Sandrine CARUSO

Système proie-prédateur de Lotka-Volterra

Références : A. Chambert-Loir, Analyse 3
Polycopié de Grégory Vial

Problème. *Le but est d'étudier le système d'équations différentielles*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & ax - bxy \\ y' & = & -cy + dxy \end{array} \right. \tag{1}$$

avec les conditions initiales $x(0) = x_0$ *et* $y(0) = y_0$*, où* a, b, c, d *sont des constantes strictement positives.*

Interprétation. Ce système différentiel est une modélisation d'un système proie-prédateur, par exemple, des lapins et des renards. La fonction x mesure la quantité de lapins au cours du temps, et la fonction y mesure la quantité de renards. Pour aboutir au système (1), on fait les hypothèses suivantes :

- La reproduction des lapins est proportionnelle au nombre de lapins (terme ax).
- Leur disparition est directement liée à la probabilité de rencontre avec un renard, que l'on suppose proportionnelle au produit xy (terme $-bxy$).
- Les renards se reproduisent d'autant plus qu'ils sont nombreux et ont de quoi se nourrir, ainsi leur reproduction est proportionnelle à xy (terme dxy).
- Enfin, les renards disparaissent lorsqu'ils n'ont plus assez à manger, et se font concurrence pour la nourriture (terme $-cy$).

Notons f la fonction définie par $f(x, y) = (ax-bxy, -cy+dxy)$. Elle est localement lipschitzienne, et donc le problème de Cauchy $(x', y') = f(x, y)$, $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ admet une unique solution maximale d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz. Soit I l'intervalle de définition de cette solution.

Pour que le modèle ait un intérêt, on suppose que les deux espèces sont présentes au départ, c'est-à-dire $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$. Vérifions tout d'abord que, dans ce cas, la solution (x, y) du problème de Cauchy vérifie, pour tout $t \in I$, $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$. Supposons que ce ne soit pas le cas ; alors par le théorème des valeurs intermédiaires, l'une des deux fonctions x ou y s'annule. Si c'est x, il existe $s \in I$ tel que $x(s) = 0$. Le problème de Cauchy $(x', y') = f(x, y)$, $x(s) = 0, y(s) = y_s$ admet lui aussi une unique solution maximale. Or, $t \mapsto (0, y_s e^{-c(t-s)})$ est une telle solution sur $\mathbb{R}$. Par unicité, on en déduit que $x(0) = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse $x_0 > 0$. De même, s'il existe s tel que $y(s) = 0$, on en déduit que $y(0) = 0$, ce qui est en contradiction avec $y_0 > 0$.

Théorème. *Les trajectoires des solutions de* (1) *avec conditions initiales* x_0 *et* y_0 *strictement positives sont périodiques.*

Lemme 1. *La fonction* $H : (x, y) \mapsto dx + by - c \ln x - a \ln y$ *est une intégrale première de* (1)*, c'est-à-dire que si* (x, y) *est une solution de* (1)*, l'application* $t \mapsto H(x(t), y(t))$ *est constante.*

Démonstration. Soit (x, y) une solution de (1). On a montré que x et y restaient strictement positives, donc la fonction $t \mapsto H(x(t), y(t))$ est bien définie et dérivable pour tout $t \in I$. On a

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}H(x(t), y(t))}{\mathrm{d}t} &= dx'(t) + by'(t) - c\frac{x'(t)}{x(t)} - a\frac{y'(t)}{y(t)} \\ &= d(ax - bxy) + b(-cy + dxy) - c(a - by) - a(-c + dx) = 0.\end{aligned}$$

Par conséquent, $t \mapsto H(x(t), y(t))$ est constante. □

Lemme 2. *La solution de* (1) *est globale.*

Démonstration. D'après le théorème de sortie de tout compact, qui affirme qu'une solution maximale non globale explose en temps fini, il suffit de montrer que ce n'est pas le cas de la solution (x, y). Or, pour tout t, $x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t) \leqslant ax(t)$. Donc $x(t) \leqslant x_0 e^{at}$ d'après le lemme de Grönwall, et x ne peut exploser en temps fini. Puis $y'(t) = -cy(t) + dx(t)y(t) \leqslant dx(t)y(t)$, donc $y(t) \leqslant y_0 \exp(d \int_0^t x)$ qui ne peut non plus exploser en temps fini. La solution (x, y) est donc globale. □

Considérons les quatre zones suivantes de $(\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$\begin{aligned}E_1 &= \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, x < \frac{c}{d}, y < \frac{a}{b}\}, & E_2 &= \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, x > \frac{c}{d}, y < \frac{a}{b}\}, \\ E_3 &= \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, x > \frac{c}{d}, y > \frac{a}{b}\}, & E_4 &= \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, x < \frac{c}{d}, y > \frac{a}{b}\}.\end{aligned}$$

Lemme 3.

– *S'il existe* $t_1 \in \mathbb{R}$ *tel que* $(x(t_1), y(t_1)) \in E_1$*, alors il existe* $t > t_1$ *tel que* $(x(t), y(t)) \in E_2$*.*
– *S'il existe* $t_2 \in \mathbb{R}$ *tel que* $(x(t_2), y(t_2)) \in E_2$*, alors il existe* $t > t_2$ *tel que* $(x(t), y(t)) \in E_3$*.*
– *S'il existe* $t_3 \in \mathbb{R}$ *tel que* $(x(t_3), y(t_3)) \in E_3$*, alors il existe* $t > t_3$ *tel que* $(x(t), y(t)) \in E_4$*.*
– *S'il existe* $t_4 \in \mathbb{R}$ *tel que* $(x(t_4), y(t_4)) \in E_4$*, alors il existe* $t > t_4$ *tel que* $(x(t), y(t)) \in E_1$*.*

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}$. Si $(x(t), y(t)) \in E_1$, alors $x'(t) = x(t)(a - by(t)) > 0$ et $y'(t) = y(t)(-c + dx(t)) < 0$. Supposons qu'il existe t_1 tel que $(x(t_1), y(t_1)) \in E_1$ et que pour tout $t > t_1$, $(x(t), y(t)) \in E_1$. D'après les inégalités précédentes, x est croissante et y décroissante sur $[t_1, +\infty[$. Comme de plus, x est majorée par $\frac{c}{d}$ et y

minorée par 0, ces deux fonctions ont des limites respectives $\xi \in [x(t_1), \frac{c}{d}]$ et $\eta \in [0, y(t_1)]$ lorsque t tend vers l'infini. D'après les relations qui les lient, on en déduit que x' et y' ont également des limites finies lorsque t tend vers l'infini, mais ces limites sont alors nécessairement nulles ! On obtient alors $\eta = \frac{a}{b}$ et $\xi = \frac{c}{d}$. Or, par hypothèse, $y(t_1) < \frac{a}{b}$ et on obtient une contradiction avec le fait que $\eta \in [0, y(t_1)]$. Par conséquent, la trajectoire de (x, y) sort de E_1.

Il existe donc $t'_1 > t_1$, minimal, tel que $(x(t'_1), y(t'_1)) \notin E_1$ (car $(\mathbb{R}_+^*)^2 \backslash E_1$ est fermé dans $(R_+^*)^2$ et (x, y) est continue), et plus précisément, $(x(t'_1), y(t'_1))$ est sur la frontière de E_1. On a $y(t'_1) < y(t_1) < \frac{a}{b}$ donc nécessairement, $x(t'_1) = \frac{c}{d}$, et $x'(t'_1) > 0$. Ainsi, si $t > t'_1$ est assez proche de t'_1, $x(t'_1) > \frac{c}{d}$ et $y(t'_1) < \frac{a}{b}$. Autrement dit, $(x(t), y(t)) \in E_2$.

Pour les trois autres points du lemme, le raisonnement est similaire mais présente une difficulté supplémentaire : E_2, E_3 et E_4 n'étant pas bornés, on ne peut pas conclure directement que x ou y (selon le cas) est majorée. C'est pourtant bien le cas, et nous allons le montrer grâce à la fonction H du lemme 1. Il existe $A > 0$ tel que, pour tout $z > A$, $c \ln z < \frac{1}{2} dz$ et $a \ln z < \frac{1}{2} bz$, et il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout z, $dz - c \ln z > \alpha$ et $bz - a \ln z > \alpha$. Ceci entraîne, pour tous $x > A$ et $y > A$,

$$H(x, y) > \frac{1}{2} dx + \alpha \quad \text{et} \quad H(x, y) > \frac{1}{2} by + \alpha.$$

Étant donné que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $H(x(t), y(t)) = H(x_0, y_0)$, on obtient

$$x(t) < \max\{A, \frac{2}{d}(H(x_0, y_0) - \alpha)\} \quad \text{et} \quad y(t) < \max\{A, \frac{2}{b}(H(x_0, y_0) - \alpha)\}.$$

On conclut, comme annoncé, par un raisonnement similaire au cas de E_1. □

Lemme 4. *Supposons qu'il existe t_1 tel que $(x(t_1), y(t_1)) \in E_1$. Après avoir visité les zones E_2, E_3, E_4 et à nouveau E_1, la trajectoire (x, y) repasse par le même point de la frontière entre E_1 et E_2.*

Démonstration. Soient t'_1 et t'_5 les deux réels suivant t_1 tels que $x(t'_1) = x(t'_5) = \frac{c}{d}$, $y(t'_1) < \frac{a}{b}$ et $y(t'_5) < \frac{a}{b}$. Il suffit de montrer que $y(t'_1) = y(t'_5)$. Or, on a $H(x(t'_1), y(t'_1)) = H(x(t'_5), y(t'_5))$, c'est-à-dire

$$by(t'_1) - a \ln y(t'_1) = by(t'_5) - a \ln y(t'_5).$$

Or, $z \mapsto bz - a \ln z$ a pour dérivée $z \mapsto b - \frac{a}{z}$ qui est strictement positive pour $z < \frac{a}{b}$. Ainsi, $z \mapsto bz - a \ln z$ est injective sur $[0, \frac{a}{b}]$, ce qui entraîne $y(t'_1) = y(t'_5)$. □

Pour conclure que la trajectoire est périodique, il suffit d'invoquer le théorème de Cauchy-Lipschitz, qui assure que deux trajectoires distinctes ne se coupent pas.

Cependant, nous avons traité le cas où il existe t_1 tel que $(x(t_1), y(t_1)) \in E_1$. D'après le lemme 3, c'est le cas si $(x_0, y_0) \in \cup_{i=1}^4 E_i$, et d'après la démonstration de ce lemme, il n'est pas difficile de se convaincre que c'est le cas pour $(x_0, y_0) \in (R_+^*)^2 \backslash \{(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})\}$. Enfin, le cas $(x_0, y_0) = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ conduit évidemment à une solution périodique, car constante !

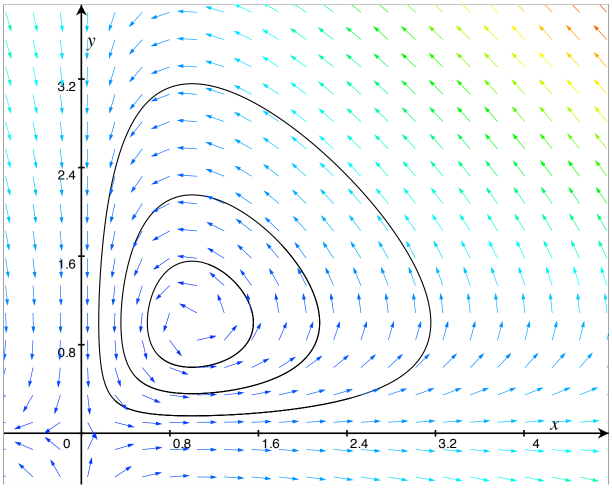

FIG. 1 – Trajectoires avec $a = b = c = d = 1$