Sandrine CARUSO

Méthodes de Gauss.

Référence : Demailly

Les méthodes d'intégration de Gauss consistent en une approximation du type

$$\int_\alpha^\beta f(x)w(x)\,dx \simeq \sum_{j=0}^{l} \lambda_j f(x_j) \tag{1}$$

où $w : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}_+^*$ est continue, et $\int_\alpha^\beta w(x)dx < +\infty$ (fonction poids). On le théorème suivant :

Théorème (Polynômes orthogonaux). *On note $\langle\cdot,\cdot\rangle_w$ le produit scalaire défini par*

$$\langle f, g\rangle_w = \int_\alpha^\beta f(x)g(x)w(x)\,dx.$$

Il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires, orthogonale pour $\langle\cdot,\cdot\rangle_w$, et telle que $\deg P_n = n$ pour tout n. De plus, chacun de ces polynômes a toutes ses racines réelles et distinctes.

Ces propriétés permettront de démontrer le théorème suivant :

Théorème (Méthodes de Gauss). *Il existe deux uniques familles de réels $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant l}$ et $(\lambda_i)_{0\leqslant i\leqslant l}$ telles que la méthode de Gauss* (1) *soit d'ordre $2l+1$. Les x_i sont alors les racines du $l+1$-ième polynôme orthogonal pour w.*

Unicité. Supposons que $x_0, \dots, x_l$ et $\lambda_0, \dots, \lambda_l$ donnent lieu à une méthode d'ordre au moins $2l+1$. Posons

$$\pi_{l+1} = \prod_{i=0}^{l}(X - x_i).$$

Alors $\deg \pi_{l+1} = l+1$, donc pour tout $P \in \mathbb{R}_l[X]$, $\deg P\pi_{l+1} = 2l+1$. Puisque la méthode est d'ordre $2l+1$,

$$\int_\alpha^\beta P(x)\pi_{l+1}(x)w(x)\,dx = \sum_{j=0}^{l} \lambda_j P(x_j)\pi_{l+1}(x_j) = 0$$

car les x_j sont les racines de π_{l+1}. Ainsi, π_{l+1} est orthogonal à $\mathbb{R}_l[X]$, et comme il est unitaire, c'est *le* $l+1$-ième polynôme orthogonal pour w. D'où l'unicité des x_j. Calculons maintenant les λ_j. Soient $L_i \in \mathbb{R}_l[X]$ les polynômes élémentaires d'interpolation de Lagrange en les x_j : $L_i(x_j) = \delta_{ij}$. Comme ils sont de degré plus petit que $2l+1$, la méthode est exacte pour ces polynômes.

$$\lambda_i = \sum_{j=0}^{l} \lambda_j L_i(x_j) = \int_\alpha^\beta L_i(x) w(x)\, dx$$

ce qui détermine entièrement les λ_i.

Existence Soit maintenant π_{l+1} le $l+1$-ième polynôme orthogonal pour w, soient $x_0, \ldots, x_l$ ses racines, et en définissant alors L_i comme ci-dessus, on pose

$$\lambda_i = \int_\alpha^\beta L_i(x) w(x)\, dx.$$

Montrons qu'alors la méthode est d'ordre $2l+1$. Tout d'abord, pour $P \in \mathbb{R}_l[X]$, P est égal à son polynôme d'interpolation de Lagrange $\sum_{i=0}^{l} P(x_i) L_i(x)$, et par conséquent,

$$\int_\alpha^\beta P(x) w(x)\, dx = \int_\alpha^\beta \sum_{i=0}^{l} P(x_i) L_i(x) = \sum_{i=0}^{l} P(x_i) \lambda_i$$

par définition des λ_i, ce qui assure que la méthode est d'ordre au moins l. Si, maintenant, $P \in \mathbb{R}_{2l+1}[X]$, on écrit sa division euclidienne par π_{l+1} :

$$P = Q\pi_{l+1} + R$$

avec $\deg R \leqslant l$, et comme π_{l+1} est de degré $l+1$ et P de degré au plus $2l+1$, $\deg Q \leqslant l$. Ainsi, d'une part,

$$\int_\alpha^\beta P(x) w(x)\, dx = \int_\alpha^\beta Q(x) \pi_{l+1} w(x)\, dx + \int_\alpha^\beta R(x) w(x)\, dx = \int_\alpha^\beta R(x) w(x)\, dx$$

car π_{l+1} est orthogonal à $\mathbb{R}_l[X]$ par définition, d'autre part,

$$\sum_{j=0}^{l} \lambda_j P(x_j) = \sum_{j=0}^{l} \lambda_j Q(x_j) \pi_{l+1}(x_j) + \sum_{j=0}^{l} \lambda_j R(x_j) = \sum_{j=0}^{l} \lambda_j R(x_j)$$

car $\pi_{l+1}(x_j) = 0$ pour tout j. On a bien l'égalité voulue, ce qui montre que la méthode est d'ordre au moins $2l+1$. Il reste à montrer qu'elle est d'ordre exactement $2l+1$, et pour cela, à exhiber un polynôme de degré $2l+2$ pour lequel elle n'est pas exacte. C'est le cas de π_{l+1}^2 :

$$\int_\alpha^\beta \pi_{l+1}(x)^2 w(x)\, dx > 0$$

car la fonction intégrée est positive et pas presque partout nulle, mais en revanche,

$$\sum_{j=0}^{l} \lambda_j \pi_{l+1}(x_j)^2 = 0.$$