Sandrine CARUSO

Lemme de Morse

Référence : Petit guide de calcul différentiel, Rouvière

Théorème. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine, et $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe C^3. On suppose que $Df(0) = 0$ et $D^2f(0)$ est une forme quadratique non dégénérée de signature $(p, n-p)$. Alors il existe des voisinages V et W de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un C^1-difféomorphisme $\varphi : V \to W$ tel que $\varphi(0) = 0$, et pour tout $x \in V$, si on note u le vecteur $\varphi(x)$,*

$$f(x) - f(0) = u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \cdots - u_n^2.$$

Lemme. *Soit S l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n. Soit $A \in S$, inversible. Alors il existe un voisinage V de A dans S et une application ψ de classe C^1 de V dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $M \in V$, $M = {}^t\psi(M)A\psi(M)$.*
En clair, toute forme quadratique assez proche de la forme quadratique non dégénérée A est équivalente à A « de manière C^1 ».

Démonstration. Notons τ l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans S qui à une matrice M associe ${}^tMAM$. Nous allons tout d'abord déterminer le noyau de $D\tau(I)$, où I est la matrice identité. On a, pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\tau(I+H) - \tau(I) = {}^t(I+H)A(I+H) - A = {}^tHA + AH + {}^tHAH$$

et par conséquent, $D\tau(I)\cdot H = {}^tHA + AH$. Ainsi, comme A est symétrique, $\ker D\tau(I)$ est l'espace des matrices M telles que AM est antisymétrique.

Notons F l'espace des matrices M telles que AM est symétrique. C'est un supplémentaire de $\ker D\tau(I)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, $I \in F$ puisque A est symétrique. Notons $\tilde{\tau} : F \to S$ la restriction de τ à F. On a $D\tilde{\tau}(I) : F \to S$, et les espaces F et S sont de même dimension finie. De plus, $\ker D\tilde{\tau}(I) = \ker D\tau(I) \cap F = \{0\}$, autrement dit, $D\tilde{\tau}(I)$ est injective. Par conséquent, elle est également bijective, et on est donc dans les conditions d'applications du théorème d'inversion locale. Il existe un voisinage ouvert U de I, que l'on peut supposer inclus dans l'ouvert des matrices inversibles, tel que $\tilde{\tau}$ soit un C^1-difféomorphisme de U sur $V = \tilde{\tau}(U)$. Ainsi, V est un voisinage de $\tilde{\tau}(I) = \tau(I) = A$, et l'application $\tilde{\tau}^{-1}$ fournit le difféomorphisme ψ de l'énoncé. $\square$

Passons maintenant à la démonstration du théorème. La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 s'écrit, au voisinage de 0,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + Df(0)(x) + \int_0^1 (1-t)D^2f(tx)(x)dt \\ &= f(0) + \int_0^1 (1-t)D^2f(tx)(x)dt. \end{aligned}$$

Identifions la forme quadratique $Q(x) = \int_0^1 (1-t)D^2f(tx)dt$ à la matrice symétrique associée, et x à un vecteur colonne, de sorte que $f(x) = f(0) + {}^t x Q(x) x$. Comme f est de classe C^3, par théorème de dérivation sous le signe intégrale, Q est une fonction de classe C^1 de x. On a $Q(0) = \frac{1}{2}D^2f(0)$, donc par hypothèse, $Q(0)$ est une matrice symétrique inversible. D'après le lemme, il existe un voisinage V' de 0 et une application ψ de classe C^1 sur $Q(V')$ à valeurs dans l'ensemble des matrices inversibles telle que

$$Q(x) = {}^t(\psi \circ Q(x))Q(0)(\psi \circ Q(x))$$

pour tout $x \in V'$. Dans la suite, on note $M = \psi \circ Q$ pour alléger les notations.

Ensuite, le théorème de réduction des formes quadratiques sur $\mathbb{R}$ affirme qu'il existe une matrice inversible P telle que, pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^n$,

$${}^t u\, {}^t P Q(0) P u = u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \cdots - u_n^2$$

(car $Q(0)$ est, tout comme $D^2f(0)$, de signature $(p, n-p)$).

Finalement, on obtient, pour tout $x \in V'$,

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= {}^t(P^{-1}M(x)x)\, {}^t P Q(0) P (P^{-1}M(x)x) \\ &= u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \cdots - u_n^2 \end{aligned}$$

avec $u = P^{-1}M(x)x$. La fonction $\varphi : x \mapsto P^{-1}M(x)x$ est de classe C^1, et vérifie $\varphi(0) = 0$. Pour montrer qu'elle établit un C^1-difféomorphisme entre deux voisinages de 0, remarquons que $D\varphi(0) = P^{-1}M(0)$. En effet, $\varphi(h) - \varphi(0) - P^{-1}M(0) \cdot h = P^{-1}(M(h) - M(0)) \cdot h = o(h)$ car $M(h) - M(0)$ tend vers 0 quand h tend vers 0. Ainsi, on a bien $D\varphi(0) = P^{-1}M(0)$, qui est une matrice inversible. On conclut alors en appliquant le théorème d'inversion locale.