Sandrine CARUSO

Méthode de Newton pour les polynômes

Référence : A. Chambert-Loir, Analyse 2

Théorème. *Soient* $\zeta_1 < \zeta_2 < \cdots < \zeta_r$ *des réels (*$r \geqslant 2$*), et* $m_1, \ldots, m_r$ *des entiers supérieurs ou égaux à* 1*. Soit* $P = \prod_{k=1}^r (X - \zeta_r)^{m_r}$*. Soit* $x_0 > \zeta_r$*. On définit par récurrence la suite*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}.$$

Alors la suite (x_n) *est strictement décroissante et tend vers* ζ_r*. De plus, on a une estimation de la rapidité de convergence :*

– *si* $m_r = 1$*, alors pour tout réel* $c > 0$*,* $x_n - \zeta_r = o(c^n)$*.*
– *si* $m_r > 1$*, alors il existe* $c > 0$ *tel que* $x_n - \zeta_r \sim c(1 - \frac{1}{m_r})^n$*.*

Nous allons tout d'abord montrer que pour tout n, $x_n > \zeta_r$. Notons f la fonction définie, pour tout $x > \zeta_r$, par $f(x) = x - \frac{P(x)}{P'(x)}$. Elle se prolonge par continuité en $x = \zeta_r$, car la multiplicité de ζ_r dans P' est un de moins que dans P, et on a $f(\zeta_r) = \zeta_r$. Pour tout $x \in]\zeta_r, +\infty[$,

$$f'(x) = 1 - \left(1 - \frac{P''(x)P(x)}{(P'(x))^2}\right) = \frac{P''(x)P(x)}{(P'(x))^2}.$$

Les racines de P sont dans $[\zeta_1, \zeta_r]$, et d'après le théorème de Gauss-Lucas, c'est également le cas des racines de P' et de P''. En particulier, les coefficients dominants de ces trois polynômes étant positifs, pour tout $x > \zeta_r$, $P(x) > 0$, $P'(x) > 0$ et $P''(x) > 0$. Par conséquent, $f'(x) > 0$. Donc f est strictement croissante sur $]\zeta_r, +\infty[$, et par continuité, sur $[\zeta_r, +\infty[$. Supposons que pour un certain n, $x_n > \zeta_r$. Alors $x_{n+1} = f(x_n) > f(\zeta_r) = \zeta_r$. Comme $x_0 > \zeta_r$, on conclut par récurrence.

Le rapport $\frac{P'}{P}$ est la dérivée logarithmique de P, qui s'écrit

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=0}^{r} \frac{m_k}{X - \zeta_k}.$$

On a donc, pour tout $x > \zeta_r$,

$$x_{n+1} - x_n = -\left(\sum_{k=0}^{r} \frac{m_k}{x_n - \zeta_k}\right)^{-1}.$$

Comme $x_n > \zeta_r$, chaque terme de cette somme est strictement positif, donc c'est également le cas de la somme, et de son inverse. Ainsi, on a bien $x_{n+1} - x_n < 0$, et la suite (x_n) est strictement décroissante.

Nous avons établi que la suite (x_n) est décroissante, et minorée par ζ_r. Par conséquent, cette suite converge. De plus, c'est nécessairement vers un point fixe de f, et donc, c'est vers ζ_r (car un point fixe de f est une racine de P).

Étudions maintenant la rapidité de convergence. Nous avons vu que pour tout $x \in]\zeta_r, +\infty[$, $f'(x) = \frac{P''(x)P(x)}{(P'(x))^2}$. Dérivons la relation $\frac{P'}{P} = \sum_{k=0}^{r} \frac{m_k}{X-\zeta_k}$. Cela donne

$$\frac{P''P - (P')^2}{P^2} = -\sum_{k=0}^{r} \frac{m_k}{(X-\zeta_k)^2}.$$

Donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{P''(x)P(x)}{(P(x))^2} \cdot \frac{(P(x))^2}{(P'(x))^2} = \frac{P''(x)P(x) - (P'(x))^2}{(P(x))^2} \cdot \frac{(P(x))^2}{(P'(x))^2} + 1 \\ &= 1 - \left(\sum_{k=0}^{r} \frac{m_k}{(x-\zeta_k)^2}\right)\left(\sum_{k=0}^{r} \frac{m_k}{x-\zeta_k}\right)^{-2}. \end{aligned}$$

En passant à la limite, on constate que $f'(x)$ tend vers $1 - \frac{1}{m_r}$ lorsque x tend vers ζ_r. En effet, $\sum_{k=0}^{r} \frac{m_k}{x-\zeta_k} \sim \frac{m_r}{x-\zeta_r}$, $\sum_{k=0}^{r} \frac{m_k}{(x-\zeta_k)^2} \sim \frac{m_r}{(x-\zeta_r)^2}$, donc

$$\left(\sum_{k=0}^{r} \frac{m_k}{(x-\zeta_k)^2}\right)\left(\sum_{k=0}^{r} \frac{m_k}{x-\zeta_k}\right)^{-2} \sim \frac{m_r}{(x-\zeta_r)^2}\frac{(x-\zeta_r)^2}{m_r^2} = \frac{1}{m_r}$$

et donc ce produit tend vers $\frac{1}{m_r}$. On en déduit, par prolongement, que f' est de classe C^1 sur $[\zeta_r, +\infty[$ et que $f'(\zeta_r) = 1 - \frac{1}{m_r}$.

Dans le cas où $m_r = 1$, $f'(\zeta_r) = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après l'égalité des accroissements finis, il existe $y_n \in]\zeta_r, x_n[$ tel que $f(x_n) - f(\zeta_r) = (x_n - \zeta_r)f'(y_n)$. Comme x_n tend vers ζ_r, y_n aussi et $f'(y_n)$ tend vers 0. Donc pour tout $c > 0$, il existe n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $|f'(y_n)| \leqslant c$. Cela donne

$$x_{n+1} - \zeta_r = f(x_n) - f(\zeta_r) \leqslant (x_n - \zeta_r)c.$$

Par une récurrence immédiate, $x_n - \zeta_r \leqslant (x_0 - \zeta_r)c^n = O(c^n)$. Comme ceci est vrai pour tout c, en choisissant $c' < c$, on a $x_n - \zeta_r = O(c'^n) = o(c^n)$.

Supposons maintenant que $m_r > 1$. Alors $f'(\zeta_r) = 1 - \frac{1}{m_r} \in]0, 1[$. Comme précédemment, il existe $y_n \in]\zeta_r, x_n[$ tel que $f(x_n) - f(\zeta_r) = (x_n - \zeta_r)f'(y_n)$. En passant au logarithme puis à la limite, on obtient que $\log(x_{n+1} - \zeta_r) - \log(x_n - \zeta_r)$ converge vers $\log(f'(\zeta_r))$. Par limite de Cesàro, $\frac{\log(x_n-\zeta_r)-\log(x_0-\zeta_r)}{n}$ tend aussi vers $\log(f'(\zeta_r))$, et comme ce nombre est non nul, on en déduit que $\log(x_n - \zeta_r) \sim n\log(f'(\zeta_r))$. À ce stade, on ne peut pas en déduire que $x_n - \zeta_r \sim (f'(\zeta_r))^n$, il faut pour cela étudier la différence $\log(x_n - \zeta_r) - n\log(f'(\zeta_r))$. L'égalité des accroissements finis ne suffit plus, et nous allons utiliser l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 : pour tout n, il existe $z_n \in]\zeta_r, x_n[$ tel que

$$x_{n+1} - \zeta_r = f(x_n) - f(\zeta_r) = f'(\zeta_r)(x_n - \zeta_r) + \frac{f''(z_n)}{2}(x_n - \zeta_r)^2.$$

Ainsi,

$$\frac{x_{n+1} - \zeta_r}{f'(\zeta_r)(x_n - \zeta_r)} = 1 + \frac{f''(z_n)}{2f'(\zeta_r)}(x_n - \zeta_r).$$

On note $\varepsilon_n = \frac{f''(z_n)}{2f'(\zeta_r)}(x_n - \zeta_r)$; ε_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. En prenant le logarithme de l'expression précédente,

$$\log(x_{n+1} - \zeta_r) - \log(x_n - \zeta_r) - \log(f'(\zeta_r)) = \log(1 + \varepsilon_n) \sim \varepsilon_n = O(x_n - \zeta_r).$$

Le fait que $\log(x_n - \zeta_r) \sim n\log(f'(\zeta_r))$ implique que, pour toute constante $\alpha > f'(\zeta_r)$, on a, pour n assez grand, $\log(x_n - \zeta_r) < n\log(\alpha)$ et donc $x_n - \zeta_r < \alpha^n$. On choisit un tel $\alpha \in]f'(\zeta), 1[$. Alors $x_n - \zeta_r = O(\alpha^n)$ et donc

$$\log(x_{n+1} - \zeta_r) - \log(x_n - \zeta_r) - \log(f'(\zeta_r)) = O(\alpha^n).$$

Comma $\alpha < 1$, la série de terme général α^n converge, et par conséquent, c'est également le cas de la série de terme général $\log(x_{n+1} - \zeta_r) - \log(x_n - \zeta_r) - \log(f'(\zeta_r))$. Cela signifie exactement que la suite $(\log(x_n - \zeta_r) - n\log(f'(\zeta_r))$ converge, et si l'on note λ sa limite, on obtient

$$x_n - \zeta_r \sim e^{\lambda} f'(\zeta_r)^n = e^{\lambda}\left(1 - \frac{1}{m_r}\right)^n.$$