Sandrine CARUSO

Théorème de point fixe « collectif ».

Référence : Alessandri

Théorème. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et K un compact convexe non vide de E. Soit G un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(E)$, tel que*

$$\forall u \in G, u(K) \subset K.$$

Alors il existe $a \in K$ tel que $\forall u \in G, u(a) = a$.

① On commence par montrer que si $v \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $v(K) \subset K$, alors v admet un point fixe dans K. Soit $x_0 \in K$ et notons

$$x_k = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} v^i(x_0).$$

Comme $v(K) \subset K$, pour tout i, $v^i(x_0) \in K$, et K étant convexe, $x_k \in K$. Ainsi, (x_k) est une suite du compact K, donc elle admet une suite extraite convergente $(x_\varphi(k))$, dont on note a la limite. Remarquons que pour tout k,

$$v(x_k) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} v^{i+1}(x_0) = x_k + \frac{1}{k+1}(v^{k+1}(x_0) - x_0).$$

Ainsi, $v(x_{\varphi(k)}) = x_{\varphi(k)} + \frac{1}{\varphi(k)+1}(v^{\varphi(k)+1}(x_0) - x_0)$. La suite $(v^{\varphi(k)+1}(x_0) - x_0)$ est une suite du compact $K - x_0$, donc est bornée. La suite $(\frac{1}{\varphi(k)+1})$ tend vers 0. Ainsi, en passant à la limite (v étant continue), on obtient $v(a) = a$.

② Pour $u \in G$, on note $F_u = \{x \in K, u(x) = x\}$ l'ensemble des points fixes de u. C'est un fermé de K. On cherche à montrer que

$$\bigcap_{u \in G} F_u \neq \varnothing.$$

Or, comme K est compact, il suffit de montrer que pour tous $u_1, \ldots, u_p \in G$,

$$\bigcap_{i=1}^{p} F_{u_i} \neq \varnothing.$$

Posons $v = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} u_i$. Si $x \in K$, $u_i(x) \in K$ et comme K est convexe, $v(x) \in K$. D'après le point ①, il existe $a \in K$ tel que $v(a) = a$. Nous allons montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, $u_i(a) = a$.

Soit $\|\cdot\|$ une norme euclidienne sur E. Pour $x \in E$, on note $N(x) = \max_{u \in G} \|u(x)\|$. Remarquons que G étant compact, et pour tout x, l'application $u \mapsto \|u(x)\|$ étant continue, ce $\max$ existe bien. L'application N ainsi définie est une norme sur E. Nous allons chercher les cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire. Soient $x, y \in E$ et soit u_0 tel que $N(x+y) = \|u_0(x+y)\|$. On a alors

$$N(x+y) = \|u_0(x+y)\| \leqslant \|u_0(x)\| + \|u_0(y)\| \leqslant N(x) + N(y).$$

La norme $\|\cdot\|$ étant euclidienne, la première inégalité est une égalité si et seulement si $\exists \lambda, \mu > 0$ tels que $\lambda u_0(x) = \mu u_0(y)$, ce qui est encore équivalent à $\exists \lambda, \mu > 0$ tels que $\lambda x = \mu y$ car u_0 est bijective. On en déduit que si $N(x+y) = N(x) + N(y)$, alors x et y sont positivement liés. Remarquons enfin que pour tout $u \in G$ et tout $x \in E$, $N(u(x)) = N(x)$.

Revenons à notre problème. Nous avons les relations suivantes :

$$N(a) = N(v(a)) \leqslant \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} N(u_i(a)) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} N(a) = N(a).$$

Nous sommes donc dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire, et par conséquent il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p > 0$ tels que $\lambda_1 u_1(a) = \cdots = \lambda_p u_p(a)$. Mais on a également $N(u_i(a)) = N(a)$ pour tout i, ce qui implique l'égalité des λ_i. Finalement, $u_1(a) = \cdots = u_p(a) = v(a) = a$, ce qui conclut.