Sandrine CARUSO

Suites pseudo-linéaires

Proposition 1. *Soit (u_n) une suite réelle telle que*

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall m, n \in \mathbb{N}, |u_{m+n} - u_n - u_m| \leqslant C. \tag{1}$$

Alors la suite $(\frac{u_n}{n})$ converge.

Démonstration. On va montrer que la suite $(\frac{u_n}{n})$ est de Cauchy. Commençons par remarquer que, par une récurrence immédiate, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k$, $|u_{n_1+\cdots+n_k} - (u_{n_1} + \cdots + u_{n_k})| \leqslant (k-1)C$. En particulier, pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, $|u_{kn} - ku_n| \leqslant (k-1)C$. Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} \left|\frac{u_n}{n} - \frac{u_m}{m}\right| &\leqslant \left|\frac{u_n}{n} - \frac{u_{nm}}{nm}\right| + \left|\frac{u_{nm}}{nm} - \frac{u_m}{m}\right| = \frac{1}{nm}\left(|u_{nm} - mu_n| + |u_{nm} - nu_m|\right) \\ &\leqslant \frac{1}{nm}\left((m-1)C + (n-1)C\right) \leqslant \frac{C}{n} + \frac{C}{m}. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, et soit $N \geqslant \frac{2C}{\varepsilon}$. Alors pour tous $m, n \geqslant N$, on a

$$\left|\frac{u_n}{n} - \frac{u_m}{m}\right| \leqslant \frac{C}{n} + \frac{C}{m} \leqslant \varepsilon.$$

La suite $(\frac{u_n}{n})$ est de Cauchy, et donc converge car $\mathbb{R}$ est complet. □

Application : une construction de $\mathbb{R}$.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites vérifiant la condition (1). On munit $\mathcal{S}$ de la relation d'équivalence $\approx$ définie par $(u_n) \approx (v_n) \iff (u_n - v_n)$ est bornée, et on note $\mathcal{R}$ l'ensemble quotient. D'après la proposition 1, la fonction $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}, (u_n) \mapsto \lim \frac{u_n}{n}$ est bien définie. De plus, si $u \approx v$, $f(u) = f(v)$ donc f se factorise en une application

$$\hat{f} : \mathcal{R} \mapsto \mathbb{R}.$$

Nous allons montrer que cette application est une bijection. Mais tout d'abord, établissons le lemme suivant :

Lemme. *Soit $u \in \mathcal{S}$. Alors il existe $v \in \mathcal{S} \cap \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ telle que $u \approx v$.*

Démonstration. Il suffit de constater que si $(u_n) \in \mathcal{S}$ la suite $(E(u_n))$ est également une suite de $\mathcal{S}$ et la différence est bornée par 1. □

Notons $\mathcal{S}_{\mathbb{Z}} = \mathcal{S} \cap \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. La constante C dans la condition (1) peut être choisie entière, et par conséquent, l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$ peut être défini sans avoir construit l'ensemble des réels $\mathbb{R}$. De plus, d'après le lemme, $\mathcal{R}$ est également le quotient de $\mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$ par la relation $\approx$ restreinte à $\mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$. Une fois que l'on aura établi le théorème qui suit et qui a été annoncé, $\mathcal{R}$ nous fournira donc une construction possible de l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.

Théorème. *L'application $\hat{f} : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ est une bijection.*

Démonstration. Commençons par la surjectivité. Il suffit de montrer que f est surjective. Si $\ell \in \mathbb{R}$, la suite (ℓn) est bien une suite de $\mathcal{S}$ et $\lim \frac{\ell n}{n} = \ell$.

Pour établir l'injectivité, il suffit de montrer que si $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ (éléments de $\mathcal{S}$) vérifient $f(u) = f(v)$, alors $u - v$ est dans $\mathcal{S}$ et est bornée. Notons $d_n = u_n - v_n$. Le fait que (d_n) est dans $\mathcal{S}$ est immédiat. De plus, $\lim \frac{d_n}{n} = 0$. Soit C telle que pour tous m, n, $|d_{m+n} - d_m - d_n| \leqslant C$. On va montrer que $|d_n| \leqslant C$. Supposons par l'absurde qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|d_{n_0}| > C$ (nécessairement, $n_0 \neq 0$). Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$|d_{kn_0} - kd_{n_0}| \leqslant (k-1)C$$

et donc $k|d_{n_0}| - |d_{kn_0}| \leqslant (k-1)C$ par l'inégalité triangulaire. Ainsi

$$\frac{|d_{kn_0}|}{kn_0} \geqslant \frac{|d_{kn_0}| - C}{n_0} + \frac{C}{kn_0}.$$

La suite extraite $(\frac{d_{kn_0}}{kn_0})_k$ de $(\frac{d_n}{n})_n$ reste supérieure en valeur absolue à un nombre strictement positif $\frac{|d_{kn_0}|-C}{n_0}$, donc ne peut tendre vers 0, ce qui constitue notre contradiction. $\square$

Nous allons maintenant voir comment les opérations algébriques sur $\mathbb{R}$ se transportent sur $\mathcal{R}$ (ou en pratique, sur des représentants choisis dans $\mathcal{S}$).

Proposition 2. *Soient $\ell_1, \ell_1 \in \mathbb{R}$, u, v des suites représentant respectivement ℓ_1 et ℓ_2 dans $\mathcal{S}$. Alors $\ell_1 + \ell_2$ est représenté par $u + v$.*

Démonstration. On a bien $u + v \in \mathcal{S}$, et $f(u + v) = f(u) + f(v)$. ($\mathcal{S}$ est un $\mathbb{R}$-ev et f est une forme linéaire.) $\square$

Proposition 3. *Soit $\ell_1 \geqslant 0$, et $\ell_2 \in \mathbb{R}$. Soit $(u_n) \in \mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$ à valeurs positives représentant ℓ_1 (il en existe, d'après le lemme, et quitte à remplacer les termes strictement négatifs par 0 ; la limite reste ℓ_1 qui est positif), et soit $(v_n) \in \mathcal{S}$ représentant ℓ_2. Alors $\ell_1\ell_2$ est représenté par (v_{u_n}).*

Démonstration. Supposons d'abord que $\ell_1 > 0$. Comme $(\frac{u_n}{n})$ tend vers ℓ_1, (u_n) tend vers l'infini. Par conséquent, $(\frac{v_{u_n}}{u_n})$ tend vers ℓ_2. Ainsi,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_{u_n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{v_{u_n}}{u_n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{n} = \ell_2\ell_1.$$

Maintenant, si $\ell = 0$, par injectivité de $\hat{f}$, la suite (u_n) est équivalente à la suite nulle, et donc bornée. Ainsi, (u_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs, et c'est donc également le cas de (v_{u_n}). En particulier (v_{u_n}) est bornée, et donc $\lim \frac{v_{u_n}}{n} = 0 = \ell_1 \ell_2$. $\square$

Si l'on cherche à « calculer » le produit de deux nombres positifs *via* les suites de $\mathcal{S}$, on peut utiliser le fait que $(-\ell_1)(-\ell_2) = \ell_1 \ell_2$.