Sandrine CARUSO

Ellipsoïde de John-Lœwner

Références : Francinou - Gianella - Nicolas, Oraux X-ENS, algèbre 3
Alessandri

Théorème. *Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Il existe un unique ellipsoïde de volume minimal contenant K.*

Existence. Un ellipsoïde est défini par $\{x \in \mathbb{R}^n, q(x) \leqslant 1\}$, où q est une forme quadratique définie positive. Notons Q l'ensemble des formes quadratiques, Q^+ l'ensemble des formes quadratiques positives, Q^{++} l'ensemble des formes quadratiques définies positives. Pour $q \in Q^{++}$, on note $\mathcal{E}_q = \{x \in \mathbb{R}^n, q(x) \leqslant 1\}$ l'ellipsoïde associée. Dans une base orthonormée adaptée, q s'écrit $q(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2$ avec $a_i > 0$. Le volume de $\mathcal{E}_q$ se calcule alors ainsi :

$$\mathrm{vol}(\mathcal{E}_q) = \iint \cdots \int_{\sum a_i x_i^2 \leqslant 1} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

Faisons le changement de variable $y_i = \sqrt{a_i} x_i$ (qui définit bien un C^1-difféomorphisme). Le jacobien de ce difféomorphisme est $\frac{1}{\sqrt{a_1 \cdots a_n}}$. Notons $D(q) = a_1 \cdots a_n$. Le changement de variable donne alors

$$\mathrm{vol}(\mathcal{E}_q) = \iint \cdots \int_{\sum y_i^2 \leqslant 1} \frac{1}{\sqrt{D(q)}} \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_n = \frac{V_0}{\sqrt{D(q)}}$$

où V_0 est le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$. Notre problème se ramène donc à maximiser $D(q)$ pour les $q \in Q^{++}$ telles que $\forall x \in K, q(x) \leqslant 1$. Pour cela, nous allons en fait maximiser $D(q)$ sur un ensemble un peu plus grand : soit

$$\mathcal{A} = \{q \in Q^+, \forall x \in K, q(x) \leqslant 1\}.$$

On munit Q de la norme $N(q) = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |q(x)|$. Montrons que $\mathcal{A}$ est un compact convexe et non vide de Q (la convexité ne sera utile que dans la partie unicité). Comme Q est un $\mathbb{R}$-espace normé de dimension finie, pour montrer que $\mathcal{A}$ est compact, il suffit de montrer qu'il est fermé et borné.

(convexe) Soient $q, q' \in \mathcal{A}$ et $t \in [0,1]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $(tq + (1-t)q')(x) = tq(x) + (1-t)q'(x) \geqslant 0$ et pour tout $x \in K$, $(tq + (1-t)q')(x) = tq(x) + (1-t)q'(x) \leqslant t + (1-t) = 1$, donc $tq + (1-t)q' \in \mathcal{A}$.

(fermé) Soit (q_n) une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ qui converge vers $q \in Q$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\|q(x) - q_n(x)\| \leqslant N(q - q_n) \|x\|$ donc $(q_n(x))$ tend vers $q(x)$. En particulier, $q(x) = \lim q_n(x) \geqslant 0$, et si $x \in K$, $q(x) = \lim q_n(x) \leqslant 1$.

(borné) Comme K est d'intérieur non vide, si $a \in K$, il existe $r > 0$ tel que $\bar{B}(a,r) \subset K$. Soit $q \in \mathcal{A}$. Pour tout x tel que $\|x\| \leqslant r$, $a + x \in K$ et par conséquent $q(x+a) \leqslant 1$. Par ailleurs, $q(-a) = q(a) \leqslant 1$. On a donc, en utilisant l'inégalité de Minkowski,

$$\sqrt{q(x)} = \sqrt{q(x+a-a)} \leqslant \sqrt{q(x+a)} + \sqrt{q(-a)} \leqslant 2,$$

et ainsi $q(x) \leqslant 4$. Si, maintenant, on considère x tel que $\|x\| \leqslant 1$, on a $q(x) = \frac{1}{r^2} q(rx) \leqslant \frac{4}{r^2}$ d'après ce qui précède, et donc $N(q) \leqslant \frac{4}{r^2}$. Donc $\mathcal{A}$ est borné.

(non vide) Le compact K est en particulier borné. Soit M tel que $\forall x \in K, \|x\| \leqslant M$. Considérons $q_1(x) = \frac{\|x\|^2}{M^2}$; c'est une forme quadratique définie positive, et pour tout $x \in K$, $q_1(x) \leqslant 1$ par construction. Donc $q_1 \in \mathcal{A}$.

L'application continue D atteint un maximum q_0 sur le compact $\mathcal{A}$. De plus, comme la forme quadratique q_1 définie ci-dessus est dans $\mathcal{A}$ et qu'elle est définie positive, $D(q_0) \geqslant D(q_1) > 0$, et ainsi q_0 est également définie positive. Ceci conclut la partie existence : l'ellipsoïde $\mathcal{E}_{q_0}$ convient.

Unicité. Nous allons avoir besoin du lemme suivant :

Lemme. *Soient A et B deux matrices symétriques définies positives, et $\alpha \in [0,1]$. Alors*

$$\det(\alpha A + (1-\alpha)B) \geqslant (\det A)^\alpha (\det B)^{1-\alpha}.$$

De plus, si $\alpha \in]0,1[$ et $A \neq B$, l'inégalité est stricte.

Démonstration. Par le théorème de réduction simultanée, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $A = P\,{}^tP$ et $B = PD\,{}^tP$. De plus, comme B est définie positive, les coefficients de D, que l'on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, sont strictement positifs. On a $\det(\alpha A + (1-\alpha)B) = (\det P)^2 \det(\alpha I_n + (1-\alpha)D)$ et $(\det A)^\alpha (\det B)^{1-\alpha} = (\det P)^2 (\det D)^{1-\alpha}$, on est donc ramené au cas où $A = I_n$ et $B = D$, car $(\det P)^2$ est strictement positif. On a

$$\det(\alpha I_n + (1-\alpha)D) = \prod_{i=1}^n (\alpha + (1-\alpha)\lambda_i)$$

d'une part, et d'autre part,

$$(\det D)^{1-\alpha} = \prod_{i=1}^n \lambda_i^{1-\alpha}.$$

La fonction logarithme est strictement concave, donc pour tout i, $\ln(\alpha + (1-\alpha)\lambda_i) \geqslant \alpha \ln 1 + (1-\alpha)\ln(\lambda_i) = (1-\alpha)\ln(\lambda_i)$. On en déduit que $\sum_{i=1}^n \ln(\alpha + (1-\alpha)\lambda_i) \geqslant \sum_{i=1}^n (1-\alpha)\ln(\lambda_i)$, puis en passant à l'exponentielle, l'inégalité recherchée. De plus, si $\alpha \in]0,1[$ et $A \neq B$, l'un des λ_i est différent de 1, et par stricte concavité de $\ln$, l'inégalité est stricte. $\square$

Revenons à la démonstration du théorème. Supposons par l'absurde qu'il existe une forme quadratique définie positive $q \neq q_0$ tel que $D(q) = D(q_0)$. Soient S et S_0 des matrices symétriques définies positives représentant respectivement q et q_0 dans une base orthonormée. Comme $\mathcal{A}$ est convexe, $\frac{1}{2}(q + q_0) \in \mathcal{A}$, et on a

$$D(\frac{1}{2}(q + q_0)) = \det(\frac{1}{2}(S + S_0)) > (\det S_0)^{\frac{1}{2}}(\det S)^{\frac{1}{2}} = \det S_0 = D(q_0),$$

ce qui est absurde par maximalité de $D(q_0)$.