Sandrine CARUSO

Points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Référence : Francinou - Gianella - Nicolas, Oraux X-ENS, Algèbre 3

Théorème. *On munit $\mathbb{R}^n$, identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de la norme euclidienne $\|\cdot\|$, et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme d'opérateur associée : $\|M\| = \sup_{\|x\|=1} \|Mx\|$. On note $B = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|M\| \leqslant 1\}$ la boule unité fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'ensemble des points extrémaux de B est $\mathcal{O}(n)$.*

Montrons tout d'abord que les matrices orthogonales sont bien des points extrémaux de B. Soit $\Omega \in \mathcal{O}(n)$. Supposons que Ω s'écrive sous la forme $\Omega = tU + (1-t)V$, où $U, V \in B$ et $t \in]0,1[$. Alors, pour x tel que $\|x\| = 1$,

$$1 = \|x\| = \|\Omega x\| = \|tUx + (1-t)Vx\| \leqslant t\|Ux\| + (1-t)\|Vx\| \leqslant t\|U\| + (1-t)\|V\| \leqslant 1.$$

Les inégalités ci-dessus sont donc toutes des égalités, et comme t et $1-t$ sont non nuls, on en déduit que $\|U\| = \|Ux\| = \|V\| = \|Vx\| = 1$. L'égalité dans l'inégalité triangulaire assure que Ux et Vx sont positivement liés, donc égaux puisque de norme égale. Cela étant vrai pour tout x de norme 1, par linéarité, $U = V = \Omega$. Donc Ω est extrémal.

Inversement, soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $M \notin \mathcal{O}(n)$. On écrit une décomposition polaire de M : $M = \Omega S$ avec $\Omega \in \mathcal{O}(n)$ et $S \in \mathcal{S}_n^+$. Soient $O \in \mathcal{O}(n)$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ telles que $S = ODO^{-1}$, avec $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$. On a $\|S\| = \|D\| = \|M\| \leqslant 1$ donc $\lambda_n \leqslant 1$. Comme de plus, on a supposé $M \notin \mathcal{O}(n)$, on a même $\lambda_1 < 1$. Soit alors $t \in]0,1[$ tel que $\lambda_1 = t \times 1 + (1-t) \times (-1)$ (λ_1 n'est pas un point extrémal de $[-1,1]$). On pose $D_1 = \mathrm{diag}(1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, $D_2 = \mathrm{diag}(-1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, $S_1 = OD_1O^{-1}$ et $S_2 = OD_2O^{-1}$. Par construction,

$$M = t\Omega S_1 + (1-t)\Omega S_2.$$

Les matrices ΩS_1 et ΩS_2 sont distinctes de $M = \Omega S$ car S_1 et S_2 sont distinctes de S (et Ω est inversible). Ce sont bien des éléments de B :

$$\|\Omega S_i\| = \|S_i\| = \|D_i\| \leqslant 1$$

car tous les coefficients de D_i sont dans $[-1,1]$.