$. Il contient C et D puisque $AC = AD$ et $BC = BD$. Soit s

[1] Il y a ambiguïté sur la définition d'un tétraèdre. Est-ce l'ensemble de ses sommets ? De ses sommets et ses arêtes ? De ses sommets, arêtes et faces ? Ou le solide « rempli » ? Ici, on considère que le tétraèdre est l'enveloppe convexe de ses sommets (le solide « rempli »)... Mais les considérations qui suivent montrent en fait que la définition choisie n'a pas d'importance.

la symétrie par rapport à ce plan. Elle vérifie $s(A) = B$, $s(B) = A$, $s(C) = C$ et $s(D) = D$ (ce qui implique également qu'elle préserve le tétraèdre). Par conséquent, $\phi(s)$ est la transposition $(A\ B)$, et donc $(A\ B) \in \phi(\mathrm{Is}(T))$. On montre de même que les autres transpositions sont dans $\phi(\mathrm{Is}(T))$. Finalement, on a bien $\phi(\mathrm{Is}(T)) = \mathfrak{S}_{\{A,B,C,D\}}$ et ϕ est surjective.

Nous avons bien montré que ϕ est un isomorphisme, et donc $\mathrm{Is}(T)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.

Remarquons à présent que le groupe $\mathrm{Is}^+(T)$ des déplacements du tétraèdre est d'indice 2 dans $\mathrm{Is}(T)$. En effet, si l'on fixe une isométrie indirecte du tétraèdre, la composition par cette isométrie fournit une bijection entre l'ensemble des isométries directes du tétraèdre et celle des isométries indirectes. Or, $\mathfrak{A}_4$ est l'unique sous-groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_4$, et donc $\mathrm{Is}^+(T)$ est isomorphe à $\mathfrak{A}_4$.



Soit maintenant un cube $A_1C_2B_1D_2B_2D_1A_2C_1$ comme sur la figure ci-contre, $\mathrm{Is}(K)$ son groupe d'isométries. Les tétraèdres $A_1B_1C_1D_1$ et $A_2B_2C_2D_2$, que l'on note plus succinctement T_1 et T_2, sont réguliers. Si $f \in \mathrm{Is}(K)$, de deux choses l'une :

1. soit $f(T_i) = T_i$, $i \in \{1, 2\}$,
2. soit $f(T_1) = T_2$ et $f(T_2) = T_1$

(on peut invoquer une fois de plus la préservation des barycentres). Notons O le centre du cube, et s_O la symétrie par rapport à O ; c'est un élément de $\mathrm{Is}(K)$. De plus, on a la propriété suivante : si f est dans le cas 1, $f \circ s_O$ est dans le cas 2, et si f est dans le cas 2, $f \circ s_O$ est dans le cas 1. En outre, f est entièrement déterminée par ses valeurs sur T_1 et ainsi l'ensemble des f vérifiant 1 est $\mathrm{Is}(T_1)$.

Enfin, une remarque qui sera importante dans la suite, est que s_O commute avec tous les éléments de $\mathrm{Is}(K)$. En effet, tous les éléments de $\mathrm{Is}(K)$ laissent O fixe[2], on peut donc les voir comme des isométries linéaires en vectorialisant l'espace affine en O. Or, dans cet espace linéaire, $s_O = -\,\mathrm{id}$, qui commute effectivement avec tout le monde.

Maintenant, posons

$$\begin{array}{rccl} \psi : & \mathrm{Is}(K) & \to & \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ & f & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} (\phi(f), 0) & \text{si } f \text{ vérifie } 1 \\ (\phi(f \circ s_O), 1) & \text{si } f \text{ vérifie } 2 \end{array} \right. \end{array}$$

où ϕ est un isomorphisme entre $\mathrm{Is}(T_1)$ et $\mathfrak{S}_4$ (par exemple celui défini plus haut). Montrons que ψ est un morphisme de groupes. Le fait que s_O commute avec tous les éléments de $\mathrm{Is}(K)$ sera essentiel pour ce faire. Soient $f, g \in \mathrm{Is}(K)$.

[2]Conservation des barycentres, encore et toujours.

– Si f et g sont dans le cas 1, $f \circ g$ aussi et

$$\psi(f \circ g) = (\phi(f \circ g), 0) = (\phi(f)\phi(g), 0 + 0) = \psi(f)\psi(g).$$

– Si f est dans le cas 1 et g dans le cas 2, $f \circ g$ est dans le cas 2, et

$$\psi(f \circ g) = (\phi(f \circ g \circ s_O), 1) = (\phi(f)\phi(g \circ s_O), 0 + 1) = \psi(f)\psi(g).$$

– Si f est dans le cas 2 et g dans le cas 1, $f \circ g$ est dans le cas 2, et

$$\psi(f \circ g) = (\phi(f \circ g \circ s_O), 1) = (\phi(f \circ s_O \circ g), 1)$$

car s_O commute avec g. C'est encore égal à

$$(\phi(f \circ s_O)\phi(g), 1 + 0) = \psi(f)\psi(g).$$

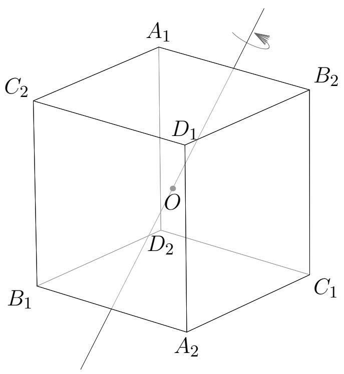
– Si f et g sont dans le cas 2, $f \circ g$ est dans le cas 1, et

$$\psi(f \circ g) = (\phi(f \circ g), 0) = (\phi(f \circ s_O \circ s_O \circ g), 0) = (\phi(f \circ s_O \circ g \circ s_O), 0)$$

en faisant là encore commuter s_O et g. C'est encore égal à

$$(\phi(f \circ s_O)\phi(g \circ s_O), 1 + 1) = \psi(f)\psi(g).$$

On a donc bien montré que ψ est un morphisme de groupes. Le fait qu'il s'agit d'un isomorphisme est aisé à établir en utilisant le fait que ϕ en est un.



Il reste enfin à établir que le groupe des déplacements du cube $\mathrm{Is}^+(K)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$. De même que dans le cas du tétraèdre, il est isomorphe à un sous-groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. De plus, il contient un sous-groupe isomorphe à $\mathfrak{S}_4$, car, comme dans le cas des isométries du tétraèdre, on peut représenter géométriquement les transpositions de $\mathfrak{S}_4$ par des déplacements du cube. Plus précisément, la transposition $(A\ B)$ est représentée par la rotation d'angle π autour de l'axe passant par les milieux de $[A_1B_2]$ et $[A_2B_1]$. (Elle échange A_1 et B_2, B_1 et A_2, C_1 et C_2, D_1 et D_2 et ainsi, son image par ψ est $((A_1\ B_1), 1)$.) On représente de même les autres transpositions.

En résumé, $\mathrm{Is}^+(K)$ est isomorphe à un sous groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et contient un sous-groupe isomorphe à $\mathfrak{S}_4$, il est donc nécessairement isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.