Sandrine CARUSO

Suites récurrentes $z_{n+1} = z_n^2 + c$

Référence : Richard A. Holmgren, A first course in discrete dynamical systems, exercice 15.3 page 200

Remarque à propos de ce développement : il est peut-être plus judicieux de démontrer les propositions 1 et 2 comme développement, puis de voir comme application le théorème 2 (en introduisant seulement alors les définitions et le théorème qui précèdent).

Définition 1. Soit $c \in \mathbb{C}$. On appelle *ensemble de Julia rempli de paramètre* c l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que la suite (z_n) définie par $z_0 = z$ et $z_{n+1} = z_n^2 + c$ est bornée. L'*ensemble de Julia de paramètre* c est défini comme la frontière de l'ensemble de Julia rempli de paramètre c.

On admet le théorème suivant :

Théorème 1. *Si l'ensemble de Julia rempli de paramètre c est d'intérieur non vide, alors il contient 0.*

Définition 2. On appelle *ensemble de Mandelbrot* l'ensemble des $c \in \mathbb{C}$ tels que 0 appartient à l'ensemble de Julia de paramètre c.

Théorème 2. *L'ensemble de Mandelbrot contient l'ensemble $\mathcal{C} = \{re^{i\theta} - r^2 e^{2i\theta}, 0 \leqslant r < \frac{1}{2}, \theta \in \mathbb{R}\}$ (c'est-à-dire « l'intérieur » de la cardioïde d'équation $\rho(\theta) = \frac{1}{2}e^{i\theta} - \frac{1}{4}e^{2i\theta}$), et le disque $\mathcal{D}$ de centre -1 et de rayon $\frac{1}{4}$.*

Plus précisément, on montre les deux propositions suivantes :

Proposition 1. *$\mathcal{C}$ est l'ensemble des $c \in \mathbb{C}$ tels que $q_c : z \mapsto z^2 + c$ admet un point fixe attractif.*

Proposition 2. *$\mathcal{D}$ est l'ensemble des $c \in \mathbb{C}$ tels que $q_c \circ q_c$ admet un point fixe attractif n'étant pas point fixe de q_c.*

Ces deux propositions entraînent le théorème 2 grâce au théorème 1 et au fait que si une itérée d'une fonction admet un point fixe attractif, alors au voisinage de ce point, la suite récurrente associée à la fonction converge (donc est bornée).

Démonstration de la proposition 1. Soit $c \in \mathbb{C}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$. Par définition, z_0 est un point fixe attractif de q_c si et seulement si $q_c(z_0) = z_0$ et $|q_c'(z_0)| < 1$. Notons $z_0 = re^{i\theta}$. Alors $q_c(z_0) = z_0$ si et seulement si $c = z_0 - z_0^2 = re^{i\theta} - r^2 e^{2i\theta}$. On a $q_c'(z) = 2z$ et par conséquent, $|q_c'(z_0)| < 1$ si et seulement si $r < \frac{1}{2}$. Ainsi, q_c admet un point fixe attractif si et seulement si $c \in \mathcal{C}$. $\square$

Démonstration de la proposition 2. Soient $c, z_0 \in \mathbb{C}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $q_c \circ q_c(z) = (z^2+c)^2+c = z^4+2cz^2+c^2+c$ et $(q_c \circ q_c)'(z) = 4z^3+4cz$. Comme précédemment, z_0 est un point fixe attractif de $q_c \circ q_c$ si et seulement si $q_c \circ q_c(z_0) = z_0$ et $|(q_c \circ q_c)'(z_0)| < 1$. Si de plus, z_0 n'est pas point fixe de q_c, il n'est pas racine de $z^2 - z + c$. La division euclidienne de $z^4 + 2cz^2 - z + c^2 + c$ par $z^2 - z + c$ donne $z^4 + 2cz^2 + c^2 + c = (z^2 + z + c + 1)(z^2 - z + c)$. Les points fixes de $q_c \circ q_c$ qui ne sont pas point fixe de q_c sont donc les racines de $z^2 + z + c + 1$.

Par ailleurs, le reste de la division euclidienne de $4z^3 + 4cz$ par $z^2 + z + c + 1$ est $4(c+1)$, et un point fixe z_0 tel que ci-dessus est attractif si et seulement si $|4z^3+4cz| < 1$ donc si et seulement si $4|c + 1| < 1$ puisqu'il annule $z^2 + z + c + 1$. Ainsi, si $q_c \circ q_c$ admet un point fixe attractif n'étant pas point fixe de q_c, alors $c \in \mathcal{D}$. Inversement, si $c \in \mathcal{D}$, une racine de $z^2 + z + c + 1$ vérifie bien les conditions demandées. $\square$