

# DES REVÊTEMENTS DE LA SPHÈRE AUX HIÉRARCHIES INTÉGRABLES

Sandrine Henri

Stage de première année de magistère  
2006-2007

Sous la direction de  
Dimitri Zvonkine

# Table des matières

<b>I Représentations du groupe symétrique</b>	<b>3</b>
<b>1 Représentations, caractères</b>	<b>3</b>
1.1 Définitions . . . . .	3
1.2 Propriétés des représentations des groupes finis . . . . .	3
1.3 Caractère . . . . .	4
<b>2 Groupes symétriques, diagrammes de Young</b>	<b>5</b>
<b>3 Restrictions, représentations induites</b>	<b>7</b>
<b>II Correspondance bosons-fermions et hiérarchie de Kadomtsev–Petviashvili</b>	<b>9</b>
<b>4 Correspondance bosons-fermions</b>	<b>9</b>
4.1 Bosons . . . . .	9
4.2 Fermions . . . . .	10
4.3 Opérateurs . . . . .	11
4.3.1 Opérateurs sur $\Lambda$ . . . . .	11
4.3.2 Correspondance . . . . .	12
4.3.3 Opérateur cut-and-join . . . . .	13
<b>5 Hiérarchie de Kadomtsev–Petviashvili (KP)</b>	<b>15</b>
<b>III La série de Hurwitz</b>	<b>17</b>
<b>6 Revêtements</b>	<b>17</b>
<b>7 Nombres de Hurwitz et série de Hurwitz</b>	<b>18</b>
<b>IV Théorème</b>	<b>21</b>

## Première partie

# Représentations du groupe symétrique

## 1 Représentations, caractères

### 1.1 Définitions

**Définition 1** (Représentation de groupe). Soit  $G$  un groupe. On appelle *représentation* de  $G$  un couple  $(V, r)$  où  $V$  est un espace vectoriel et  $r : G \rightarrow GL(V)$  un morphisme de groupes. On notera  $g \cdot x$  l'action de  $g \in G$  sur  $x \in V$ .

Par abus de langage, on ne fera pas toujours la distinction entre une représentation  $(V, r)$  et l'espace  $V$  qui la porte.

Un sous-espace de  $V$  stable par  $G$  s'appelle une *sous-représentation* de  $V$ .

Si  $(V_1, r_1)$  et  $(V_2, r_2)$  sont deux représentations de  $G$ , on définit leur *somme directe*  $(V_1 \oplus V_2, r_1 \oplus r_2)$  de la manière suivante : si  $x = x_1 + x_2 \in V$  avec  $x_1 \in V_1$  et  $x_2 \in V_2$ , alors  $r_1 \oplus r_2(x) = r_1(x_1) + r_2(x_2)$ .

Si  $V$  ne peut pas être représentée comme somme directe d'une façon non triviale, on dit que  $V$  est *indécomposable*.

**Définition 2** (Représentation irréductible). On dit qu'une représentation de  $G$  est *irréductible* si elle n'admet aucune sous-représentation non triviale.

*Remarque.* Toute représentation irréductible est indécomposable.

### 1.2 Propriétés des représentations des groupes finis

On s'intéresse désormais à des groupes finis et à des  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels de dimension finie.

**Théorème 3.** Si  $G$  est un groupe fini,  $V$  une représentation de dimension finie de  $G$ , tout sous-espace vectoriel de  $V$  stable par l'action de  $G$  possède un supplémentaire également stable par l'action de  $G$ . Autrement dit, toute représentation indécomposable est irréductible.

*Démonstration.* (On notera  $g \cdot x$  l'action de  $g$  sur  $x$  par la représentation de groupe.) Soit  $\langle , \rangle$  un produit scalaire sur  $V$ . On définit un deuxième produit scalaire par :

$$(x, y) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle g \cdot x, g \cdot y \rangle.$$

Alors  $(, )$  est conservé par l'action de  $G$ , c'est-à-dire que  $\forall g \in G, (x, y) = (g \cdot x, g \cdot y)$ . En effet,

$$(g \cdot x, g \cdot y) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \langle hg \cdot x, hg \cdot y \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} \langle k \cdot x, k \cdot y \rangle = (x, y).$$

Si  $W$  est un sous-espace vectoriel de  $V$  conservé par  $r$ , soit  $W^\perp$  l'orthogonal de  $W$  dans  $V$  pour  $(, )$ . On montre facilement, par conservation du produit scalaire par l'action de  $G$ , que  $W^\perp$  est conservé par l'action de  $G$ .  $\square$

Une conséquence immédiate de ce théorème est le résultat suivant :

**Corollaire 3.1.** Toute représentation est somme de représentations irréductibles.

**Théorème 4** (Lemme de Schur). Soient  $V_1$  et  $V_2$  deux représentations irréductibles d'un groupe  $G$ , et soit  $\varphi$  une application linéaire de  $V_1$  dans  $V_2$  telle que  $\forall g \in G, \forall x \in V_1, \varphi(g \cdot x) = g \cdot \varphi(x)$ . Alors

- si  $V_1$  n'est pas isomorphe à  $V_2$ ,  $\varphi = 0$ ,
- si  $V_1 = V_2 = V$ ,  $\exists \lambda \in \mathbb{C}, \varphi = \lambda id$ .

*Démonstration.* Montrons tout d'abord que  $\text{Ker}(\varphi)$  et  $\text{Im}(\varphi)$  sont des sous-représentations de  $V_1$  et  $V_2$  respectivement.

Si  $\varphi(x) = 0$ , alors  $\forall g \in G, \varphi(gx) = g \cdot \varphi(x) = 0$ ;  $\text{Ker}(\varphi)$  est conservé par l'action de  $G$ , donc est une sous-représentation de  $V_1$ . Si  $y = \varphi(x)$ ,  $g \cdot y = g \cdot \varphi(x) = \varphi(g \cdot x) \in \text{Im}(\varphi)$ , donc  $\text{Im}(\varphi)$  est une sous-représentation de  $V_2$ .

Comme on a supposé  $V_1$  irréductible,  $\text{Ker}(\varphi)$  est égal à  $\{0\}$  ou à  $V_1$ . Dans le deuxième cas, on a  $\varphi = 0$ , et dans le premier cas,  $\text{Im}(\varphi)$  est isomorphe à  $V_1$ ; comme  $V_2$  est irréductible, que  $\text{Im}(\varphi)$  n'est pas réduit à  $0$  et est une sous-représentation,  $\text{Im}(\varphi) = V_2$  et donc  $V_2$  est isomorphe à  $V_1$ . Ceci démontre le premier point de la proposition.

Si  $V = V_1 = V_2$ , comme  $V$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel,  $\varphi$  admet un sous-espace propre  $W$  dans  $V$ , associé à la valeur propre  $\lambda$ . Montrons que  $W$  est stable par l'action de  $G$ . Soit  $x \in W$ . On a  $\varphi(x) = \lambda x$ , d'où  $\varphi(g \cdot x) = g \cdot \varphi(x) = g \cdot \lambda x = \lambda g \cdot x$  (cette dernière égalité résultant du fait que l'action est linéaire). Ainsi,  $g \cdot x \in W$  comme voulu. Comme  $V$  est irréductible et  $W \neq \{0\}$ , on a  $V = W$ , et donc  $\varphi = \lambda id$ .  $\square$

### 1.3 Caractère

**Définition 5** (Caractère). Si  $V$  est une représentation d'un groupe  $G$ , on appelle *caractère* de  $V$  l'application  $\chi_V$  définie par :

$$\begin{aligned} \chi_V &: G \rightarrow \mathbb{C} \\ g &\mapsto \text{tr}(g) \end{aligned}$$

en identifiant  $g \in G$  à la matrice associée à  $g$  dans  $V$ .

On peut remarquer que  $\chi_V(g)$  ne dépend que de la classe de conjugaison de  $g$ . En effet, par propriété de la trace,  $\chi_V(hgh^{-1}) = \chi_V(g)$ .

En outre, si  $V_1$  et  $V_2$  sont deux représentations de  $G$ , on a  $\chi_{V_1 \oplus V_2} = \chi_{V_1} + \chi_{V_2}$ , car la matrice de  $g$  dans  $V_1 \oplus V_2$  est composée de deux blocs qui sont les matrices de  $g$  dans  $V_1$  et dans  $V_2$ .

Si  $\phi, \psi$  sont deux applications de  $G$  dans  $\mathbb{C}$ , on définit le produit scalaire

$$(\phi, \psi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g) \overline{\psi(g)}.$$

**Théorème 6.** La famille  $(\chi_V)$ , où  $V$  parcourt l'ensemble des classes d'isomorphismes des représentations irréductibles de  $G$ , forme une base orthonormée de l'espace des fonctions  $G \rightarrow \mathbb{C}$  constantes sur chaque classe de conjugaison.

Nous ne démontrerons pas ce théorème ici.

On peut associer à un groupe sa table des caractères, qui est un tableau dans lequel on note la valeur du caractère pour chaque classe de conjugaison de  $G$  et pour chaque représentation irréductible. Voici par exemple la table des caractères de  $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$  et  $\mathfrak{S}_4$  :

$\mathfrak{S}_1$	identité
$id$	1

$\mathfrak{S}_2$	identité	transposition
$id$	1	1
$\varepsilon$	1	-1

$\mathfrak{S}_3$	identité	transpositions	trois-cycles
$id$	1	1	1
$\Delta$	2	0	-1
$\varepsilon$	1	-1	1

$\mathfrak{S}_4$	identité	transpositions	doubles transp.	trois-cycles	quatre-cycles
$id$	1	1	1	1	1
$\Delta$	2	0	2	-1	0
$\diamond$	3	1	-1	0	-1
$\diamond \otimes \varepsilon$	3	-1	-1	0	1
$\varepsilon$	1	-1	1	1	-1

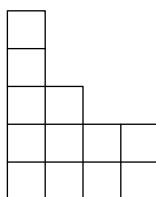
Dans ces tables,  $id$  est la représentation triviale,  $\varepsilon$  la représentation de dimension 1 qui correspond au morphisme signature ;  $\Delta$  (resp.  $\diamond$ ) est la représentation de dimension 2 (resp. 3) obtenue en prolongeant à  $\mathbb{C}^2$  (resp.  $\mathbb{C}^3$ ) l'action de  $\mathfrak{S}_3$  (resp.  $\mathfrak{S}_4$ ) sur les sommets numérotés d'un triangle équilatéral (resp. d'un tétraèdre régulier) centré en l'origine. Enfin,  $\diamond \otimes \varepsilon(g)(x) = \varepsilon(g) \cdot \diamond(g)(x)$ .

On verra par la suite des méthodes pour remplir ces tables dans le cas des groupes symétriques  $\mathfrak{S}_n$ . De manière générale, la première colonne, qui correspond au neutre du groupe, donne la dimension des représentations irréductibles ( $\chi_V(e) = \dim(V)$ ). En effet, la matrice de  $e$  dans la représentation  $V$  est la matrice identité, dont la trace est bien  $\dim(V)$ .

**Corollaire 6.1.** *Le nombre de représentations irréductibles d'un groupe  $G$  est égal au nombre de classes de conjugaisons de ce groupe. (En particulier, les tables des caractères sont carrées.)*

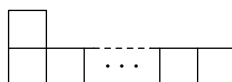
## 2 Groupes symétriques, diagrammes de Young

**Définition 7** (diagramme de Young). On appelle *diagramme de Young* une suite décroissante d'entiers presque nulle. Si  $(\lambda_i)_{i \geq 1}$  est un diagramme de Young, on le représente par un tableau dont la  $i$ -ème colonne a  $\lambda_i$  cases. Par exemple, le diagramme de Young  $(5, 3, 2, 2, 0, 0, \dots)$  est représenté par



On dit que  $(\lambda_i)_{i \geq 1}$  est un diagramme de Young à  $n$  cases si  $\sum_{i \geq 1} \lambda_i = n$  (cette somme est en fait finie).

À une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  on associe le diagramme de Young à  $n$  cases dont les longueurs des colonnes sont égales aux longueurs des cycles de  $\sigma$ . Par exemple, à une transposition, on associe le diagramme de Young suivant :



Alors deux permutations de  $\mathfrak{S}_n$  sont dans la même classe de conjugaison si et seulement si elles ont le même diagramme de Young. Il y a donc une bijection entre les classes de conjugaison de  $\mathfrak{S}_n$  et l'ensemble des diagrammes de Young à  $n$  cases. D'après le corollaire 6.1, le nombre de représentations irréductibles de  $\mathfrak{S}_n$  est également égal au nombre de diagrammes de Young à  $n$  cases.

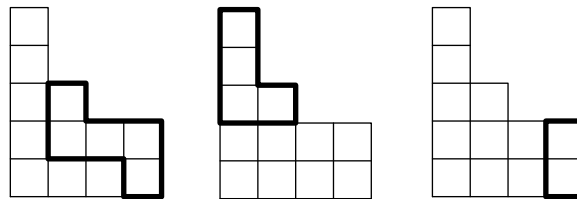
On peut construire une bijection entre les représentations irréductibles de  $\mathfrak{S}_n$  et les diagrammes de Young à  $n$  cases. Nous ne donnons pas la construction ici, nous nous contenterons de donner des propriétés de cette bijection et quelques exemples. Ainsi, la représentation irréductible *identité*, qui est une représentation de dimension 1, est toujours représentée par le diagramme de Young à une colonne de  $n$  cases :  $(n, 0, 0, \dots)$  ou plus simplement  $(n)$ . La représentation *signature*, également de dimension 1, est représentée par le diagramme de Young à une ligne de  $n$  cases :  $(1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots)$  ou plus simplement  $(1, 1, \dots, 1)$ .

On représente désormais les classes de conjugaison et les représentations irréductibles par leurs diagrammes de Young associés, ce qui va nous permettre de remplir les tables de caractère à l'aide d'opérations sur les diagrammes de Young. Tout d'abord, on peut constater que la ligne correspondant à la représentation identité ou  $(n)$  ne contient que des 1. La ligne correspondant à la représentation signature ou  $(1, 1, \dots, 1)$  contient la signature des permutations de la classe de conjugaison. La colonne correspondant à la permutation identité  $(1, 1, \dots, 1)$  contient la dimension de la représentation. (Voir les exemples page 4.) Nous allons présenter une méthode permettant de remplir chaque case de la table.

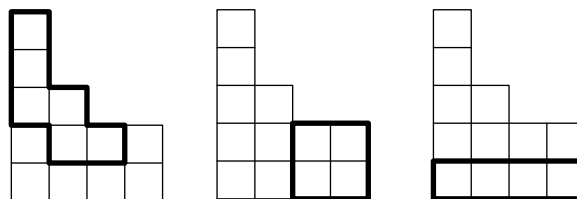
**Définition 8** (ruban). Soit  $\lambda$  un diagramme de Young. Un *ruban* de  $\lambda$  est une suite de cases de  $\lambda$  telle que

- le diagramme obtenu en retirant le ruban de  $\lambda$  soit encore un diagramme de Young,
- on passe de chaque case du ruban à la suivante, soit en se déplaçant d'une case vers le bas, soit en se déplaçant d'une case vers le droite,
- si une case appartient au ruban, toutes les cases situées au dessus y appartiennent aussi.

Exemples :



En revanche, les figures qui suivent ne représentent pas des rubans :

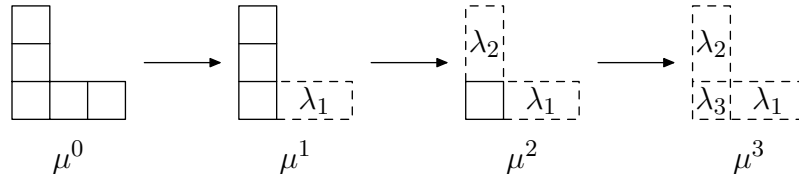


**Définition 9** (coin). Un ruban à 1 case est appelé *coin* du diagramme de Young.

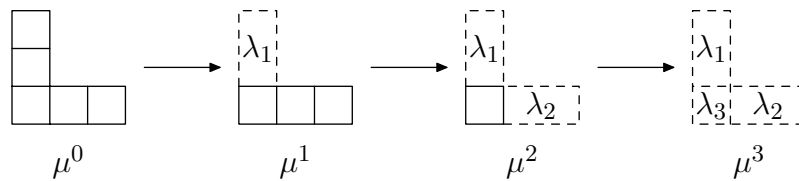
Soit  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  le diagramme de Young associé à une classe de conjugaison de  $\mathfrak{S}_n$ , et  $\mu$  celui associé à une représentation irréductible. On cherche à remplir la case  $(\lambda, \mu)$  de la table des caractères. Pour cela, on cherche toutes les suites possibles  $(\mu^0, \mu^1, \dots, \mu^p)$  de diagrammes de Young, où  $\mu^0 = \mu$  et pour tout  $i$ ,  $\mu^i$  est obtenu à partir de  $\mu^{i-1}$  en retirant un ruban de  $\lambda_i$  cases (on a  $\mu^p = (0)$ ). À chacune de ces suites, on associe  $(-1)^d$  où  $d$  est le nombre de fois où l'on est allé vers la droite pour construire

les rubans. L'élément de la case  $(\lambda, \mu)$  de la table des caractères est le nombre obtenu en additionnant les termes associés à chaque suite. S'il n'existe aucune suite possible, alors l'élément de la table est 0.

Pour plus de clarté, nous présentons deux exemples de cette méthode. Plaçons-nous dans  $\mathfrak{S}_5$ , et considérons la représentation irréductible  $\mu = (3, 1, 1)$  et la classe de conjugaison  $\lambda = (2, 2, 1)$ . Il y a deux manières de construire des suites  $(\mu^0, \mu^1, \mu^2, \mu^3)$  :



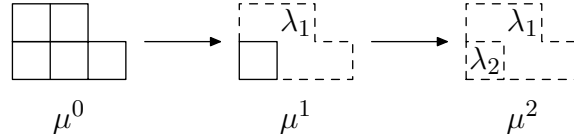
On va une fois vers la droite pour le ruban de longueur  $\lambda_1$ , 0 fois pour celui de taille  $\lambda_2$ , 0 fois pour celui de taille  $\lambda_3$ , donc  $d = 1$  et on associe  $-1$  à cette suite.



On va 0 fois vers la droite pour  $\lambda_1$ , une fois pour  $\lambda_2$ , 0 fois pour  $\lambda_3$  donc  $d = 1$  et on associe  $-1$  à cette suite.

On en déduit que  $\chi_\mu(\lambda) = -2$ .

Toujours dans  $\mathfrak{S}_5$ , considérons maintenant la classe de conjugaison  $\lambda = (4, 1)$  et la représentation  $\mu = (2, 2, 1)$ . Cette fois, il n'y a qu'une seule façon de construire une suite  $(\mu^0, \mu^1, \mu^2)$  :



Pour  $\lambda_1$ , on va deux fois vers la droite, et 0 fois pour  $\lambda_2$ , donc le nombre associé à cette suite est  $(-1)^2 = 1$ . Donc  $\chi_\mu(\lambda) = 1$ .

Soulignons le fait que, dans cette méthode, il n'est pas nécessaire d'enlever les rubans dans l'ordre  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ . Il suffit en fait de se fixer un ordre au départ, et la méthode donnera le même résultat.

### 3 Restrictions, représentations induites

**Définition 10** (restriction). Soit  $(V, r)$  une représentation de  $G$ , et  $H$  un sous-groupe de  $G$ . Alors  $(V, r|_H)$  définit une représentation de  $H$  sur  $V$ , appelée *restriction* de  $(V, r)$ . On la notera  $V|_H$ .

**Définition 11** (produit tensoriel). Soient  $V_1$  et  $V_2$  deux espaces vectoriels (de dimension finie). Soit  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base de  $V_1$  et  $(y_j)_{1 \leq j \leq m}$  une base de  $V_2$ .

- On note formellement  $x_i \otimes y_j$  le *produit tensoriel* de  $x_i$  par  $y_j$ , puis pour  $x \in V_1$  et  $y \in V_2$  quelconques, on définit  $x \otimes y$  par bilinéarité.
- On appelle *produit tensoriel* de  $V_1$  par  $V_2$  l'espace vectoriel  $V_1 \otimes V_2$  de base  $(x_i \otimes y_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ . On a  $\dim(V_1 \otimes V_2) = \dim(V_1) \dim(V_2)$ .

– On définit de même le produit tensoriel de  $p$  vecteurs et de  $p$  espaces vectoriels.

**Définition 12** (représentation induite). Soit  $G$  un groupe et  $H$  un sous-groupe de  $G$ . Soit  $(W, \cdot)$  une représentation de  $H$ . On considère l'ensemble des classes à gauche de  $H$ ,  $\{g_1H, g_2H, \dots, g_kH\}$ , avec  $g_1 = e$ , et  $k = \frac{|G|}{|H|}$ . On pose  $V = W \otimes \mathbb{C}^k$ . Soit  $v = w \otimes e_i$  et  $g \in G$ . Soit  $g_jH$  la classe de  $gg_i : g$  s'écrit de manière unique sous la forme  $g = g_jhg_i^{-1}$  où  $h \in H$ , et on pose  $g \cdot (w \otimes e_i) = (h \cdot w) \otimes e_j$ . Par linéarité, on définit ainsi une représentation de  $G$  sur  $V$ . Elle est appelée *représentation induite* par  $(W, r)$  sur  $G$ . On la notera  $\text{Ind}_G(W)$ , ou  $\text{Ind}(W)$  quand le groupe est clairement sous-entendu.

La restriction et l'induite d'une représentation irréductible ne le sont en général pas.

Soit  $(\cdot, \cdot)$  le produit scalaire défini sur  $\mathbb{C}^G$  dans la section 1.3, page 4.

**Proposition 13.** Soient  $G$  un groupe et  $H$  un sous-groupe de  $G$ . Soient  $V$  une représentation de  $G$  et  $W$  une représentation de  $H$ . Alors  $(\chi_{V|_H}, \chi_W) = (\chi_V, \chi_{\text{Ind}_G(W)})$ .

*Démonstration.* Par définition,

$$\begin{aligned} (\chi_{V|_H}, \chi_W) &= \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \chi_W(h) \overline{\chi_{V|_H}(h)} \\ (\chi_V, \chi_{\text{Ind}_G(W)}) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\text{Ind}_G(W)}(g) \overline{\chi_V(g)}. \end{aligned}$$

On note  $g_1H = H, g_2H, \dots, g_kH$  les classes à gauche de  $H$  dans  $G$  (avec  $k = \frac{|G|}{|H|}$ ). Soit  $g \in G$ . Considérons la matrice de  $g$  dans la représentation  $\text{Ind}(W)$ , dans une base adaptée à la décomposition  $W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ . D'après la définition de  $\text{Ind}(W)$ , cette matrice est composée de  $k \times k$  blocs de taille  $|H| \times |H|$ , tels que le bloc  $(i, j)$  est égal à la matrice de  $g_j^{-1}gg_i$  dans  $W$  si  $g_j^{-1}gg_i \in H$ , 0 sinon. Pour chaque  $i$ , il existe un unique  $j$  tel que  $g_j^{-1}gg_i \in H$ , et donc un unique bloc  $(i, j)$  non nul. Pour le calcul de la trace, seuls les blocs diagonaux interviennent. On en déduit que

$$\chi_{\text{Ind}(W)}(g) = \sum_{i \text{ tq } g \in g_i H g_i^{-1}} \chi_W(g_i^{-1}gg_i).$$

On a  $\chi_V(g) = \chi_V(g_i^{-1}gg_i)$ , ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} \chi_{\text{Ind}(W)}(g) \overline{\chi_V(g)} &= \sum_{g \in G} \sum_{i \text{ tq } g \in g_i H g_i^{-1}} \chi_W(g_i^{-1}gg_i) \overline{\chi_V(g_i^{-1}gg_i)} \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{g \in g_i H g_i^{-1}} \chi_W(g_i^{-1}gg_i) \overline{\chi_V(g_i^{-1}gg_i)} \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{h \in H} \chi_W(h) \overline{\chi_V(h)} \\ &= k \sum_{h \in H} \chi_W(h) \overline{\chi_V(h)}. \end{aligned}$$



De plus,  $\forall h \in H, \chi_V(h) = \chi_{V|_H}(h)$ . Finalement

$$\begin{aligned}
(\chi_V, \chi_{\text{Ind}_G(W)}) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\text{Ind}_G(W)}(g) \overline{\chi_V(g)} \\
&= \frac{k}{|G|} \sum_{h \in H} \chi_W(h) \overline{\chi_{V|_H}(h)} \\
&= \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \chi_W(h) \overline{\chi_{V|_H}(h)} \\
&= (\chi_{V|_H}, \chi_W).
\end{aligned}$$

□

Soit  $n \geq 2$ . On peut voir  $\mathfrak{S}_{n-1}$  comme le sous-groupe de  $\mathfrak{S}_n$  qui laisse le dernier élément invariant. On peut alors appliquer à ces deux groupes les définitions précédentes.

Dans ce cas particulier, on a les deux propositions suivantes :

**Proposition 14.** *Soit  $V$  une représentation irréductible de  $\mathfrak{S}_n$  et  $\lambda$  le diagramme de Young associé. Alors la restriction de  $V$  à  $\mathfrak{S}_{n-1}$  est la somme des représentations irréductibles de  $\mathfrak{S}_{n-1}$  dont les diagrammes de Young sont obtenus à partir de  $\lambda$  en enlevant un coin.*

**Proposition 15.** *Soit  $W$  une représentation irréductible de  $\mathfrak{S}_{n-1}$  et  $\lambda$  le diagramme de Young associé. Alors la représentation induite de  $W$  à  $\mathfrak{S}_n$  est la somme des représentations irréductibles de  $\mathfrak{S}_n$  dont les diagrammes de Young sont obtenus à partir de  $\lambda$  en ajoutant un coin.*

Nous ne démontrerons pas ces propositions ici, mais simplement qu'elles sont équivalentes.

*Démonstration.* La proposition 15 découle de la proposition 14 et de la proposition 13. Rappelons que, d'après le théorème 6, la famille  $(\chi_V, V \text{ repr. irr. de } \mathfrak{S}_n)$  est orthonormée pour  $(,)$ . Ainsi, pour déterminer la décomposition en représentations irréductibles de  $\text{Ind}(W)$ , il suffit de faire le produit scalaire de  $\chi_{\text{Ind}(W)}$  avec les  $\chi_V, V$  représentation irréductible de  $\mathfrak{S}_n$ . Or  $(\chi_{\text{Ind}(W)}, \chi_V) = (\chi_W, \chi_{V|_{\mathfrak{S}_{n-1}}})$ . Comme  $W$  est irréductible, et d'après la proposition 14,  $(\chi_W, \chi_{V|_{\mathfrak{S}_{n-1}}})$  est égal à 1 si  $W$  est obtenu à partir de  $V$  en enlevant un coin, 0 sinon. Donc  $(\chi_{\text{Ind}(W)}, \chi_V)$  est égal à 1 si  $V$  est obtenu à partir de  $W$  en ajoutant un coin, 0 sinon. Ce qui conclut. On montre exactement de la même façon que la proposition 15 implique la proposition 14. □

## Deuxième partie

# Correspondance bosons-fermions et hiérarchie de Kadomtsev–Petviashvili

## 4 Correspondance bosons-fermions

### 4.1 Bosons

On appelle *espace bosonique* l'espace des séries formelles à une infinité de variables  $\mathbb{C}[[p_1, p_2, \dots]]$ .

**Définition 16** (Algèbre d'un groupe). Soit  $G$  un groupe. Soit  $\mathbb{C}G$  l'espace des combinaisons linéaires complexes (finies) formelles des éléments de  $G$ . Le produit sur  $G$  induit un produit sur  $\mathbb{C}G$ , par la relation  $\sum_{g \in G} a_g g \times \sum_{h \in G} b_h h = \sum_{g, h \in G} a_g b_h (gh)$ . Par construction,  $\mathbb{C}G$  est une  $\mathbb{C}$ -algèbre, appelée  *$\mathbb{C}$ -algèbre du groupe  $G$* .

**Définition 17.** On note  $p$  l'application linéaire  $p : \mathbb{C}\mathfrak{S}_N \rightarrow \mathbb{C}[p_1, \dots, p_N]$  définie de la manière suivante : si  $\sigma \in \mathfrak{S}_N$  a ses cycles de longueurs  $k_1, k_2, \dots, k_q$ , alors  $p(\sigma) = p_{k_1} p_{k_2} \cdots p_{k_q}$ . On a donc  $p(\sum a_\sigma \sigma) = \sum a_\sigma p(\sigma)$ .

**Définition 18** (Polynômes homogènes). On dit qu'un polynôme de  $\mathbb{C}[p_1, p_2, \dots]$  est *homogène de degré  $n$* , si c'est une combinaison linéaire des  $p(\sigma)$  pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ . On note  $\mathbb{C}_n[p_1, \dots, p_n]$  l'ensemble des polynômes homogènes de degré  $n$ .

**Définition 19** (Polynômes de Schur). Les *polynômes de Schur* sont indexés par les diagrammes de Young. Si  $\lambda$  est un diagramme de Young à  $n$  cases, qu'on identifie à la représentation de  $\mathfrak{S}_n$  associée, le polynôme de Schur indexé par  $\lambda$  est

$$s_\lambda = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \chi_\lambda(\sigma) p(\sigma).$$

Remarquons que le polynôme  $s_\lambda$  est homogène de degré  $|\lambda|$ .

Les premiers polynômes de Schur sont

$$\begin{aligned} s_0 &= 1, & s_1 &= p_1 & s_2 &= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2), & s_3 &= \frac{1}{6}(p_1^3 + 3p_1 p_2 + 2p_3), \\ s_{1,1} &= \frac{1}{2}(p_1^2 - p_2), & s_{2,1} &= \frac{1}{3}(p_1^3 - p_3), & s_{1,1,1} &= \frac{1}{6}(p_1^3 - 3p_1 p_2 + 2p_3). \end{aligned}$$

Les polynômes de Schur forment une « base » de  $\mathbb{C}[[p_1, p_2, \dots]]$ , dans le sens où toute série formelle de  $\mathbb{C}[[p_1, p_2, \dots]]$  peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire infinie des  $s_\lambda$ .

## 4.2 Fermions

Soit  $V = \mathbb{C}[z^{-1}][[z]]$  l'espace des séries de Laurent formelles à une inconnue.

**Définition 20** (produit extérieur). Soient  $V$  un espace vectoriel et  $x_1, \dots, x_q \in V$ . On appelle *produit extérieur* de  $x_1, x_2, \dots, x_q$  l'élément de  $V \otimes V \otimes \cdots \otimes V$

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_q = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_q} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(q)}.$$

Par exemple, pour  $q = 2$ ,  $x_1 \wedge x_2 = x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1$ .

On constate immédiatement que ce produit est antisymétrique. Plus généralement, on peut définir formellement le produit extérieur semi-infini, noté  $x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots$ , à qui on impose les mêmes propriétés celles que possède que le produit extérieur fini.

**Définition 21** (puissance extérieure semi-infinie). La *puissance extérieure semi-infinie* d'un espace  $V$ , notée  $\bigwedge^{\infty} V$ , est l'espace des combinaisons linéaires infinies de termes de la forme

$$v_\lambda = z^{k_1} \wedge z^{k_2} \wedge z^{k_3} \wedge \cdots$$

où  $k_i = \lambda_i - i$ , et où  $\lambda = (\lambda_i)_{i \geq 1}$  est un diagramme de Young.

On appelle *espace fermionique* l'espace  $\Lambda = \bigwedge^{\frac{\infty}{2}} V$ .

Les deux espaces introduits précédemment ont comme point commun d'avoir une « base »<sup>1</sup> indexée par les diagrammes de Young. On établit une correspondance entre les deux espaces qui transforme  $s_\lambda$  en  $v_\lambda$ .

## 4.3 Opérateurs

### 4.3.1 Opérateurs sur $\Lambda$

Si  $A$  est un opérateur sur  $V$ , on définit l'opérateur  $\widehat{A}$  sur  $\Lambda$  de la manière suivante : si la matrice de  $A$  a tous ses éléments diagonaux nuls, on pose

$$\begin{aligned} \widehat{A}(z^{k_1} \wedge z^{k_2} \wedge \dots) &= A(z^{k_1}) \wedge z^{k_2} \wedge z^{k_3} \wedge \dots \\ &+ z^{k_1} \wedge A(z^{k_2}) \wedge z^{k_3} \wedge \dots \\ &+ z^{k_1} \wedge z^{k_2} \wedge A(z^{k_3}) \wedge \dots \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Lorsque  $A$  est diagonal, c'est-à-dire si pour tout  $k$ , il existe  $a_k$  tel que  $A(z^k) = a_k z^k$ , la somme dans définition précédente peut diverger. Aussi, dans ce cas, l'action de  $\widehat{A}$  doit être régularisée, et on pose

$$\widehat{A}(z^{k_1} \wedge z^{k_2} \wedge \dots) = \left( \sum_{i=1}^{\infty} (a_{k_i} - a_{-i}) \right) z^{k_1} \wedge z^{k_2} \wedge \dots$$

Ceci est une somme finie, car  $k_i = \lambda_i - i = -i$  pour  $i$  assez grand. Pour un opérateur  $A$  quelconque, on l'écrit comme somme de sa partie diagonale et du reste, et on en déduit l'opérateur  $\widehat{A}$  par somme des deux expressions précédentes.

Voici quelques exemples d'opérateurs  $\widehat{A}$ , appliqués à  $v_{3,1} = z^2 \wedge z^{-1} \wedge z^{-3} \wedge z^{-4} \wedge \dots$ .

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad \widehat{1}(v_{3,1}) &= \left( \sum_{i=1}^{\infty} (1 - 1) \right) v_{3,1} = 0 \\ \blacktriangleright \quad z \widehat{\partial/\partial z}(v_{3,1}) &= ((2 + 1) + (-1 + 2)) v_{3,1} = 4v_{3,1} \\ \blacktriangleright \quad \widehat{z}(v_{3,1}) &= z^3 \wedge z^{-1} \wedge z^{-3} \wedge \dots \\ &+ z^2 \wedge z^0 \wedge z^{-3} \wedge \dots \\ &+ z^2 \wedge z^0 \wedge z^{-2} \wedge z^{-4} \wedge \dots \\ &+ 0 + 0 + \dots \\ &= v_{4,1} + v_{3,2} + v_{3,1,1} \\ \blacktriangleright \quad \widehat{\partial/\partial z}(v_{3,1}) &= 2z^1 \wedge z^{-1} \wedge z^{-3} \wedge \dots \\ &- z^1 \wedge z^{-2} \wedge z^{-3} \wedge \dots \\ &= 2v_{2,1} - v_3 \end{aligned}$$

De manière générale,  $\widehat{1}(v_\lambda) = 0$ ,  $z \widehat{\partial/\partial z}(v_\lambda) = |\lambda| v_\lambda$  où  $|\lambda|$  est le nombre de cases de  $\lambda$ , et  $\widehat{z}(v_\lambda) = \sum v_{\lambda'}$  où les  $\lambda'$  sont les diagrammes de Young obtenus à partir de  $\lambda$  en ajoutant une case.

<sup>1</sup>Leurs éléments s'écrivent formellement comme combinaisons linéaires infinies des éléments de la « base »

### 4.3.2 Correspondance

À un opérateur sur  $V$ , on associe, comme ci-dessus, un opérateur sur  $\Lambda$ , auquel on associe un opérateur sur  $\mathbb{C}[[p_1, p_2, \dots]]$  de manière à conserver la correspondance  $v_\lambda \leftrightarrow s_\lambda$ . On obtient la correspondance suivante :

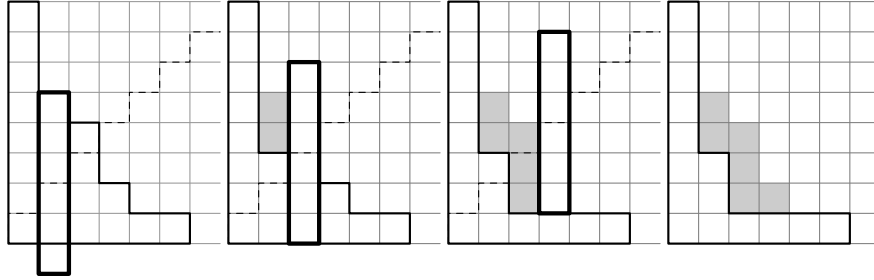
Opérateur sur $V$	Opérateur sur $\mathbb{C}[[p_1, p_2, \dots]]$
$z^m$	$p_m$
$z^{-m}$	$m \frac{\partial}{\partial p_m}$
1	0

Dans ce tableau,  $p_m$  représente l'opérateur de multiplication par  $p_m$ .

Montrons que  $z^{-m} \leftrightarrow m \frac{\partial}{\partial p_m}$ . Il s'agit d'établir que pour  $\lambda$  diagramme de Young, si  $\widehat{z^{-m}}v_\lambda = \sum_\mu \alpha_\mu v_\mu$ , alors  $m \frac{\partial}{\partial p_m} s_\lambda = \sum_\mu \alpha_\mu s_\mu$ , où ces sommes sont prises sur  $\mu$  diagramme de Young. Tout d'abord, montrons que  $\widehat{z^{-m}}(v_\lambda) = \sum_{\lambda'} (-1)^{d_{\lambda'}} v_{\lambda'}$ , où la somme est prise sur  $\lambda'$  dans l'ensemble des diagrammes de Young obtenus en retirant de  $\lambda$  un ruban à  $m$  cases, et  $d_{\lambda'}$  est le nombre de fois où l'on est allé d'une case vers la droite pour parcourir le ruban. Si  $\lambda = (\lambda_i)_{i \geq 1}$ , on a

$$\begin{aligned} \widehat{z^{-m}}(v_\lambda) &= z^{\lambda_1-1-m} \wedge z^{\lambda_2-2} \wedge z^{\lambda_3-3} \wedge \dots \\ &+ z^{\lambda_1-1} \wedge z^{\lambda_2-2-m} \wedge z^{\lambda_3-3} \wedge \dots \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Considérons un terme  $z^{\lambda_1-1} \wedge \dots \wedge z^{\lambda_i-i-m} \wedge z^{\lambda_{i+1}-(i+1)} \wedge \dots$ , dans lequel  $\lambda_i - i - m$  n'est égal à aucun des  $\lambda_k - k$ ,  $k \neq i$  (sinon, ce terme est nul). On va permuter le facteur en  $\lambda_i - i - m$  avec l'un de ses voisins jusqu'à ce qu'il soit bien placé dans l'ordre décroissant. À chaque permutation, on a un changement de signe par anti-symétrie. Pour plus de simplicité, on se contente de montrer sur un exemple que cette suite d'opération fait bien apparaître un ruban à  $m$  cases, et que le nombre de changements de signe est égal au nombre de fois où l'on va vers la droite :



Ces schémas correspondent à la suite de produits extérieurs suivants :

$$\begin{aligned} &z^{8-1} \wedge z^{5-2-6} \wedge z^{4-3} \wedge z^{2-4} \wedge z^{1-5} \wedge z^{1-6} \wedge z^{-7} \wedge \dots \\ &= -z^{8-1} \wedge z^{3-2} \wedge z^{3-3-3} \wedge z^{2-4} \wedge z^{1-5} \wedge z^{1-6} \wedge z^{-7} \wedge \dots \\ &= z^{8-1} \wedge z^{3-2} \wedge z^{1-3} \wedge z^{1-4-0} \wedge z^{1-5} \wedge z^{1-6} \wedge z^{-7} \wedge \dots \\ &= -z^{8-1} \wedge z^{3-2} \wedge z^{1-3} \wedge z^{1-4} \wedge z^{1-5} \wedge z^{1-6} \wedge z^{-7} \wedge \dots \end{aligned}$$

Ci-dessus, les exposants sont écrits sous la forme  $\lambda_i - i$ , et le nombre en gras correspond aux cases du ruban restant à répartir. D'une étape à l'autre, deux termes sont échangés, d'où l'alternance des signes.

Il nous reste donc à établir que  $m \frac{\partial}{\partial p_m}(s_\lambda) = \sum_{\lambda'} (-1)^{d_{\lambda'}} s_{\lambda'}$ . On rappelle que  $s_\lambda = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \chi_\lambda(\sigma) p(\sigma)$  où  $n = |\lambda|$ . Lorsqu'on dérive ce terme par rapport à  $p_m$ , si  $\sigma$  n'admet pas de cycle de longueur  $m$ , alors le terme correspondant est nul d'après la définition de  $p(\sigma)$  (voir 17). Donc seules les permutations ayant un cycle de longueur  $m$  interviennent dans la somme. Pour dénombrer celles-ci, il faut commencer par choisir les  $m$  éléments composant ce cycle, ce qui constitue  $\frac{n!}{(n-m)!m!}$  possibilités. Puis, il faut ordonner ces éléments, ce qui constitue  $m!$  possibilités. Mais on a ainsi compté  $m$  fois le même cycle car on peut choisir n'importe quel élément du cycle pour être le premier. Finalement, il y a  $\frac{n!}{(n-m)!m!} m! \frac{1}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m}$  manières de choisir un cycle de  $m$  éléments pour une permutation de  $n$  éléments. Le reste de la permutation est induit par  $\mathfrak{S}_{n-m}$ . On en déduit  $\frac{\partial}{\partial p_m} s_\lambda = \frac{1}{n!} \frac{n!}{(n-m)!m} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n-m}} \chi_\lambda(\sigma \circ m\text{-cycle}) p(\sigma)$  et donc

$$m \frac{\partial}{\partial p_m} s_\lambda = \frac{1}{(n-m)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n-m}} \chi_\lambda(\sigma \circ m\text{-cycle}) p(\sigma).$$

Il reste à évaluer  $\chi_\lambda(\sigma \circ m\text{-cycle})$ . Pour cela, on fait appel à la méthode exposée page 6. On l'applique partiellement pour relier  $\chi_\lambda(\sigma \circ m\text{-cycle})$  à  $\chi_{\lambda'}(\sigma)$ . Plus précisément, si l'on commence par retirer un ruban de  $m$  cases, qui correspond au  $m$ -cycle, au diagramme de Young  $\lambda$ , on obtient un diagramme  $\lambda'$ , et on se ramène à appliquer la méthode à  $\lambda'$  et  $\sigma$ . On obtient ainsi la relation de récurrence  $\chi_\lambda(\sigma \circ m\text{-cycle}) = \sum_{\lambda'} (-1)^{d_{\lambda'}} \chi_{\lambda'}(\sigma)$ . D'où

$$\begin{aligned} m \frac{\partial}{\partial p_m} s_\lambda &= \frac{1}{(n-m)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n-m}} \sum_{\lambda'} (-1)^{d_{\lambda'}} \chi_{\lambda'}(\sigma) p(\sigma) \\ &= \sum_{\lambda'} (-1)^{d_{\lambda'}} \frac{1}{(n-m)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n-m}} \chi_{\lambda'}(\sigma) p(\sigma) \\ &= \sum_{\lambda'} (-1)^{d_{\lambda'}} s_{\lambda'} \end{aligned}$$

ce qui conclut. La correspondance  $p_m \leftrightarrow z^m$ , quoique un peu plus difficile à établir, s'obtient de manière analogue. On montre qu'elle revient à la somme des diagrammes de Young obtenus en ajoutant un ruban à  $m$  cases au diagramme de départ.

### 4.3.3 Opérateur cut-and-join

**Définition 22** (Opérateur cut-and-join). On appelle *opérateur cut-and-join* l'opérateur sur  $\mathbb{C}[[p_1, p_2, \dots]]$

$$M = \sum_{i,j=1}^{\infty} \left( (i+j)p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_{i+j}} + i j p_{i+j} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} \right).$$

**Proposition 23.** Soit  $M$  l'opérateur cut-and-join,  $\sigma$  une permutation de  $\mathfrak{S}_N$  et  $T$  la somme des transpositions de  $\mathfrak{S}_N$ . Alors

$$Mp(\sigma) = p(T\sigma).$$

*Démonstration.* Tout d'abord, si  $\sigma$  est une permutation et  $\tau$  la transposition qui transforme  $k$  en  $l$ , alors  $\tau\sigma$  est obtenue à partir de  $\sigma$  de la manière suivante : si  $k$  et  $l$  sont dans le même cycle de  $\sigma$ , la permutation  $\tau\sigma$  a les mêmes cycles que  $\sigma$ , sauf celui de  $k$  et  $l$  qui est coupé en deux, mettant  $k$  et  $l$  dans deux cycles différents. Si  $k$  et  $l$  ne sont pas dans le même cycle de  $\sigma$ , alors  $\tau\sigma$  a les mêmes cycles que  $\sigma$ , sauf ceux de  $k$  et  $l$  qui sont réunis en un seul cycle. Donc  $T\sigma$  est la somme des permutations obtenues à partir de  $\sigma$ , soit en coupant un cycle en deux, soit en joignant deux cycles.

Étudions maintenant l'action de  $M$  sur  $p(\sigma)$ . Fixons deux entiers  $i$  et  $j$ . Si  $\sigma$  a  $n$  cycles de longueur  $i$  et  $m$  cycles de longueur  $j$ , alors  $p(\sigma)$  s'écrit  $\alpha p_i^n p_j^m$ , et on a

$$ijp_{i+j} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} p(\sigma) = ijmn(\alpha p_{i+j} p_i^{n-1} p_j^{m-1}).$$

On a  $\alpha p_{i+j} p_i^{n-1} p_j^{m-1} = p(\sigma')$  où  $\sigma'$  a les mêmes cycles que  $\sigma$ , sauf un cycle de longueur  $i$  et un de longueur  $j$  qui sont réunis. Montrons qu'il y a  $nmi$  telles permutations : il s'agit de choisir l'un des  $n$  cycles de longueur  $i$ , puis l'un des  $m$  cycles de longueur  $j$ , et enfin, un élément dans chaque cycle. Donc  $ijp_{i+j} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} p(\sigma)$  est égal à la somme des permutations obtenues à partir de  $\sigma$  en joignant un cycle de longueur  $i$  et un cycle de longueur  $j$ . Maintenant, si  $r$  est le nombre de cycles de longueur  $i+j$  de  $\sigma$ , on écrit  $p(\sigma) = \alpha p_{i+j}^r$ , et on a

$$(i+j)p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_{i+j}} p(\sigma) = r(i+j)p_i p_j p_{i+j}^{r-1}.$$

De même que précédemment, il s'agit de montrer que le nombre de permutations obtenues à partir de  $\sigma$  en coupant un cycle de longueur  $i+j$  en deux cycles de longueurs  $i$  et  $j$  est  $r(i+j)$ . On commence par choisir l'un des  $r$  cycles de longueur  $i+j$ . Puis il suffit de choisir l'un des  $i+j$  éléments du cycle, à partir duquel débutera le cycle de longueur  $i$ , la position du cycle de longueur  $j$  étant alors déterminée. Finalement,  $Mp(\sigma)$  est bien la somme des  $p(\sigma')$  avec  $\sigma'$  obtenu en coupant un cycle de  $\sigma$  en deux, ou bien en joignant deux cycles de  $\sigma$ . Ceci justifie d'ailleurs le nom de « cut-ant-join ».  $\square$

On peut résumer cette proposition sur le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \sum a_i \sigma_i & \xrightarrow{P} & \sum a_i p(\sigma_i) \\ \downarrow T & & \downarrow M \\ \sum b_i \sigma_i & \xrightarrow{P} & \sum b_i p(\sigma_i) \end{array}$$

**Proposition 24.** Les  $s_\lambda$  sont vecteurs propres de  $M$ , associés aux valeurs propres

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \left( \lambda_i - i + \frac{1}{2} \right)^2 - \left( -i + \frac{1}{2} \right)^2 \right].$$

*Démonstration.* Tout d'abord, on peut constater que si  $P$  est un polynôme homogène de degré  $n$ ,  $MP$  est encore un polynôme homogène de degré  $n$ . Ainsi,  $M$  induit un opérateur de  $\mathbb{C}_n[p_1, \dots, p_n]$  dans  $\mathbb{C}_n[p_1, \dots, p_n]$ . L'application linéaire  $p : \gamma \mapsto p(\gamma)$  est surjective, mais non injective. En revanche, si on la restreint au centre  $Z(\mathbb{C}\mathfrak{S}_n)$ , elle reste surjective et devient injective. En effet,  $Z(\mathbb{C}\mathfrak{S}_n)$  est la sous-algèbre de  $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$  engendrée par les  $\sum_{\sigma \in C_\lambda} \sigma$ , où  $C_\lambda$  désigne la classe de conjugaison de diagramme de Young  $\lambda$ . Comme  $p(\sigma)$  ne dépend que de la classe de conjugaison de  $\sigma$ , un élément de  $\mathbb{C}_n[p_1, \dots, p_n]$  peut s'écrire sous la forme  $\sum_{|\lambda|=n} c_\lambda p(\lambda)$ . Alors  $z = \sum_\lambda \frac{c_\lambda}{|C_\lambda|} \sum_{\sigma \in C_\lambda} \sigma$  vérifie  $p(z) = \sum_{|\lambda|=n} c_\lambda p(\lambda)$ . En outre, les  $p(\lambda)$  pour  $\lambda$  diagramme de Young à  $n$  cases forment une base de  $\mathbb{C}_n[p_1, \dots, p_n]$ , donc  $\dim Z(\mathbb{C}\mathfrak{S}_n) = \dim \mathbb{C}_n[p_1, \dots, p_n]$ .

Si  $z \in Z(\mathbb{C}\mathfrak{S}_n)$ , alors  $Tz \in Z(\mathbb{C}\mathfrak{S}_n)$ . Ainsi, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} Z(\mathbb{C}\mathfrak{S}_n) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}_n[p_1, \dots, p_n] \\ \downarrow T & & \downarrow M \\ Z(\mathbb{C}\mathfrak{S}_n) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}_n[p_1, \dots, p_n] \end{array}$$

Si  $z$  est un élément de  $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$  et  $\lambda$  une représentation irréductible de  $\mathfrak{S}_n$ , on peut associer à  $z$  sa matrice dans la représentation. Si, en outre,  $z \in Z(\mathbb{C}\mathfrak{S}_n)$ , alors  $z$  commute avec tous les éléments de  $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ , ce qui signifie que l'action de  $z$  définit une application linéaire sur  $\lambda$  qui respecte l'action de  $\mathfrak{S}_n$ . D'après le lemme de Schur, page 4, la matrice de  $z$  est une homothétie. On note  $f_z(\lambda)$  le facteur de cette homothétie.

Soit  $u_\lambda$  défini par

$$u_\lambda = \frac{\dim \lambda}{n!} \sum_{\sigma} \overline{\chi_\lambda(\sigma)} \sigma.$$

Comme  $\chi_\lambda(\sigma)$  ne dépend que de la classe de conjugaison de  $\sigma$ ,  $u_\lambda \in Z(\mathbb{C}\mathfrak{S}_n)$ . D'après le théorème 6, les  $u_\lambda$  forment une base de  $Z(\mathbb{C}\mathfrak{S}_n)$ . Calculons  $f_{u_\lambda}(\mu)$ . Pour cela, on calcule la trace de la matrice de  $u_\lambda$  dans  $\mu$  :

- si  $\mu \neq \lambda$ ,  $\text{tr}_\mu(u_\lambda) = \frac{\dim \lambda}{n!} \sum_{\sigma} \overline{\chi_\lambda(\sigma)} \chi_\mu(\sigma) = 0$ . En effet, on reconnaît le produit scalaire défini dans la section 1.3, pour lequel la famille  $(\chi_\lambda)$  est orthonormée.
- si  $\mu = \lambda$ ,  $\text{tr}_\lambda(u_\lambda) = \frac{\dim \lambda}{n!} \sum_{\sigma} \overline{\chi_\lambda(\sigma)} \chi_\lambda(\sigma) = \dim \lambda$ , d'où  $f_{u_\lambda}(\lambda) = 1$ .

On en déduit que pour tout  $z \in Z(\mathbb{C}\mathfrak{S}_n)$ ,  $zu_\lambda = f_z(\lambda)u_\lambda$ . En particulier,  $Tu_\lambda = f_T(\lambda)u_\lambda$ . Donc les  $u_\lambda$  sont vecteurs propres pour la multiplication par  $T$ .

Par ailleurs,  $p(u_\lambda) = \frac{\dim \lambda}{n!} \sum_{\sigma} \overline{\chi_\lambda(\sigma)} p(\sigma) = \dim \lambda s_\lambda$  car  $\chi_\lambda(\sigma)$  est réel dans le cas de  $\mathfrak{S}_n$ . Donc les  $s_\lambda$  sont vecteurs propres de  $M$ , associés aux valeurs propres  $f_T(\lambda)$ . On admet que  $f_T(\lambda) = \frac{1}{2} \sum [(\lambda_i - i + \frac{1}{2})^2 - (-i + \frac{1}{2})^2]$ .  $\square$

## 5 Hiérarchie de Kadomtsev–Petviashvili (KP)

**Définition 25** (Élément décomposable). Soit  $\tau$  un élément de  $\Lambda$ . On dit que  $\tau$  est *décomposable* s'il existe des éléments  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  de  $V$  de la forme  $\varphi_i = z^{-i} + \sum_{j=-i+1}^{\infty} a_{i,j} z^j$ , et tels que  $\tau = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots$ , où ce produit extérieur semi-infini a un sens dans la mesure où l'on développe en choisissant pour tous les termes, sauf un nombre fini, le terme  $z^{-i}$ . Dans ce cas, on peut montrer que le coefficient obtenu devant chaque  $v_\lambda$  est une somme finie (ayant presque tous les termes nuls) de produits finis (ayant presque tous les facteurs égaux à 1), voir plus bas pour une expression explicite de ces coefficients.

On peut écrire les  $\varphi_i$  sous forme d'une matrice de taille infinie :

$$\begin{array}{c|cccccccc} & \dots & z^{-4} & z^{-3} & z^{-2} & z^{-1} & z^0 & z^1 & \dots \\ \hline \varphi_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & a_{1,0} & a_{1,1} & \dots \\ \varphi_2 & \dots & 0 & 0 & 1 & a_{2,-1} & a_{2,0} & a_{2,1} & \dots \\ \varphi_3 & \dots & 0 & 1 & a_{3,-2} & a_{3,-1} & a_{3,0} & a_{3,1} & \dots \\ \vdots & & \dots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Si on décompose  $\tau$  sur la base des  $v_\lambda$ , en écrivant  $\tau = \sum_{\lambda} c_\lambda v_\lambda$ , on peut exprimer les coefficients  $c_\lambda$  à l'aide des mineurs de cette matrice. Pour  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p, 0, \dots)$ ,  $c_\lambda = \det((a_{i, \lambda_j - j})_{i,j \geq 1}) = \det((a_{i, \lambda_j - j})_{1 \leq i, j \leq p})$ , la deuxième égalité résultant du fait que l'on choisisse toujours les 1 diagonaux sauf pour  $p$  d'entre eux dans le développement. Par exemple,  $c_0 = 1$ ,  $c_1 = a_{1,0}$ ,  $c_2 = a_{1,1}$ ,  $c_{1,1} = a_{1,0}a_{2,-1} - a_{2,0}$ ,  $c_{2,1} = a_{1,1}a_{2,-1} - a_{2,1}$  et  $c_{2,2} = a_{2,0}a_{1,1} - a_{1,0}a_{2,1}$ .

Un élément de  $\mathbb{C}[[p_1, p_2, \dots]]$  sera dit décomposable si l'élément associé par la correspondance boson-fermion l'est.

**Définition 26** (Hiérarchie KP). Soit  $H \in \mathbb{C}[[p_1, p_2, \dots]]$  sans terme constant. On dit que  $H$  est *solution de la hiérarchie KP* si  $\tau = e^H$  est décomposable.

*Remarque.* Le fait que  $H$  soit décomposable s'exprime par l'intermédiaire d'une infinité d'équations reliant les  $c_\lambda$  apparaissant dans le développement de  $\tau$ , comme par exemple  $c_{2,2}c_0 - c_{2,1}c_1 + c_{1,1}c_2 = 0$ . Ces conditions sont équivalentes *via* la correspondance boson-fermion à une famille d'équations différentielles portant sur  $H$  exprimé comme série formelle en les  $p_i$ . La première d'entre elles est

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_2^2} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_3 \partial p_1} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^2} \right)^2 - \frac{1}{12} \frac{\partial^4 H}{\partial p_1^4}.$$



# Troisième partie

## La série de Hurwitz

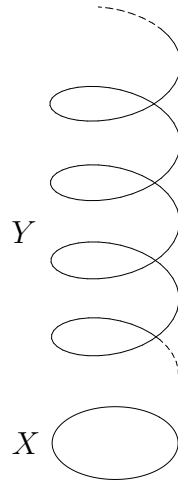
### 6 Revêtements

**Définition 27** (Revêtement). Soit  $X$  un espace topologique séparé et connexe par arcs. On appelle *revêtement* de  $X$  la donnée d'un espace topologique  $Y$  et d'une application continue  $f : Y \rightarrow X$  vérifiant  $\forall x \in X$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $x$  et un ensemble  $F$  discret tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(U) & \xrightarrow{\sim} & U \times F \\ & \searrow f & \swarrow \text{pr}_1 \\ & & U \end{array}$$

avec  $\text{pr}_1$  la première projection.

*Exemple :* Soit  $X$  le cercle unité dans le plan complexe,  $Y = \mathbb{R}$ . Un revêtement de  $X$  est « l'hélice », avec  $f : \theta \mapsto e^{i\theta}$ .



Un autre revêtement du cercle serait  $X \rightarrow X, z \mapsto z^2$  (qui revient à parcourir le cercle deux fois).

**Proposition 28.** Le cardinal de  $F$  est constant. Si ce cardinal est fini et égal à  $n$ , on dit que  $(Y, f)$  est un revêtement à  $n$  feuillets.

**Théorème 29** (Relèvement). Soit  $f : Y \rightarrow X$  un revêtement et  $g : [0, 1] \rightarrow X$  une application continue. Alors il existe  $h : [0, 1] \rightarrow Y$  relevant  $g$ , c'est-à-dire telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow h & \downarrow f \\ [0, 1] & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

Si, de plus, on fixe un antécédent de  $g(0)$  par  $f$ , alors  $h$  telle que  $h(0)$  soit égal à cet antécédent est unique.

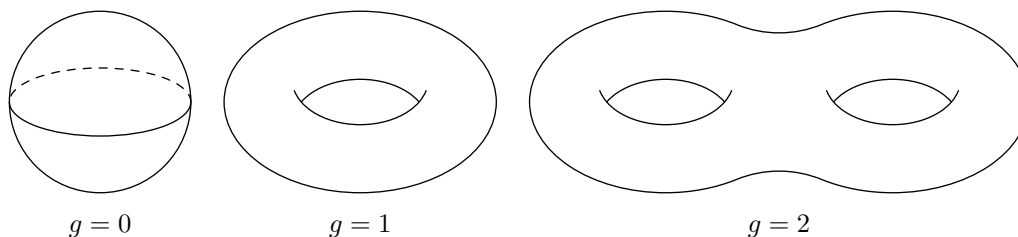
**Définition 30** (Isomorphisme de revêtements). Soit  $X$  un espace topologique, et  $f_1 : Y_1 \rightarrow X$ ,  $f_2 : Y_2 \rightarrow X$  deux revêtements de  $X$ . On dit que  $\varphi : Y_1 \rightarrow Y_2$  est un *isomorphisme de revêtements* si le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} Y_1 & \xrightarrow{\sim \varphi} & Y_2 \\ f_1 \searrow & & \swarrow f_2 \\ & X & \end{array}$$

Soit  $\mathbb{S}^2$  la sphère de dimension 2, que l'on verra par la suite topologiquement comme le plan complexe  $\mathbb{C}$  auquel on a ajouté un point à l'infini  $\infty$ .

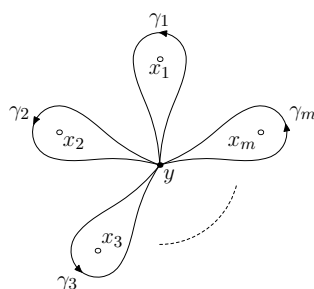
**Définition 31** (Revêtement ramifié de la sphère). On appelle *revêtement ramifié de la sphère* un revêtement de  $\mathbb{S}^2$  privée d'un nombre fini de points. Ces points sont appelés *points de ramification*.

**Définition 32** (Surface connexe de genre  $g$ ). Nous ne donnons pas de définition rigoureuse de ce qu'est une *surface connexe de genre  $g$* . L'idée est que c'est une surface connexe à  $g$  « trous », formée du « recollement » de  $g$  tores. Par exemple, une sphère est de genre 0 et un tore de genre 1. En outre, toute surface connexe compacte, orientable, sans bord, peut être construite de cette manière (et donc on peut définir le genre de toute telle surface), mais nous ne démontrerons pas ce résultat.



## 7 Nombres de Hurwitz et série de Hurwitz

**Notion de monodromie** Fixons  $m + 1$  points de la sphère  $x_1, x_2, \dots, x_{m+1}$ , deux à deux distincts, avec  $x_{m+1} = \infty$ . Fixons également un point  $y$  distinct de tous les  $x_j$ . Pour chaque  $j \in \{1, \dots, m\}$ , considérons dans le plan complexe un lacet  $\gamma_j$  de point base  $y$  (ie une application continue de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{C}$  telle que  $y = \gamma_j(0) = \gamma_j(1)$ ) qui ne passe par aucun des  $x_k$  et « entoure » uniquement  $x_j$ , une fois, dans le sens direct. La figure ci-dessous illustre ces choix :



La concaténation  $\gamma_{m+1}$  des lacets  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  dans cet ordre est encore un lacet de point base  $y$  qui entoure les points  $x_1, \dots, x_m$ . Vu sur la sphère  $\mathbb{S}^2$ , on peut également considérer que  $\gamma_{m+1}$  entoure uniquement  $x_{m+1} = \infty$  une fois dans le sens indirect.

Considérons à présent un revêtement ramifié  $Y \rightarrow \mathbb{S}^2$  à  $N$  feuillets de  $\mathbb{S}^2$  dont les points de ramification sont les  $x_j$ . Le point  $y$  a  $N$  antécédents par le revêtement, que l'on note  $y_1, y_2, \dots, y_N$ . Fixons

$j \in \{1, \dots, m+1\}$ . D'après le théorème du relèvement, pour chaque  $y_i$ , il existe un unique  $h_{ij}$  relevant  $\gamma_j$  et tel que  $h_{ij}(0) = y_i$ ; comme  $\gamma_j(1) = y$ ,  $h_{ij}(1)$  est égal à  $y_{\sigma_j(i)}$  pour une certaine permutation  $\sigma_j \in \mathfrak{S}_N$ . Si on modifie la numérotation des feuillets, la permutation  $\sigma_j$  est remplacée par une permutation qui lui est conjuguée. Ainsi, la classe de conjugaison de  $\sigma_j$  ne dépend que de  $\gamma_j$ , et s'appelle la *monodromie* de  $\gamma_j$  (ou abusivement de  $x_j$  car elle ne dépend pas de  $\gamma_j$  sous réserve qu'il satisfait à certaines hypothèses simples). Rappelons qu'une classe de conjugaison (et donc en particulier la monodromie) est entièrement déterminée par la longueur des cycles.

**Nombres et série de Hurwitz** Nous allons dans la suite nous pencher sur le cas où tous les  $x_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ) ont pour monodromie une transposition, et la monodromie de  $x_{m+1}$  a pour longueurs de cycles des entiers fixés  $k_1, k_2, \dots, k_n$ .

**Définition 33** (Nombre de Hurwitz). On conserve les notations précédentes ( $m$ , les  $x_j$  et les  $\gamma_j$ ). Soient  $k_1, k_2, \dots, k_n$  des entiers ( $k_i \geq 1$ ). Le *nombre de Hurwitz*  $h_{m+1; k_1, k_2, \dots, k_n}$  est le nombre de revêtements ramifiés connexes, dont les points de ramification sont les  $x_j$ , tels que  $x_{m+1}$  ait une monodromie de cycles de longueurs  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , et tels que les autres  $x_j$  aient pour monodromie une transposition. On compte le tout à isomorphisme près, et chaque revêtement avec un poids égal à l'inverse du nombre de ses automorphismes.

*Remarque.* Si  $g$  est le genre d'un revêtement ramifié de la sphère, avec les mêmes hypothèses que dans la définition précédente, on peut montrer que  $m = \sum k_i + n + 2g - 2$ . Ainsi, connaissant les  $k_i$  (et donc  $n$  qui est leur nombre), la donnée de  $m$  est équivalente à celle de  $g$ . Au lieu de définir les nombres de Hurwitz à  $m$  fixé, on aurait donc pu le faire à  $g$  fixé, et c'est d'ailleurs ce qui se fait plus usuellement.

Par commodité pour la suite, on introduit également la définition suivante :

**Définition 34.** On conserve les notations de la définition 33. On note  $\tilde{h}_{m+1; k_1, k_2, \dots, k_n}$  le nombre de revêtements ramifiés (*non nécessairement connexes*), dont les points de ramification sont les  $x_j$ , tels que  $x_{m+1}$  ait une monodromie de cycles de longueurs  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , et tels que les autres  $x_j$  aient pour monodromie une transposition. On compte le tout à isomorphisme près, et chaque revêtement avec un poids égal à l'inverse du nombre de ses automorphismes.

*Remarque.* On peut montrer que les nombres  $h_{m+1; k_1, k_2, \dots, k_n}$  et  $\tilde{h}_{m+1; k_1, k_2, \dots, k_n}$  ne dépendent ni des  $x_j$ , ni des  $\gamma_j$ , pourvu qu'ils entourent correctement les  $x_j$ . Ainsi, la notation est justifiée.

Fixons  $m$  et  $k_1, \dots, k_n$ . À un revêtement ramifié de la sphère en les  $x_j$ , dont on a numéroté les  $N$  feuillets (c'est-à-dire les antécédents du point base  $y \in \mathbb{S}^2$ ), on associe comme précédemment un  $(m+1)$ -uplet  $(\sigma_1, \dots, \sigma_{m+1})$  de permutations de  $\mathfrak{S}_N$ . Celles-ci vérifient en outre la relation  $\sigma_{m+1} = \sigma_m \cdots \sigma_1$  qui provient de  $\gamma_{m+1} = \gamma_1 \cdots \gamma_m$ . Lorsque le revêtement vérifie les hypothèses de la définition 34, les  $\sigma_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) sont des transpositions, alors que  $\sigma_{m+1}$  a pour longueur de cycles  $k_1, \dots, k_n$ . On obtient alors une application

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Revêtements ramifiés} \\ \text{comme dans la définition 34} \\ \text{à feuillets numérotés} \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\tau_1, \dots, \tau_m) \\ \tau_i \text{ transposition} \\ \tau_m \cdots \tau_1 \text{ de classe } k_1, \dots, k_n \end{array} \right\}. \quad (1)$$

Notons  $\mathcal{T}_{k_1, \dots, k_n}$  l'ensemble de droite. On admet que l'application (1) est une bijection. Par ailleurs, deux éléments de l'ensemble de gauche, associés dans  $\mathcal{T}_{k_1, \dots, k_n}$  respectivement aux  $m$ -uplets  $(\tau_1, \dots, \tau_m)$  et  $(\tau'_1, \dots, \tau'_m)$ , sont isomorphes après oubli de la numérotation des feuillets si et seulement s'il existe  $\sigma \in \mathfrak{S}_N$  telle que  $\tau'_i = \sigma \tau_i \sigma^{-1}$  pour tout  $i$ . Finalement, on peut montrer qu'un automorphisme d'un

élément de l'ensemble de gauche (qui ne conserve pas nécessairement la numérotation des feuillets) correspond à une permutation qui commute avec tous les  $\tau_j$  du  $m$ -uplet image.

Cette bijection, ainsi que les propriétés que l'on vient de lister, permettent d'établir une expression simple de  $\tilde{h}_{m+1;k_1,\dots,k_n}$ , à savoir :

$$\tilde{h}_{m+1;k_1,\dots,k_n} = \frac{1}{N!} \text{Card}(\mathcal{T}_{k_1,\dots,k_n}). \quad (2)$$

En effet, si l'on fait agir  $\mathfrak{S}_N$  sur  $\mathcal{T}_{k_1,\dots,k_n}$  par conjugaison, les propriétés de la bijection admises précédemment impliquent

$$\tilde{h}_{m+1;k_1,\dots,k_n} = \sum_{(\tau_1,\dots,\tau_m) \in \mathcal{T}_{k_1,\dots,k_n}} \frac{1}{\text{Card}(\text{orbite de } (\tau_1, \dots, \tau_m)) \cdot \text{Card}(\text{stab. de } (\tau_1, \dots, \tau_m))}$$

ce qui permet de conclure en se rappelant que le cardinal d'une orbite multiplié par le cardinal du stabilisateur est égal à celui du groupe, donc ici  $N!$ .

**Définition 35** (Série de Hurwitz). On appelle *série de Hurwitz* la série de  $\mathbb{Q}[[\beta; p_1, p_2, \dots]]$  suivante :

$$H(\beta; p_1, p_2, \dots) = \sum_{m,n} \sum_{k_1,\dots,k_n} h_{m+1;k_1,k_2,\dots,k_n} \frac{\beta^m}{m!} \frac{p_{k_1} \cdots p_{k_n}}{n!}.$$

## Quatrième partie

# Théorème

Le but de cette partie est de montrer le théorème suivant :

**Théorème 36.** *La série de Hurwitz  $H$  est solution de la hiérarchie KP.*

Commençons par prouver le lemme suivant :

**Lemme 37.** *On a  $e^H = e^{\beta M} e^{p_1}$  où  $M$  est l'opérateur cut-and-join (voir définition 22).*

*Démonstration.* On montre que

$$e^H = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{H^q}{q!} = \sum_{m,n} \sum_{k_1, \dots, k_n} \tilde{h}_{m+1; k_1, k_2, \dots, k_n} \frac{\beta^m}{m!} \frac{p_{k_1} \cdots p_{k_n}}{n!}$$

en remarquant que la série  $\frac{H^q}{q!}$  dénombre les revêtements à  $q$  composantes connexes. On utilise à présent l'égalité (2) qui donne, en séparant la somme selon les valeurs de  $N = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ ,

$$e^H = \sum_m \sum_N \frac{1}{N!} \frac{\beta^m}{m!} \sum_{k_1 + \cdots + k_n = N} \text{Card}(\mathcal{T}_{k_1, \dots, k_n}) \cdot \frac{p_{k_1} \cdots p_{k_n}}{n!}.$$

Rappelons que l'on a introduit un élément  $T \in \mathbb{C}\mathfrak{S}_N$  défini comme la somme des transpositions, ainsi que l'opérateur  $p$  dans la définition 17, page 10. Ceux-ci vont nous être utiles dans la suite de la preuve. On a les écritures :

$$T^m = \sum_{\substack{\tau_1, \dots, \tau_m \\ \text{transpositions}}} \tau_m \cdots \tau_1 \quad \text{et} \quad p(T^m) = \sum_{\substack{\tau_1, \dots, \tau_m \\ \text{transpositions}}} p(\tau_m \cdots \tau_1)$$

à partir desquels des raisonnements élémentaires de combinatoire (faisant intervenir le nombre de  $k_i$  égaux entre eux) donnent la formule

$$p(T^m) = \sum_{k_1 + \cdots + k_n = N} \text{Card}(\mathcal{T}_{k_1, \dots, k_n}) \cdot \frac{p_{k_1} \cdots p_{k_n}}{n!}$$

d'où il résulte, en réinjectant

$$e^H = \sum_m \sum_N \frac{1}{N!} \frac{\beta^m}{m!} p(T^m).$$

Puis en utilisant les propriétés de l'opérateur cut-and-join (voir proposition 23), on obtient :

$$e^H = \sum_m \sum_N \frac{1}{N!} \frac{\beta^m}{m!} p(T^m) = \sum_m \sum_N \frac{1}{N!} \frac{\beta^m}{m!} M^m p(id) = \sum_m \sum_N \frac{1}{N!} \frac{\beta^m}{m!} M^m p_1^N = e^{\beta M} e^{p_1}$$

qui est ce que l'on voulait. □

*Démonstration du théorème.* Commençons par établir que  $p_1$  est solution de KP. En effet, on peut lui associer la matrice suivante :

	...	$z^{-4}$	$z^{-3}$	$z^{-2}$	$z^{-1}$	$z^0$	$z^1$	...
$\varphi_1$	...	0	0	0	1	1	$\frac{1}{2!}$	...
$\varphi_2$	...	0	0	1	1	$\frac{1}{2!}$	$\frac{1}{3!}$	...
$\varphi_3$	...	0	1	1	$\frac{1}{2!}$	$\frac{1}{3!}$	$\frac{1}{4!}$	...
$\vdots$		$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	

On a

$$\varphi_i = \sum_{j \geq -i} \frac{1}{(j+i)!} z^j = z^{-i} \sum_{j \geq 0} \frac{1}{j!} z^j = z^{-i} e^z$$

d'où  $\tau = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots = e^z z^{-1} \wedge e^z z^{-2} \wedge \dots$ . On peut montrer que  $\tau$  se réécrit  $e^{\tilde{z}}(v_0)$  en développant les deux expressions. Or,  $p_1 \leftrightarrow z$  dans la correspondance boson-fermion, et  $v_0 \leftrightarrow s_0 = 1$ .

Montrons à présent que l'image par  $e^{\beta M}$  d'un élément décomposable reste décomposable. Les polynômes de Schur  $s_\lambda$  sont vecteurs propres de  $M$  associés aux valeurs propres  $\frac{1}{2} \sum [(\lambda_i - i + \frac{1}{2})^2 - (-i + \frac{1}{2})^2]$ , d'après la proposition 24. On en déduit que les polynômes de Schur sont vecteurs propres de  $e^{\beta M}$  associés aux valeurs propres  $\exp(\beta \frac{1}{2} \sum [(\lambda_i - i + \frac{1}{2})^2 - (-i + \frac{1}{2})^2])$ . Si  $\tau$  est un élément décomposable, de matrice

	...	$z^{-4}$	$z^{-3}$	$z^{-2}$	$z^{-1}$	$z^0$	$z^1$	...
$\varphi_1$	...	0	0	0	1	$a_{1,0}$	$a_{1,1}$	...
$\varphi_2$	...	0	0	1	$a_{2,-1}$	$a_{2,0}$	$a_{2,1}$	...
$\varphi_3$	...	0	1	$a_{3,-2}$	$a_{3,-1}$	$a_{3,0}$	$a_{3,1}$	...
$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

montrons que si l'on multiplie la colonne  $z^j$  par  $e^{\frac{1}{2}(j+\frac{1}{2})^2\beta}$  et la ligne  $\varphi_i$  par  $e^{-\frac{1}{2}(-i+\frac{1}{2})^2\beta}$ , on obtient la matrice de  $e^{\beta M}\tau$ . En effet, si l'on écrit  $\tau = \sum c_\lambda s_\lambda$ , on sait que  $c_\lambda$  est égal à un mineur de la matrice ; après avoir multiplié chaque colonne et chaque ligne par le coefficient qui convient, on aura multiplié le coefficient  $c_\lambda$  par la valeur propre associée à  $s_\lambda$ . Finalement, cette nouvelle matrice sera bien celle associée à  $e^{\beta M}\tau$ . On peut vérifier immédiatement que ses coefficients « diagonaux »  $(-i, i)$  sont bien des 1 et ses coefficients « sur-diagonaux » des 0, c'est-à-dire que  $e^{\beta M}\tau$  est décomposable.  $\square$