Sandrine CARUSO

Sous-groupes finis de $\mathrm{SO}(\mathbb{R}^3)$

Références : Michèle Audin, *Géométrie*, exercice V.54 p 173,
A. Bouvier et D. Richard, *Groupes*, thème 5.3.

[document non terminé]

Théorème 1. *Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{SO}(\mathbb{R}^3)$. Alors G est soit un groupe cyclique, soit un groupe diédral, soit le groupe des rotations laissant invariant un polyèdre régulier.*

Notons n l'ordre de G, et supposons que $n > 1$ (si $n = 1$, G est réduit à l'identité et est bien un groupe cyclique). Soit $\mathbb{S}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. On pose

$$\Gamma = \{(g, x) \in G\backslash\{id\} \times S, g(x) = x\} \text{ et } X = \{x \in S, \exists g \in G\backslash\{id\}, g(x) = x\}.$$

Soit $x \in X$, et soit $g_0 \in G\backslash\{id\}$ tel que $g_0(x) = x$. Soit $h \in G$. Montons que $h(x) \in x$. On pose $f = hg_0h^{-1} \in G$; alors $f \neq id$ car $g_0 \neq id$. De plus, $f(h(x)) = hg_0h^{-1}h(x) = h(g_0(x)) = h(x)$ et donc on a bien $h(x) \in X$. Par conséquent, le groupe G agit sur X par l'action naturelle $g \cdot x = g(x)$.

On note k le nombre d'orbites par cette action et $P_1, \ldots, P_k$ les orbites. Pour $x \in P_i$, on note e_i l'ordre du stabilisateur de x ; on a $\mathrm{Card}(P_i) \times e_i = \mathrm{Card}(G) = n$. Nous allons calculer de deux manières différentes le cardinal de Γ.

- Si l'on fixe $g \in G\backslash\{id\}$, combien y a-t-il de $x \in \mathbb{S}$ tel que $(g, x) \in \Gamma$? Il s'agit de déterminer combien g a de points fixes sur $\mathbb{S}$. Or, une rotation de $\mathbb{R}^3$ différente de l'identité a exactement une droite de valeur propre 1 ; cette droite intersecte la sphère $\mathbb{S}$ en exactement deux points diamétralement opposés, et donc g a deux points fixes sur $\mathbb{S}$. Par conséquent, $\mathrm{Card}\,\Gamma = 2 \times \mathrm{Card}(G\backslash\{id\}) = 2(n-1)$.
- D'autre part, si l'on fixe $x \in P_i$, il y a, par définition, e_i rotations de G qui laissent x invariant, dont l'identité. Il y a donc $e_i - 1$ éléments de $G\backslash\{id\}$ laissant invariant x. Ainsi, comme les P_i forment une partition de X, $\mathrm{Card}\,\Gamma = \sum_{i=1}^k \mathrm{Card}(P_i) \times (e_i - 1) = n \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{e_i}\right)$.

Par conséquent, on a l'égalité suivante :

$$2(n-1) = n \sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{e_i}\right). \tag{1}$$

Lemme 2. *Sans perte de généralité, on peut supposer que $e_1 \leqslant e_2 \leqslant \cdots \leqslant e_k$. On est alors dans l'un des cas suivants :*

(i) $k = 2$ *et* $e_1 = e_2 = n$,

(ii) $k = 3$ *et il existe un entier* p *tel que* $(n, e_1, e_2, e_3) = (2p, 2, 2, p)$,

(iii) $k = 3$ *et* $(n, e_1, e_2, e_3) = (12, 2, 3, 3)$,

(iv) $k = 3$ *et* $(n, e_1, e_2, e_3) = (24, 2, 3, 4)$,

(v) $k = 3$ *et* $(n, e_1, e_2, e_3) = (60, 2, 3, 5)$.

Démonstration. Commençons par montrer que $k = 2$ ou 3. Remarquons que pour tout i, $2 \leqslant e_i \leqslant n$; en effet, si $x \in X$, il existe $g \in G \backslash \{id\}$ tel que $g(x) = x$ et du fait que $\{id, g\} \subset \mathrm{Stab}(x) \subset G$, on déduit que $2 \leqslant e_i \leqslant n$.

En particulier, $1 - \frac{1}{e_i} \geqslant 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et d'après (1), $2(n-1) \geqslant n\frac{k}{2}$, ce qui donne $k \leqslant 4 - \frac{4}{n} < 4$.

En outre, k ne peut pas être égal à 1. Si c'était le cas, on aurait $2(n-1) = n(1 - \frac{1}{e_1})$ soit $n - 2 = -\frac{n}{e_1}$, ce qui n'est pas possible puisque $n - 2$ est positif (car on a supposé $n > 1$) alors que $-\frac{n}{e_1}$ est strictement négatif. Ainsi, k est égal à 2 ou 3.

Plaçons-nous dans le cas où $k = 2$. L'égalité (1) s'écrit alors $2(n-1) = n(1 - \frac{1}{e_1} + 1 - \frac{1}{e_2}) = 2n - n(\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2})$. On obtient donc $\frac{2}{n} = \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2}$, ce qui, comme $e_1, e_2 \leqslant n$, implique $e_1 = e_2 = n$. On obtient le cas (i) du lemme.

Supposons à présent que $k = 3$. Alors (1) s'écrit, toutes simplifications faites,

$$1 + \frac{2}{n} = \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3}. \tag{2}$$

Cette égalité entraîne que $e_1 = 2$. En effet, comme $e_3 \geqslant e_2 \geqslant e_1$, $\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3} \leqslant \frac{3}{e_1}$; en utilisant l'inégalité $1 + \frac{2}{n} > 1$, on obtient $e_1 < 3$, et comme on a aussi $e_1 \geqslant 2$, on a bien $e_1 = 2$. L'égalité (2) se réécrit alors

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{n} = \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_3}. \tag{3}$$

En utilisant des considérations similaires au cas précédent, on montre que $e_2 \leqslant 3$, et ainsi $e_2 = 2$ ou 3.

Si $e_2 = 2$, alors $\frac{2}{n} = \frac{1}{e_3}$, soit $e_3 = \frac{n}{2}$. Comme e_3 est entier, n est nécessairement pair, et en écrivant $n = 2p$ on constate que l'on est dans le cas (ii) du lemme.

Si $e_2 = 3$, alors $\frac{1}{6} + \frac{2}{n} = \frac{1}{e_3}$, et on montre comme précédemment que $e_3 \geqslant 5$. Les cas $e_3 = 3$, $e_3 = 4$ et $e_3 = 5$ donnent alors respectivement les cas (iii), (iv) et (v) du lemme. $\square$

Avant d'étudier chacun des cas du lemme précédent, montons que pour tout $x \in X$, $\mathrm{Stab}(x)$ est un groupe cyclique. En effet, les éléments de $\mathrm{Stab}(x)$ sont des rotations d'axe $\mathbb{R}x$. Ils induisent donc une rotation sur $(\mathbb{R}x)^\perp$, et ainsi, $\mathrm{Stab}(x)$ est isomorphe à un sous-groupe (fini) de $\mathrm{SO}(\mathbb{R}^2)$. Or, les sous-groupes finis de $\mathrm{SO}(\mathbb{R}^2)$ sont cycliques.

Étude du cas (i). Dans ce cas, $e_1 = e_2 = n$ donc pour tout $x \in X$, $\mathrm{Stab}(x) = G$. D'après la remarque précédente, G est cyclique.

Étude du cas (ii). On a $n = 2p$, $e_1 = e_2 = 2$ et $e_3 = p$. Notons x_3 un élément de P_3. Le groupe $\mathrm{Stab}(x_3)$ est cyclique d'ordre p.