

# **Groupe de tresses étendu**

## **Master-Arbeit**

zur Erlangung des Grades

**Master of Science (M.Sc.) im Studiengang Mathematik**

am Department Mathematik der  
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

vorgelegt am Dienstag, den 6. Juli

von **Sandrine Caruso**



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Géométrie du groupe de Weyl affine</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Présentation de l'espace des orbites régulières</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>Présentation du groupe de tresses étendu</b>	<b>12</b>
<b>4</b>	<b>Une autre présentation de <math>\pi_1(Y/W)</math></b>	<b>16</b>
4.1	Annexe : calcul de la relation $\Phi(t_i)\Phi(t_j) = \Phi(t_j)\Phi(t_i)$ . . . . .	22

## Introduction

Il est bien connu (voir [4], [3] ou [1]) que le groupe de tresses à  $n$  brins, autrement dit le groupe  $\mathcal{B}_n = \pi_1(\{S \subset \mathbb{R}^2, |S| = n\})$ , admet la présentation par générateurs et relations suivante :

$$\mathcal{B}_n = \langle s_1, \dots, s_{n-1} ; s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \text{ et } s_i s_j = s_j s_i \text{ pour } |i - j| \geq 2 \rangle$$

où  $s_i$  représente le croisement du brin  $i$  au dessus du brin  $i + 1$  (voir figure 1). Le but de

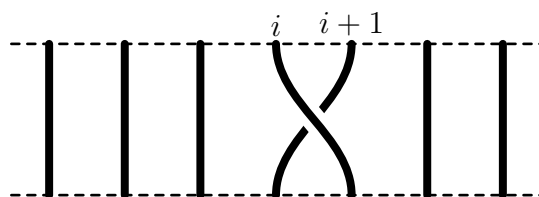


FIG. 1 – Croisement  $s_i$

ce document est de donner une présentation analogue du *groupe de tresses étendu* à  $n$  brins qui est, par définition, le groupe  $\tilde{\mathcal{B}}_n = \pi_1(\{S \subset \mathbb{C}^*, |S| = n\})$ . Géométriquement, on peut comprendre les éléments de ce groupe comme des tresses dont les brins sont disposés autour d'une tige fixe qu'ils ne peuvent traverser. Nous démontrons que  $\tilde{\mathcal{B}}_n$  admet la présentation suivante :

$$\tilde{\mathcal{B}}_n = \langle (s_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}, u ; \text{ si } n > 2, s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}, \\ s_i s_j = s_j s_i \text{ pour } i - j \neq -1, 0, 1 \text{ et } u s_i u^{-1} = s_{i-1} \rangle.$$

Cette présentation est obtenue à partir de celle de  $\mathcal{B}_n$  en ajoutant un générateur  $s_0$  qui représente le croisement des brins  $n$  et  $1$ , et un générateur  $u$  représentant la tresse qui relie (circulairement) chaque extrémité  $i$  à l'extrémité  $i + 1$  (voir la figure 5, page 15), ainsi que des relations mettant en jeu ces nouveaux générateurs.

Dans la première section de ce document nous rappelons quelques résultats à propos du *groupe de Weyl affine* qui peuvent être trouvés dans [2]. La deuxième section introduit l'*espace des orbites régulières*, et nous établissons que son groupe fondamental est présenté par les générateurs  $(s_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$  soumis, si  $n > 2$ , aux relations  $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$  et  $s_i s_j = s_j s_i$  pour  $i - j \neq -1, 0, 1$ . C'est un cas particulier du résultat que l'on peut trouver dans [4]. Dans la troisième, nous en déduisons la présentation annoncée de  $\tilde{\mathcal{B}}_n$ . La quatrième et dernière section revient sur le groupe fondamental de l'espace des orbites régulières en en donnant une deuxième présentation, qui est celle que l'on trouve dans [3].

Nous utilisons les notations suivantes :  $i$  désigne un nombre complexe tel que  $i^2 = -1$ , pour  $m \leq n \in \mathbb{Z}$ ,  $\llbracket m, n \rrbracket = \{m, \dots, n\}$  est l'ensemble des entiers de  $m$  à  $n$ , et si  $\gamma$  est un chemin,  $[\gamma]$  désigne sa classe d'homotopie.

## 1 Géométrie du groupe de Weyl affine

Soit  $n$  un entier strictement positif. On note  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et  $\langle | \rangle$  le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $V = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 + \dots + x_n = 0\}$  et  $R = \{e_i - e_j, i \neq j\}$ . L'ensemble  $R$  est appelé *système de racines* (de type  $A_{n-1}$ ). On note  $H_{(i,j),k}$  l'hyperplan affine de  $V$  formé des vecteurs  $x \in V$  tels que  $\langle x | e_i - e_j \rangle = k$ .

**Définition 1.** Le *groupe de Weyl affine*  $W$  associé à  $R$  est le groupe des transformations affines de  $V$  engendré par les réflexions affines d'hyperplans  $H_{(i,j),k}$ .

On note  $\sigma_{(i,j),k}$  la réflexion par rapport à  $H_{(i,j),k}$ . On a, pour tout  $x \in V$ ,

$$\sigma_{(i,j),k} = x - 2(\langle x | e_i - e_j \rangle - k) \frac{(e_i - e_j)}{\|e_i - e_j\|^2} = x - (\langle x | e_i - e_j \rangle - k)(e_i - e_j).$$

On appelle *groupe de Weyl fini* le sous-groupe de  $W$  engendré par les réflexions *linéaires* (i.e. les réflexions par rapport aux hyperplans  $H_{(i,j),0}$ ). Considérons le réseau  $Q$  de  $V$  engendré par  $R$ , autrement dit,  $Q = V \cap \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ . Alors  $Q$  se plonge dans  $W$  en associant à tout  $q \in Q$  la translation  $\tau_q$  de vecteur  $q$ . En effet, on a  $\tau_{e_i - e_j} = \sigma_{(i,j),1} \circ \sigma_{(i,j),0}$ .

**Proposition 2.** Le *groupe de Weyl fini* est isomorphe au groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$ . Le *groupe de Weyl affine* est le produit semi-direct du *groupe de Weyl fini* et du réseau  $Q$ . Ainsi,  $W \simeq \mathfrak{S}_n \ltimes Q$ . L'action du *groupe de Weyl fini* sur  $Q$  est donnée par

$$\sigma_{(i,j),0} \cdot \tau_{e_{i'} - e_{j'}} = \tau_{e_{i'} - e_{j'} - \langle e_{i'} - e_{j'} | e_i - e_j \rangle (e_i - e_j)}$$

pour  $i, j, i', j' \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

*Démonstration.* Notons  $W_{\text{fin}}$  le groupe de Weyl fini. Les éléments de  $W_{\text{fin}}$  agissent non seulement sur  $V$  mais sur  $\mathbb{R}^n$  tout entier en fixant les points de  $V^\perp$ . Soit  $\sigma \in W_{\text{fin}}$  la réflexion par rapport à  $H_{(i,j),0} \oplus V^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n, \langle x | e_i - e_j \rangle = 0\}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\sigma(x) = x - \langle x | e_i - e_j \rangle (e_i - e_j)$ . On calcule alors

$$\begin{aligned}\sigma(e_i) &= e_i - \langle e_i | e_i - e_j \rangle (e_i - e_j) = e_i - (e_i - e_j) = e_j, \\ \sigma(e_j) &= e_j - \langle e_j | e_i - e_j \rangle (e_i - e_j) = e_j + e_i - e_j = e_i, \\ \forall k \neq i, j, \sigma(e_k) &= e_k - \langle e_k | e_i - e_j \rangle (e_i - e_j) = e_k.\end{aligned}$$

Un élément quelconque de  $W_{\text{fin}}$  étant une composée de telles réflexions, il permute les vecteurs de base  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ , et on a donc un morphisme  $W_{\text{fin}} \rightarrow \mathfrak{S}_n$ . Celui-ci est injectif, car une application linéaire laissant invariants les vecteurs d'une base est nécessairement l'identité. Il est également surjectif, puisque la réflexion  $\sigma$  par rapport à  $H_{(i,j),0} \oplus V^\perp$  échange  $e_i$  et  $e_j$ , laissant les autres  $e_k$  invariants et que  $\mathfrak{S}_n$  est engendré par les transpositions. D'où l'isomorphisme  $W_{\text{fin}} \simeq \mathfrak{S}_n$ .

Pour montrer que  $W = W_{\text{fin}} \rtimes Q$ , il suffit de montrer que  $W = Q \cdot W_{\text{fin}}$ , que  $Q$  est distingué dans  $W$  et que  $Q \cap W_{\text{fin}} = \{\text{id}\}$ .

Soient  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . On a  $\sigma_{(i,j),k} = \tau_{k(e_i - e_j)} \circ \sigma_{(i,j),0}$ , d'où  $W = Q \cdot W_{\text{fin}}$ . Pour montrer que  $Q$  est distingué dans  $W$ , il suffit d'établir qu'il est normalisé par  $W_{\text{fin}}$ . Or, on calcule aisément que

$$\sigma_{(i,j),0} \circ \tau_{e_{i'} - e_{j'}} = \tau_{e_{i'} - e_{j'} - \langle e_{i'} - e_{j'} | e_i - e_j \rangle (e_i - e_j)} \circ \sigma_{(i,j),0}$$

et le fait que  $\langle e_{i'} - e_{j'} | e_i - e_j \rangle \in \mathbb{Z}$  permet de conclure. Enfin, la seule translation qui soit une application linéaire est  $\text{id}$ , d'où  $Q \cap W_{\text{fin}} = \{\text{id}\}$ .  $\square$

**Définition 3.** On définit une relation d'équivalence sur  $V$  de la manière suivante. Deux éléments  $x$  et  $y$  de  $V$  sont équivalents si et seulement si  $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall k \in \mathbb{Z}$ ,  $\langle x | e_i - e_j \rangle - k$  et  $\langle y | e_i - e_j \rangle - k$  sont strictement de même signe (*i.e.* sont soit tous les deux nuls, soit  $(\langle x | e_i - e_j \rangle - k) \cdot (\langle y | e_i - e_j \rangle - k) > 0$ ). On note  $\mathcal{C}$  l'ensemble des classes d'équivalence sous cette relation, et on appelle *facettes* les éléments de  $\mathcal{C}$ .

Soit  $F \in \mathcal{C}$  une facette et  $x \in F$ . Si  $\langle x | e_i - e_j \rangle = k$  pour  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $k \in \mathbb{Z}$ , alors  $F \subset H_{(i,j),k}$ . Bien sûr,  $x$  ne peut pas être à la fois dans deux hyperplans distincts et parallèles, donc l'ensemble des hyperplans de la forme  $H_{(i,j),k}$  contenant  $F$  est fini, et son cardinal est au plus égal au nombre de parties  $\{i, j\} \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $i \neq j$  c'est-à-dire à  $\frac{n(n-1)}{2}$ . L'intersection de ces hyperplans est un sous-espace affine  $L$  de  $V$ , que l'on appellera le *support* de  $F$ ; sa dimension est appelée *dimension* de  $F$ . Alors  $F$  est l'intersection de  $L$  avec des demi-espaces ouverts. En particulier,  $F$  est convexe et ouvert dans  $L$ .

Ainsi, l'ensemble  $\mathcal{C}$  forme une *décomposition cellulaire*<sup>1</sup> de  $V$ .

<sup>1</sup>Dans la littérature, on trouve généralement une définition plus forte de la notion de décomposition cellulaire que celle donnée ici.

**Définition 4.** Soit  $X$  un espace topologique séparé. On appelle *décomposition cellulaire* de  $X$  une famille  $\mathcal{C}$  de parties de  $X$  telle que  $\mathcal{C}$  forme une partition de  $X$ , et pour tout  $C \in \mathcal{C}$ , il existe un entier  $d \in \mathbb{N}$  tel que  $C$  soit homéomorphe à la boule unité ouverte  $B^d$  de  $\mathbb{R}^d$ . Un élément de  $\mathcal{C}$  homéomorphe à  $B^d$  est appelé *d-cellule*.

Les  $(n - 1)$ -cellules, facettes de dimension maximale (*i.e.* dont le support est  $V$ ), sont appelées *chambres*. Ce sont les composantes connexes de  $V \setminus \cup_{i,j,k} H_{(i,j),k}$ . Ainsi, si  $C$  est une chambre et si  $x_0 \in C$ , on peut décrire  $C$  comme l'ensemble des points  $x \in V$  tels que  $(\langle x | e_i - e_j \rangle - k) \cdot (\langle x_0 | e_i - e_j \rangle - k) > 0$  pour tous  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $k \in \mathbb{Z}$ .

Si  $C$  est une chambre, on appelle *face* de  $C$  une  $(n - 2)$ -cellule  $F$  de  $\mathcal{C}$  (*i.e.* une facette dont le support est un hyperplan de  $V$ ) telle que  $\overline{C} \cap F$  est non vide. On appelle *mur* de  $C$  le support d'une face de  $C$ .

Si  $F$  est une  $(n - 2)$ -cellule de support  $H_{(i_0, j_0), k_0}$  et si  $x_0 \in F$ , alors on peut décrire  $F$  comme l'ensemble des points  $x \in V$  tels que  $\langle x | e_{i_0} - e_{j_0} \rangle = k_0$  et  $(\langle x | e_i - e_j \rangle - k) \cdot (\langle x_0 | e_i - e_j \rangle - k) > 0$  pour  $i, j$  et  $k$  tels que  $H_{(i,j),k} \neq H_{(i_0, j_0), k_0}$ . Plus généralement, si  $F$  est une facette de support  $\cap_{H \in \mathfrak{H}} H$  où  $\mathfrak{H}$  est une famille d'hyperplans parmi les  $H_{(i,j),k}$ , et si  $x_0 \in F$ , alors  $F$  est décrit comme l'ensemble des  $x \in V$  vérifiant  $\langle x | e_i - e_j \rangle = k$  pour  $i, j, k$  tels que  $H_{(i,j),k} \in \mathfrak{H}$ , et  $(\langle x | e_i - e_j \rangle - k) \cdot (\langle x_0 | e_i - e_j \rangle - k) > 0$  pour  $i, j, k$  tels que  $H_{(i,j),k} \notin \mathfrak{H}$ .

**Proposition 5.** Soit  $C$  une chambre et  $F$  une de ses faces. On a  $F \subset \overline{C}$ . Plus précisément, si  $H$  est l'unique hyperplan contenant  $F$ , on a  $\overline{C} \cap H = \overline{F}$ .

Étant donnée une  $(n - 2)$ -cellule  $F$ , il existe exactement deux chambres dont elle soit une face.

*Démonstration.* Soit  $x_0 \in C$ . On a

$$C = \{x \in V, (\langle x | e_i - e_j \rangle - k) \cdot (\langle x_0 | e_i - e_j \rangle - k) > 0, \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall k \in \mathbb{Z}\}$$

et donc

$$\overline{C} = \{x \in V, (\langle x | e_i - e_j \rangle - k) \cdot (\langle x_0 | e_i - e_j \rangle - k) \geq 0, \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall k \in \mathbb{Z}\}.$$

Soient  $y_0 \in \overline{C} \cap F$  et  $y \in F$  quelconque. Le point  $y_0$  est adhérent à  $C$ , donc pour tous  $i \neq j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , on a  $(\langle x_0 | e_i - e_j \rangle - k) \cdot (\langle y_0 | e_i - e_j \rangle - k) \geq 0$ . Ainsi,  $y_0$  est situé (au sens large) du même côté de  $H_{(i,j),k}$  que  $x_0$  pour tous  $i, j$  et  $k$ . Or,  $y$  étant dans la même facette que  $y_0$  est également situé du même côté de chaque  $H_{(i,j),k}$  que  $y_0$ , donc que  $x_0$ . On en déduit que  $y \in \overline{C}$  et par suite que  $F \subset \overline{C}$ .

Les points  $y \in \overline{C} \cap H$  sont ceux situés sur  $H$  et, par rapport tout hyperplan  $H_{(i,j),k}$ , du même côté (au sens large) que  $x_0$ . Ce sont donc également ceux situés sur  $H$  et du même côté (au sens large) de chaque  $H_{(i,j),k}$  que  $y_0$ . Mais ceci est exactement la description de  $\overline{F}$ . D'où  $\overline{C} \cap H = \overline{F}$ .

Soit maintenant une  $(n - 2)$ -cellule  $F$  contenue dans l'hyperplan  $H_{(i_0, j_0), k_0}$ . Alors, si  $C$  est une chambre dont  $F$  est une face, on a, d'après ce qui précède,  $(\langle x \mid e_i - e_j \rangle - k) \cdot (\langle y \mid e_i - e_j \rangle - k) \geq 0$  pour tous  $x \in C$  et  $y \in F$ , et tous  $i \neq j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $k \in \mathbb{Z}$ . Plus précisément,  $(\langle x \mid e_i - e_j \rangle - k) \cdot (\langle y \mid e_i - e_j \rangle - k) > 0$  pour  $i, j$  et  $k$  tels que  $H_{(i, j), k} \neq H_{(i_0, j_0), k_0}$ , et  $\langle y \mid e_{i_0} - e_{j_0} \rangle - k_0 = 0$ . Donc pour  $x \in C$ , deux possibilités : soit  $\langle x \mid e_{i_0} - e_{j_0} \rangle - k_0 > 0$ , soit  $\langle x \mid e_{i_0} - e_{j_0} \rangle - k_0 < 0$ , et cette alternative ne dépend pas du choix de  $x$  dans  $C$ . Ainsi  $F$  est-elle face d'au plus deux chambres. Réciproquement, les deux chambres définies de la sorte ont bien  $F$  pour face.  $\square$

**Proposition 6.** *Le groupe  $W$  permute entre eux les hyperplans  $H_{(i, j), k}$  et, pour tout  $d$ , permute entre elles les  $d$ -cellules.*

*Démonstration.* Soient  $i, j, i', j' \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $k \in \mathbb{Z}$ . Soit  $x \in V$  et posons  $y = \sigma_{(i, j), k}(x)$ . On a aussi  $x = \sigma_{(i, j), k}(y)$ . On calcule

$$\begin{aligned} \langle x \mid e_{i'} - e_{j'} \rangle &= \langle y \mid e_{i'} - e_{j'} - (e_i - e_j) \langle e_{i'} - e_{j'} \mid e_i - e_j \rangle \rangle + k \langle e_{i'} - e_{j'} \mid e_i - e_j \rangle \\ &= \langle y \mid \sigma_{(i, j), k}(e_{i'} - e_{j'}) \rangle + k \langle e_{i'} - e_{j'} \mid e_i - e_j \rangle. \end{aligned}$$

Il suffit de montrer que  $\sigma_{(i, j), k}(e_{i'} - e_{j'}) \in R$ . En effet,  $k \langle e_{i'} - e_{j'} \mid e_i - e_j \rangle$  est entier et ne dépend pas de  $x$ , et donc si  $\sigma_{(i, j), k}(e_{i'} - e_{j'}) = e_{i''} - e_{j''}$ , la formule ci-dessus montre que l'image par  $\sigma_{(i, j), k}$  d'un hyperplan de la forme  $H_{(i', j'), k'}$  est un hyperplan de la forme  $H_{(i'', j''), k''}$ . Or, on a vu dans la démonstration de la proposition 2 que  $\sigma_{(i, j), k}$  permute les éléments de base  $(e_s)_{s \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ . Donc  $\sigma_{(i, j), k}$  envoie bien tout élément de  $R$  sur un élément de  $R$ .

Le fait que  $W$  permute les  $d$ -cellules est une conséquence directe du fait que  $W$  permute les  $H_{(i, j), k}$ .  $\square$

Si  $C$  est une chambre et  $x_0 \in C$ , alors  $C$  est l'ensemble des  $x \in V$  tels que, pour tout hyperplan  $H$  de la forme  $H_{(i, j), k}$ ,  $x$  et  $x_0$  sont strictement du même côté de  $H$ . Mais on peut en fait se restreindre aux hyperplans  $H$  qui sont des murs de  $C$  :

**Lemme 7.** *La chambre  $C$  est l'ensemble des  $x \in V$  tels que pour tout mur  $H$  de  $C$ ,  $x$  est strictement du même côté de  $H$  que  $x_0$ .*

*Démonstration.* Bien sûr, si  $x \in C$ , alors  $x$  est du même côté que  $x_0$  pour tout mur de  $C$ . Pour montrer la réciproque, commençons par un résultat intermédiaire. Soit  $(f_m)_{m \in I}$  ( $I \subset \mathbb{N}$  contenant 0) une famille de formes affines parmi les  $x \mapsto \langle x \mid e_i - e_j \rangle - k$  telle que  $C = \{x \in V, \forall m \in I, f_m(x) > 0\}$ . Montrons que si l'hyperplan  $H$  d'équation  $f_0 = 0$  n'est pas un mur de  $C$ , alors  $C = \{x \in V, \forall m \in I \setminus \{0\}, f_m(x) > 0\}$ . Soit  $D = \{x \in V, \forall m \in I \setminus \{0\}, f_m(x) > 0\}$ . Il suffit de montrer que pour tout  $x \in D$ ,  $f_0(x) > 0$ . L'hyperplan  $H$  n'intersecte pas  $D$ . En effet,  $H \cap D$ , qui est de manière évidente inclus dans  $\overline{C}$ , et qui est ouvert dans l'hyperplan  $H$ , est soit vide, soit une face de  $C$ . Mais dans le deuxième cas,  $H$  serait un mur de  $C$ , donc  $H \cap D$  est vide. Donc

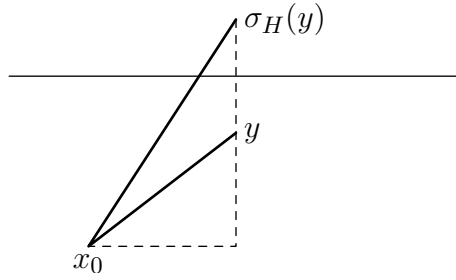


FIG. 2 –  $y$  du même côté que  $x_0$

$f_0$ , étant continue, est de signe constant sur  $D$ . De plus,  $C \subset D$  et  $f_0$  est strictement positive sur  $C$ , donc  $f_0$  est strictement positive sur  $D$ , ce qui conclut. Par récurrence, on en déduit que si  $J \subset I$  est un ensemble fini tel que pour tout  $m \in J$ , l'hyperplan d'équation  $f_m = 0$  n'est pas un mur de  $C$ , alors  $C = \{x \in V, \forall m \in I \setminus J, f_m(x) > 0\}$ .

Soit  $x \in V$  qui soit du même côté que  $x_0$  pour tout mur de  $C$ . Le segment  $[x_0x]$  étant compact, l'ensemble  $\mathfrak{H}$  des hyperplans qu'il rencontre parmi les  $H_{(i,j),k}$  est fini. Ce ne sont pas des murs de  $C$  par hypothèse sur  $x$ . D'après ce qui précède,  $C$  est encore l'ensemble des  $y \in V$  tels que, pour tout hyperplan  $H$  de la forme  $H_{(i,j),k}$  qui ne soit pas dans  $\mathfrak{H}$ ,  $y$  et  $x_0$  sont du même côté de  $H$ . En particulier, c'est le cas de  $x$ , et donc  $x \in C$ .  $\square$

**Proposition 8.** *Le groupe  $W$  agit transitivement sur l'ensemble des chambres. Il est engendré par les réflexions affines par rapport aux murs d'une chambre fixée.*

*Démonstration.* Fixons une chambre  $C$ , et soit  $W_m$  le sous-groupe de  $W$  engendré par les réflexions par rapport aux murs de  $C$ . Montrons tout d'abord que pour tout  $x \in V \setminus \cup_{i,j,k} H_{(i,j),k}$ , il existe  $w \in W_m$  tel que  $w(x) \in C$ . Soit  $O_x$  l'orbite de  $x$  par  $W_m$ , et soit  $x_0 \in C$ . Comme  $W/Q \simeq \mathfrak{S}_n$  est fini, il existe une boule centrée en  $x_0$  dont l'intersection avec  $O_x$  est finie, et par conséquent, il existe  $y \in O_x$  tel que  $\|y - x_0\| \leq \|y' - x_0\|$  pour tout  $y' \in O_x$ . Montrons que  $y \in C$ . Pour cela, d'après le lemme précédent, il suffit de montrer que pour tout mur  $H$  de  $C$ ,  $y$  est du même côté de  $H$  que  $x_0$ . Soit  $H$  un mur de  $C$  et  $\sigma_H$  la réflexion par rapport à  $H$ . On a  $\sigma_H \in W_m$  donc  $\sigma_H(y) \in O_x$ . Par définition de  $y$ ,  $\|\sigma_H(y) - x_0\| \geq \|y - x_0\|$ . Or,  $y$  et  $\sigma_H(y)$  sont de part et d'autre de  $H$ ; ils ne sont pas sur  $H$ , car  $x$  appartient à une chambre, donc  $y$  et  $\sigma_H(y)$  aussi. Puisque  $y$  est plus proche de  $x_0$  que  $\sigma_H(y)$ , on déduit à l'aide du théorème de Pythagore que c'est  $y$  qui est du même côté de  $H$  que  $x_0$  (voir figure 2). Ceci étant vrai pour tout mur  $H$  de  $C$ ,  $y \in C$ .

Ce résultat préliminaire établi, montrons maintenant que  $W$ , et même  $W_m$ , agit transitivement sur l'ensemble des chambres. Soit  $C'$  une chambre et  $x'_0 \in C'$ . D'après ce qui précède, il existe  $w \in W_m$  tel que  $w(x'_0) \in C$ . Ainsi,  $w(C')$  est une chambre qui contient un point de  $C$  : c'est donc  $C$  elle-même.



Pour montrer que  $W = W_m$ , il suffit de montrer que pour tous  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $k \in \mathbb{Z}$ , la réflexion  $\sigma' = \sigma_{(i,j),k}$  est dans  $W_m$ . Soit  $C'$  une chambre dont  $H' = H_{(i,j),k}$  est un mur. Alors il existe  $w \in W_m$  tels que  $w(C') = C$ , et par suite, il existe un mur  $H$  de  $C$  tel que  $w(H') = H$ . On a donc  $\sigma' = w^{-1} \circ \sigma_H \circ w$  qui est bien un élément de  $W_m$ . Par conséquent,  $W$  est engendré par les réflexions par rapports aux murs de  $C$ .  $\square$

En particulier, toutes les chambres sont isométriques.

**Proposition 9.** *Les chambres sont des simplexes (de dimension  $n - 1$ ). (Elles ont donc  $n$  murs.)*

*Démonstration.* Comme toutes les chambres sont isométriques, il suffit d'exhiber une chambre qui soit un simplexe. Soit  $C = \{x \in V, \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, x_i - x_{i+1} > 0, x_1 - x_n < 1\}$ . On vérifie sans peine qu'il s'agit d'un simplexe de sommets les

$$P_i = \left( \underbrace{\frac{i}{n}, \dots, \frac{i}{n}}_{n-i}, \underbrace{-\frac{n-i}{n}, \dots, -\frac{n-i}{n}}_i \right)$$

en résolvant les  $n$  systèmes linéaires obtenus en choisissant  $n - 1$  équations parmi les  $n$  suivantes :  $x_i - x_{i+1} = 0, x_1 - x_n = 1$  et en ajoutant l'équation  $x_1 + \dots + x_n = 0$ . Il s'agit également bien d'une chambre. En effet,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in V$  appartient à  $C$  si et seulement si  $x_n < x_{n-1} < \dots < x_1 < x_n + 1$ , ce qui est encore équivalent au fait que, pour  $i < j, \langle x | e_i - e_j \rangle = x_i - x_j < k$  si  $k \geq 1$ , et  $x_i - x_j > k$  si  $k \leq 0$ . En remarquant que  $H_{(j,i),k} = H_{(i,j),-k}$ , on en déduit que  $C$  est une chambre.  $\square$

Intéressons-nous plus précisément à la géométrie d'une chambre. Supposons que  $n > 2$ . Soient  $H$  et  $H'$  deux murs d'une chambre  $C$ , et soit  $F$  l'intersection de  $H$  et  $H'$  (c'est un sous-espace de dimension  $n - 3$ ). En coupant la chambre  $C$  par un plan perpendiculaire à  $F$ , on peut mesurer l'angle entre  $H$  et  $H'$ .

**Proposition 10.** *L'angle (géométrique) entre  $H$  et  $H'$  est égal, soit à  $\frac{\pi}{6}$  radians, soit à  $\frac{\pi}{4}$  radians. Plus précisément, il existe une indexation  $(H_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$  des murs de  $C$  de sorte que l'angle entre  $H_i$  et  $H_{i+1}$  soit  $\frac{\pi}{6}$ , et l'angle entre  $H_i$  et  $H_j$  pour  $i$  et  $j$  distincts et non consécutifs soit  $\frac{\pi}{4}$ .*

*Démonstration.* Considérons par exemple la chambre  $C = \{x \in V, \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, x_i - x_{i+1} > 0, x_1 - x_n < 1\}$  dont les murs sont les  $n$  hyperplans  $H_i = H_{(i,i+1),0}$  et  $H_0 = H_{(1,n),1}$ . Par définition des  $H_{(i,j),k}$ , un vecteur normal à l'hyperplan  $H_{(i,j),k}$  est  $e_i - e_j$ . Posons  $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$  pour  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  et  $\alpha_0 = e_n - e_1$ . L'angle  $\theta_{i,j} \in [0, \pi[$  entre les hyperplans  $H_i$  et  $H_j$  vérifie  $\cos \theta_{i,j} = -\frac{\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle}{\|\alpha_i\| \|\alpha_j\|}$ . Pour  $i \neq j$ , on a  $\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle = 0$  si  $i - j \neq -1, 1$  et  $\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle = -1$  si  $i = j + 1$  ou  $j = i + 1$ , et  $\|\alpha_i\| \|\alpha_j\| = 2$ . On en déduit que  $\cos \theta_{i,j} = 0$ , c'est-à-dire  $\theta_{i,j} = \frac{\pi}{2}$ , si  $i - j \neq -1, 0, 1$ , et  $\cos \theta_{i,i+1} = \frac{1}{2}$ , c'est-à-dire  $\theta_{i,i+1} = \frac{\pi}{3}$ .

L'indexation des murs d'une chambre quelconque se déduit de celle de  $C$  par l'action du groupe de Weyl affine.  $\square$

## 2 Présentation de l'espace des orbites régulières

Rappelons que l'on a noté  $H_{(i,j),k}$  l'hyperplan affine de  $V$  formé des vecteurs  $x$  tels que  $\langle x | e_i - e_j \rangle = k$ . Nous notons également  $V_{(i,j),k}^+ = \{x, \langle x | e_i - e_j \rangle > k\}$  et  $V_{(i,j),k}^- = \{x, \langle x | e_i - e_j \rangle < k\}$  les deux demi-espaces ouverts séparés par  $H_{(i,j),k}$ . Dans la suite, il arrivera que l'on indexe certains des hyperplans affines ci-dessus par un seul indice. Dans ce cas, on notera  $V_i^\pm$  les demi-espaces ouverts séparés par l'hyperplan  $H_i$ . On notera également  $H_i^0$  l'hyperplan linéaire direction de l'hyperplan affine  $H_i$  et  $V_i^{0\pm}$  les demi-espaces ouverts séparés par  $H_i^0$ .

Considérons l'espace  $V_{\mathbb{C}} = V + \mathbf{i}V$  complexifié de  $V$ . Le groupe  $W$  agit sur  $V_{\mathbb{C}}$  de la façon suivante : soit  $\sigma \in W$  la réflexion affine d'hyperplan  $H_{(i,j),k}$ ,  $\sigma^0$  la réflexion linéaire d'hyperplan  $H_{(i,j),0}$ , et soit  $x + \mathbf{i}y \in V_{\mathbb{C}}$ . Alors  $\sigma(x + \mathbf{i}y) = \sigma(x) + \mathbf{i}\sigma^0(y)$ . On note

$$Y = V_{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{i,j,k} (H_{(i,j),k} + \mathbf{i}H_{(i,j),0}).$$

Les points de  $Y$  sont appelés *points réguliers* pour l'action de  $W$  sur  $V_{\mathbb{C}}$ . Ce sont les points qui ne sont stables par aucun élément de  $W$  excepté l'identité. De manière évidente, le groupe  $W$  agit encore sur  $Y$ . L'espace  $Y/W$  est appelé *espaces des orbites régulières* sous  $W$ . On note  $\pi$  la projection canonique de  $Y$  dans  $Y/W$ . Contrairement à  $V \setminus \bigcap_{i,j,k} H_{(i,j),k}$ , l'espace  $Y$  est connexe par arcs. Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant.

**Théorème 11.** *Le groupe fondamental de l'espace  $Y/W$  admet une présentation par générateurs et relations définie par les générateurs  $(s_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$  et, pour  $n \geq 3$ , les relations*

- (a)  $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ,
- (b)  $s_i s_j = s_j s_i$  pour tous  $i$  et  $j$  tels que  $i - j \neq -1, 0, 1$ .

Nous allons construire une décomposition cellulaire  $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}$  de  $Y$ , obtenue de manière naturelle à partir de la décomposition  $\mathcal{C}$  de  $V$  définie dans la section précédente. Les  $(2n - 2)$ -cellules de  $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}$  sont les parties de la forme  $C + \mathbf{i}V$  où  $C$  est une chambre, et pour  $d \geq 1$ , les  $(2n - 2 - d)$ -cellules sont les parties de la forme  $Z + \mathbf{i}V_{i_1}^{0\pm} \cap \dots \cap V_{i_d}^{0\pm}$  où  $Z$  est une  $(n - 1 - d)$ -cellule de  $\mathcal{C}$ , et où  $\{H_{i_1}, \dots, H_{i_d}\}$  est l'ensemble des hyperplans parmi les  $H_{(i,j),k}$  qui contiennent  $Z$ . Par exemple, les  $(2n - 3)$ -cellules sont les parties de la forme  $C_i + \mathbf{i}V_i^{0\pm}$  où  $C_i$  est une  $(n - 2)$ -cellule de mur  $H_i$ . On obtient bien ainsi une décomposition cellulaire de  $Y$ . Remarquons que chaque  $(2n - 3)$ -cellule borde exactement deux  $(2n - 2)$ -cellules. C'est une conséquence du fait que, dans  $\mathcal{C}$ , chaque  $(n - 2)$ -cellule est face d'exactly deux chambres.

Comme dans le cas de  $\mathcal{C}$ , le groupe de Weyl  $W$  transforme toute  $d$ -cellule de  $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}$  en une  $d$ -cellule et agit transitivement sur l'ensemble des  $(2n - 2)$ -cellules. On obtient ainsi une décomposition cellulaire  $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}/W$  sur  $Y/W$ , qui n'a qu'une seule  $(2n - 2)$ -cellule.

Fixons une chambre  $C$  de  $V$ , et un point  $p(C + \mathbf{i}V)$  dans  $C + \mathbf{i}V$ . On choisit le point  $\tilde{p} = \pi(p(C + \mathbf{i}V))$  de la  $(2n - 2)$ -cellule de  $Y/W$  comme point base pour le calcul du groupe fondamental. Un lacet de base  $\tilde{p}$  dans  $Y/W$  se relève dans  $Y$  en un unique chemin partant de  $p(C + \mathbf{i}V)$ .

Pour chaque mur  $H_i$  de  $C$ , on fixe également un point  $p(C_i + \mathbf{i}V_i^{0\pm})$  dans  $C_i + \mathbf{i}V_i^{0\pm}$ . Si  $C'$  est une  $(2n - 2)$ -cellule ou  $(2n - 3)$ -cellule quelconque de  $\mathcal{C}_C$ , elle est conjuguée par  $W$  à une et une seule des cellules  $C + \mathbf{i}V$  ou  $C_i + \mathbf{i}V_i^{0\pm}$ , et on note  $p(C')$  le point de l'orbite de  $p(C + \mathbf{i}V)$  ou  $p(C_i + \mathbf{i}V_i^{0\pm})$  qui appartient à  $C'$ .

**Définition 12.** Soit  $C'$  une  $(2n - 2)$ -cellule,  $M$  une  $(2n - 3)$ -cellule bordant  $C'$ , et  $C''$  l'autre  $(2n - 2)$ -cellule bordée par  $M$ . On appelle *chemin élémentaire (passant par  $M$ )* dans  $Y$  un chemin  $\gamma$  allant de  $p(C')$  à  $p(C'')$  tel que  $\gamma([0, 1])$  est la réunion des segments  $[p(C')p(M)]$  et  $[p(M)p(C'')]$ .

Les cellules de  $\mathcal{C}_C$  sont toutes convexes, et par conséquent,  $[p(C')p(M)]$  est entièrement contenu dans  $C'$  et  $[p(M)p(C'')]$  est entièrement contenu dans  $C''$ .

Il y a, à homotopie près, deux chemins élémentaires passant par  $M$  : celui allant de  $p(C')$  à  $p(C'')$  et celui allant de  $p(C'')$  à  $p(C')$ . La classe d'homotopie de l'un est l'inverse de la classe d'homotopie de l'autre.

**Définition 13.** On appelle *chemin simple* un chemin de  $Y$  qui est composé d'un nombre fini de chemins élémentaires.

Soit  $\gamma = \delta_1 \cdots \delta_r$  un chemin simple, les  $\delta_i$  étant des chemins élémentaires. On suppose qu'il existe des  $(2n - 2)$ -cellules  $C_1, \dots, C_r$  et des  $(2n - 3)$ -cellules  $M_1, \dots, M_r$  dans  $\mathcal{C}_C$  telles que

- $M_i$  borde  $C_i$  et  $C_{i+1}$  (resp.  $C_r$  et  $C_1$ ) et  $\delta_i$  est un chemin de  $p(C_i)$  vers  $p(C_{i+1})$  (resp. de  $p(C_r)$  vers  $p(C_1)$ ) passant par  $M_i$ , pour tout  $i \in \llbracket 1, r - 1 \rrbracket$  (resp.  $i = r$ ),
- les  $\overline{M}_i$  s'intersectent le long d'une  $(2n - 4)$ -cellule  $N$  commune.

On dit alors que le chemin  $\gamma$  *entoure la  $(2n - 4)$ -cellule  $N$* .

**Lemme 14.** *Tout chemin de  $Y$  est homotope à un chemin simple.*

*Démonstration.* Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y$  un chemin dans  $Y$ . Comme  $Y$  est connexe, on peut, sans perte de généralités, supposer que les extrémités de  $\gamma$  sont dans des  $(2n - 2)$ -cellules de  $\mathcal{C}_C$ . Il est évident que  $\gamma$  ne rencontre qu'un nombre fini de cellules, car  $\gamma([0, 1])$  est compact. Pour montrer le lemme, il suffit d'établir que l'on peut déformer  $\gamma$  en un chemin qui ne rencontre que des  $(2n - 2)$ -cellules et des  $(2n - 3)$ -cellules, et qui traverse chaque  $(2n - 3)$ -cellule transversalement. Numérotions  $C_1, \dots, C_r$  les  $(2n - 2)$ -cellules traversées (dans cet ordre) par  $\gamma$ . Il existe une subdivision  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1$  de  $[0, 1]$  telle que  $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subset \overline{C}_i$ . Quitte à déformer un peu le chemin  $\gamma$ , on peut supposer que  $\gamma$  traverse les frontières des  $C_i$  transversalement en les points  $t_i$ . Si pour tout  $i$ ,  $\gamma(t_i)$  est contenu dans une  $(2n - 3)$ -cellule, le lemme est démontré. Sinon, il existe des

indices  $i$  tels que  $\gamma(t_i)$  soit dans une cellule de dimension inférieure ou égale à  $2n - 4$ . Pour tout  $i$ , soit  $B_i$  une boule ouverte contenant  $\gamma(t_i)$  et contenue dans  $Y$ , suffisamment petite pour que les  $B_i$  soient deux à deux disjointes. Comme la boule  $B_i$  est contractile, on peut déformer la partie du chemin  $\gamma$  dans  $B_i$  en un chemin qui ne passe plus par les  $k$ -cellules pour  $k < 2n - 3$  et qui traverse les  $(2n - 3)$ -cellules transversalement. Le nombre de points  $\gamma(t_i)$  étant fini, on peut ainsi déformer le chemin  $\gamma$  de sorte qu'il ne traverse que des  $(2n - 2)$ -cellules et  $(2n - 3)$ -cellules.  $\square$

Soient  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  deux chemins simples. On dit que  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont *simplement équivalents* si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont de la forme

$$\gamma_1 = l_1 \delta_1 \cdots \delta_r l_2 \text{ et } \gamma_2 = l_1 \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_t l_2$$

avec  $\delta_1, \dots, \delta_r, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t$  des chemins élémentaires tels que  $\delta_1 \cdots \delta_r \varepsilon_t^{-1} \cdots \varepsilon_1^{-1}$  entoure une  $(2n - 4)$ -cellule.

On dit que  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont *équivalents* s'il existe une suite finie de chemins  $\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(r)}$  avec  $\gamma^{(1)} = \gamma_1$ ,  $\gamma^{(r)} = \gamma_2$  et  $\gamma^{(i)}$  simplement équivalent à  $\gamma^{(i+1)}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, r - 1 \rrbracket$ .

**Lemme 15.** *Deux chemins simples sont équivalents si et seulement si ils sont homotopes.*

*Démonstration.* Par définition, il est clair que deux chemins simples équivalents sont homotopes. Inversement, soit  $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y$  une homotopie entre deux chemins  $\gamma$  et  $\gamma'$ . Par un argument similaire à celui du lemme précédent, on peut déformer la surface  $F([0, 1] \times [0, 1])$  de sorte qu'elle ne rencontre que des  $(2n - 2)$ -cellules, des  $(2n - 3)$ -cellules et des  $(2n - 4)$ -cellules, et qu'elle coupe les  $(2n - 4)$ -cellules transversalement. On peut alors transformer  $\gamma$  en  $\gamma'$  à l'aide de cette nouvelle surface ; lors de cette transformation, à chaque fois que la surface traverse une  $(2n - 4)$ -cellule,  $\gamma$  est transformé en un chemin qui lui est simplement équivalent, et au final,  $\gamma$  est bien équivalent à  $\gamma'$ .  $\square$

Terminons maintenant la démonstration du théorème 11. Soit  $\pi(\gamma)$  un lacet dans  $Y/W$  de base  $\tilde{p}$ , qui se relève en un chemin  $\gamma$  de base  $p(C)$  dans  $Y$ . Soit  $\delta_1 \cdots \delta_r$  un chemin simple homotope à  $\gamma$ , où  $\delta_i$  est un chemin élémentaire pour tout  $i$ . Alors  $\pi(\delta_1) \cdots \pi(\delta_r)$  est homotope à  $\pi(\gamma)$  dans  $Y/W$ .

Si  $\delta$  et  $\delta'$  sont deux chemins élémentaires, nous cherchons à quelle condition  $\pi(\delta)$  et  $\pi(\delta')$  sont homotopes.

**Lemme 16.** *Soit  $C \in \mathcal{C}$  une chambre fixée, et  $C_1, \dots, C_n$  ses faces. Les  $(2n - 3)$ -cellules dans  $Y/W$  sont au nombre de  $n$  et sont exactement les  $\pi(C_i + \mathbf{i}V_i^{0+})$  (où les  $V_i^{0\pm}$  désignent les demi-espaces séparés par l'hyperplan linéaire de  $V$  parallèle au support de  $C_i$ ).*

*Démonstration.* Soit  $M$  une  $(2n - 3)$ -cellule quelconque de  $Y$ , et  $C' + \mathbf{i}V$  une chambre qu'elle borde. L'application  $w \in W$  qui envoie  $C'$  sur  $C$  envoie  $M$  sur l'une des cellules  $C_i + \mathbf{i}V_i^{0\pm}$ . En outre, si  $\sigma_i \in W$  désigne la réflexion par rapport au support de  $C_i$ , on a, dans  $V_{\mathbb{C}}$ ,  $\sigma_i(C_i + \mathbf{i}V_i^{0-}) = C_i + \mathbf{i}V_i^{0+}$ .

Par ailleurs, les cellules  $\pi(C_i + \mathbf{i}V_i^{0+})$  sont deux à deux distinctes, car les cellules  $C_i$  ne sont pas conjuguées par  $W$  dans  $V$ .  $\square$

Soient  $\delta$  et  $\delta'$  deux chemins élémentaires. Notons  $M$  et  $M'$  les  $(2n - 3)$ -cellules traversées par  $\delta$  et  $\delta'$  respectivement. Alors  $\pi(M) = \pi(M')$  si et seulement si  $\pi(\delta)$  est homotope à  $\pi(\delta')$  ou à  $\pi(\delta')^{-1}$ .

Si  $n > 2$ , on numérote les murs de  $C$  comme dans la proposition 10 et on note  $C_i$  la face de  $C$  qui est incluse dans  $H_i$ . Soit  $\gamma_i$  un chemin élémentaire qui part de  $p(C + \mathbf{i}V)$  en passant par  $C_i + \mathbf{i}V_i^{0+}$ , et soit  $s_i = [\pi(\gamma_i)]$  la classe d'homotopie dans  $Y/W$  de  $\pi(\gamma_i)$ . Ce qui précède montre que  $(s_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$  est une famille de générateurs de  $\pi_1(Y/W)$ . Il reste à présent à trouver les relations qui les relient.

**Lemme 17.** *Supposons que  $n > 2$ . Alors, pour tout  $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ,  $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$  et pour tous  $i, j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  tels que  $i - j \neq -1, 0, 1$ ,  $s_i s_j = s_j s_i$ . Ces relations définissent le groupe  $\pi_1(Y/W)$ .*

*Démonstration.* Soient  $\pi(\gamma)$  et  $\pi(\gamma')$  deux lacets dans  $Y/W$  qui se relèvent dans  $Y$  en deux chemins simples  $\gamma$  et  $\gamma'$  partant de  $p(C + \mathbf{i}V)$ .

Comme  $\gamma$  et  $\gamma'$  partent du même point,  $\pi(\gamma)$  et  $\pi(\gamma')$  sont homotopes si et seulement si  $\gamma$  et  $\gamma'$  le sont, ce qui, d'après le lemme 15, est le cas si et seulement si  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont équivalents en tant que chemins simples.

Par définition de l'équivalence, ceci nous amène à étudier les conditions sous lesquelles un produit  $\delta_1 \cdots \delta_r$  de chemins simples est un lacet entourant une  $(2n - 4)$ -cellule. On note  $s(\delta_j)$  la classe d'homotopie de  $\pi(\delta_j)$ ;  $s(\delta_j)$  est l'un des  $s_i$  ou des  $s_i^{-1}$ . Fixons une  $(2n - 4)$ -cellule et considérons un plan (réel) orthogonal à celle-ci en un de ses points. Dans ce plan, l'arrangement des  $(2n - 3)$ -cellules autour de la  $(2n - 4)$ -cellule est tel que représenté sur la figure 3 ou la figure 4 (selon l'angle entre les  $(2n - 3)$ -cellules, voir la proposition 10). Supposons que  $\delta_1 \cdots \delta_r$  entoure notre  $(2n - 4)$ -cellule. Si l'on est dans le premier cas, alors à inversion ou permutation circulaire près, on a  $r = 6$  et pour un certain  $i$ ,  $s(\delta_1) = s(\delta_3) = s_i$ ,  $s(\delta_2) = s_{i+1}$ ,  $s(\delta_4) = s(\delta_6) = s_{i+1}^{-1}$  et  $s(\delta_5) = s_i^{-1}$ . Dans le deuxième cas, à inversion ou permutation circulaire près, on a  $r = 4$  et pour certains  $i, j$  distincts et non consécutifs,  $s(\delta_1) = s_i$ ,  $s(\delta_2) = s_j$ ,  $s(\delta_3) = s_i^{-1}$  et  $s(\delta_4) = s_j^{-1}$ . Inversement, si les  $\delta_i$  vérifient l'une ou l'autre de ces deux situations, alors  $\delta_1 \cdots \delta_r$  entoure une  $(2n - 4)$ -cellule. On obtient ainsi les relations annoncées.

Les chemins  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont équivalents si et seulement si on peut passer de l'un à l'autre en appliquant une suite finie de ces relations. Le lemme est démontré.  $\square$

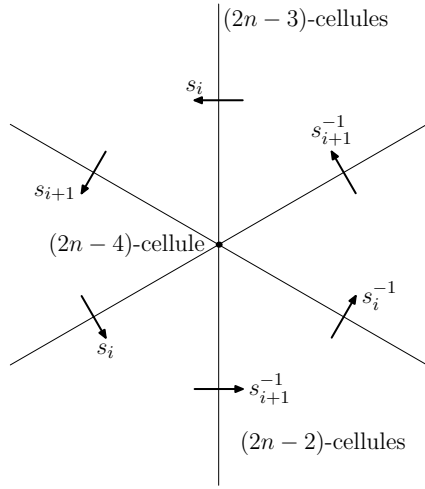


FIG. 3 – Angle de  $\frac{\pi}{6}$  radians

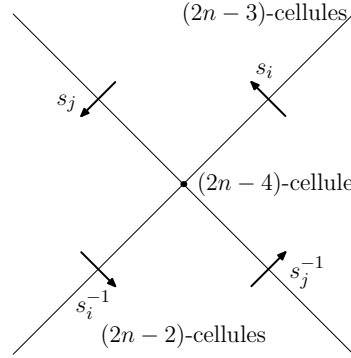


FIG. 4 – Angle de  $\frac{\pi}{4}$  radians

Dans les cas particuliers de  $n = 1$  ou  $2$ , il n'y a pas de  $(2n - 4)$ -cellule, et donc pas de relation. Nous avons achevé la démonstration du théorème 11.

### 3 Présentation du groupe de tresses étendu

Dans cette partie, on donne une présentation du groupe des tresses à  $n$  brins dans  $\mathbb{C}^*$ , c'est-à-dire du groupe  $\tilde{\mathcal{B}}_n = \pi_1(\{S \subset \mathbb{C}^*, |S| = n\})$ .

**Théorème 18.** *Le groupe  $\tilde{\mathcal{B}}_n$  admet la présentation par générateurs et relations suivante. Générateurs :  $(s_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ ,  $u$ . Relations :*

1. (a)  $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , si  $n \geq 3$ ,  
 (b)  $s_i s_j = s_j s_i$  pour  $i$  et  $j$  tels que  $i - j \neq -1, 0, 1$ ,
2.  $u s_i u^{-1} = s_{i-1}$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

**Lemme 19.** *L'espace  $Y/W$  est homéomorphe à l'espace*

$$\{S \subset \mathbb{C}^*, |S| = n, \prod_{z \in S} z = 1\}.$$

*Démonstration.* Rappelons que, d'après le lemme 2, le groupe de Weyl affine  $W$  est isomorphe au produit semi-direct  $\mathfrak{S}_n \ltimes Q$ , où  $Q$  est le réseau de  $V = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 + \dots + x_n = 0\}$  engendré par les racines  $e_i - e_j$ . Le groupe  $\mathfrak{S}_n$  agit sur  $V$  et  $V_{\mathbb{C}}$  par permutation des coordonnées et le réseau  $Q$  par translation de la partie réelle (la

partie imaginaire restant fixe). Ainsi l'espace  $Y/W$  est-il homéomorphe à  $(Y/Q)/\mathfrak{S}_n$ . Or  $Y/Q$  est homéomorphe à

$$\{(z_1, \dots, z_n) \in (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^n, z_i \neq z_j \text{ si } i \neq j, z_1 + \dots + z_n = 0\}.$$

En effet,  $Y = V_{\mathbb{C}} \cap (\mathbb{C}^n \setminus \cup_{i \neq j, k \in \mathbb{Z}} \{z_i - z_j = k\})$  et, lorsque l'on plonge  $Q$  dans  $V_{\mathbb{C}}$ , on a  $Q = V_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{Z}^n$ .

On en déduit que  $Y/W \simeq (Y/Q)/\mathfrak{S}_n$  est homéomorphe à

$$\{S \subset \mathbb{C}/\mathbb{Z}, |S| = n, \sum_{z \in S} z = 0\}$$

qui, au moyen de l'application  $\exp(2i\pi \cdot)$ , est encore homéomorphe à

$$\{S \subset \mathbb{C}^*, |S| = n, \prod_{z \in S} z = 1\},$$

ce que l'on voulait démontrer. □

Posons  $A = \{S \subset \mathbb{C}^*, |S| = n, \prod_{z \in S} z = 1\}$  et  $B = \{S \subset \mathbb{C}^*, |S| = n\}$ . Rappelons que  $\pi_1(Y/W) = \pi_1(A, p)$  et  $\tilde{\mathcal{B}}_n = \pi_1(B, p)$ , où on choisit comme point base  $p = \{\eta, \eta\zeta, \dots, \eta\zeta^{n-1}\}$  où  $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$  et  $\eta = 1$  si  $n$  est impair,  $\eta = e^{\frac{i\pi}{n}}$  si  $n$  est pair. D'après le théorème 11 et le lemme 19,

$$\pi_1(A) \simeq \langle (s_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} ; \text{relations 1. (a) et (b) si } n \geq 3 \rangle.$$

Soit  $\gamma$  est un lacet dans  $B$ , c'est-à-dire une application continue de  $[0, 1]$  dans  $B$  telle que  $\gamma(0) = \gamma(1) = p$ . Pour  $i$  de 0 à  $n$ , on note  $\gamma_i$  les chemins continus de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{C}^*$  tels que  $\gamma_i(0) = \eta\zeta^i$  et  $\gamma(t) = \{\gamma_0(t), \dots, \gamma_{n-1}(t)\}$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . Alors l'application  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$  définie par  $\tilde{\gamma}(t) = \gamma_0(t) \gamma_1(t) \cdots \gamma_{n-1}(t)$  est un lacet de  $\mathbb{C}^*$  de base 1. En effet,  $\tilde{\gamma}(0) = \eta \times \eta\zeta \times \cdots \times \eta\zeta^{n-1} = 1$ ; de plus, il existe une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  telle que  $\gamma_i(1) = \eta\zeta^{\sigma(i)}$  pour tout  $i$ , et  $\tilde{\gamma}(1) = \eta\zeta^{\sigma(0)} \times \cdots \times \eta\zeta^{\sigma(n-1)} = 1$ . On définit alors  $\text{ind}(\gamma)$  comme l'indice du lacet  $\tilde{\gamma}$  dans  $\mathbb{C}^*$ . L'application  $\text{ind}$  ne dépend que de la classe d'homotopie de  $\gamma$  et induit un morphisme de groupes de  $\tilde{\mathcal{B}}_n$  dans  $\mathbb{Z}$ , encore noté  $\text{ind}$ .

**Lemme 20.** *On a une suite exacte scindée*

$$0 \longrightarrow \pi_1(A, p) \longrightarrow \tilde{\mathcal{B}}_n \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

*Démonstration.* Commençons par montrer que le morphisme  $\pi_1(A) \rightarrow \pi_1(B)$ , morphisme canonique induit par l'inclusion  $A \subset B$ , est injectif. Posons  $C = \{(S, \alpha), S \subset \mathbb{C}^*, |S| = n, \alpha \in \mathbb{C}^*, \alpha^n = \prod_{z \in S} z\}$ . Montrons alors que  $C$  muni de l'application  $\text{pr} : C \rightarrow B, (S, \alpha) \mapsto S$  est un revêtement de  $B$  à  $n$  feuillets. L'application  $z \mapsto z^n$

définit un revêtement à  $n$  feuillets de  $\mathbb{C}^*$  par  $\mathbb{C}^*$ , ce qui signifie que l'on peut définir localement  $n$  déterminations continues de la racine  $n$ -ième. Soit  $S = \{z_1, \dots, z_n\} \in B$ , et soient  $U_1, \dots, U_n$  des voisinages respectifs de  $z_1, \dots, z_n$  dans  $\mathbb{C}^*$ , qui soient deux à deux disjoints, et tels que l'on puisse définir  $n$  déterminations continues de la racine  $n$ -ième sur  $U_1 \cdots U_n = \{z'_1 \cdots z'_n, z_i \in U_i\}$ , que l'on numérote  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Soit alors  $U = \{\{z'_1, \dots, z'_n\}, z'_i \in U_i\}$ . C'est un voisinage de  $S$  dans  $B$ . On a  $\text{pr}^{-1}(U) = \{(S', \alpha') \in C, S' \in U\}$ , et en utilisant les déterminations de la racine  $n$ -ième choisies,

$$\text{pr}^{-1}(U) = \{(\{z'_1, \dots, z'_n\}, \alpha_i(z'_1 \cdots z'_n)), \{z'_1, \dots, z'_n\} \in U, i \in \llbracket 1, n \rrbracket\},$$

qui est homéomorphe à  $U \times \llbracket 1, n \rrbracket$ . L'espace  $C$  est homéomorphe à  $A \times \mathbb{C}^*$  via les applications réciproques l'une de l'autre

$$(\{z_1, \dots, z_n\}, \alpha) \mapsto (\{z_1, \dots, z_n\}, \alpha)$$

et

$$(\{z_1 \alpha, \dots, z_n \alpha\}, \alpha) \leftarrow (\{z_1, \dots, z_n\}, \alpha)$$

et le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} & & C \\ & \nearrow^{S \mapsto (S,1)} & \downarrow \text{pr} \\ A & \xrightarrow{c} & B \end{array}$$

Cela induit sur les groupes fondamentaux un isomorphisme  $\pi_1(C) \simeq \pi_1(A) \times \mathbb{Z}$  ainsi que des morphismes

$$\begin{array}{ccc} & & \pi_1(C) \\ & \nearrow & \downarrow \text{pr}_* \\ \pi_1(A) & \longrightarrow & \pi_1(B) \end{array}$$

Puisque  $\text{pr} : C \rightarrow B$  est un revêtement,  $\text{pr}_*$  est injective. L'application  $\pi_1(A) \rightarrow \pi_1(C)$  est simplement l'inclusion de  $\pi_1(A)$  dans  $\pi_1(C) \simeq \pi_1(A) \times \mathbb{Z}$  donc est également injective, et par conséquent, la composée  $\pi_1(A) \rightarrow \pi_1(B)$  est elle aussi injective.

Montrons à présent que  $\ker \text{ind} = \pi_1(A)$ . Soit  $\gamma$  un lacet dans  $A$ . Alors pour tout  $t$ ,  $\tilde{\gamma}(t) = \gamma_0(t)\gamma_1(t) \cdots \gamma_{n-1}(t) = 1$ , donc l'indice de  $\tilde{\gamma}$  dans  $\mathbb{C}^*$  est 0, et  $[\gamma] \in \ker \text{ind}$ . Inversement, soit  $[\gamma] \in \ker \text{ind}$  et  $\gamma$  un représentant de  $[\gamma]$ . L'indice de  $\tilde{\gamma}$  est nul, donc  $\tilde{\gamma}$  est homotope au lacet constant 1. Soit  $F : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{C}^*$  une telle homotopie. Comme  $F$  est une homotopie entre  $\gamma$  et le lacet trivial,  $F([0, 1]^2)$  est une partie simplement connexe de  $\mathbb{C}^*$ , et donc il existe sur  $F([0, 1]^2)$  une détermination continue de la racine  $n$ -ième. Ainsi, il existe  $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{C}^*$  telle que  $f^n = F$ . À l'aide de cette homotopie  $f$ , on déforme continûment chaque chemin  $\gamma_i$  dans  $\mathbb{C}^*$  en un chemin  $\gamma'_i$ , de sorte que, d'une



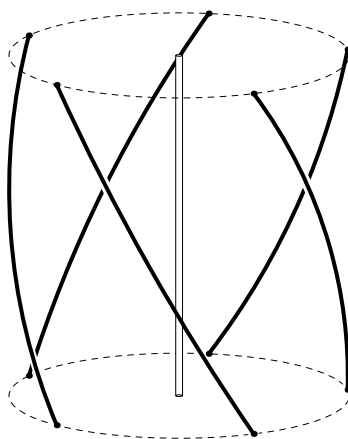


FIG. 5 – Tresse  $u$

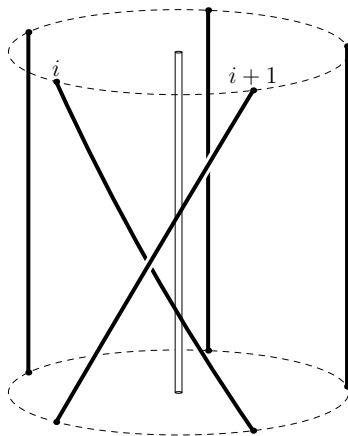


FIG. 6 – Tresse  $s_i$

part,  $\gamma'_i(t) \neq \gamma'_j(t)$  pour tout  $t$  et tous  $i \neq j$ , et d'autre part,  $\gamma'_0 \cdots \gamma'_{n-1} = 1$ . Ainsi,  $\gamma$  est homotope à  $\{\gamma'_0, \dots, \gamma'_{n-1}\}$ . On en déduit que  $[\gamma] \in \pi_1(A, p)$ .

Enfin, soit  $u$  la tresse définie par  $u_i(t) = \eta \zeta^{(1-t)i+t(i+1)}$  (voir figure 5). On a  $\tilde{u} = \zeta^{nt}$  et donc  $\text{ind}(u) = 1$ . Le morphisme  $\mathbb{Z} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}_n$  qui à  $k$  associe  $u^k$  est une section pour  $\text{ind}$ , ce qui montre que  $\tilde{\mathcal{B}}_n \rightarrow \mathbb{Z}$  est surjective et que la suite exacte est scindée.  $\square$

Ainsi,  $\tilde{\mathcal{B}}_n$  est isomorphe au produit semi-direct  $\pi_1(A, p) \rtimes \mathbb{Z}$ . Il reste à comprendre comment  $u$  agit sur le groupe  $\pi_1(A, p)$ .

**Lemme 21.** *Les générateurs  $s_i$  du théorème 11 sont représentés dans le groupe  $\pi_1(A, p)$  par les tresses de la figure 6.*

*Démonstration.* Soit  $C$  la chambre considérée dans les démonstrations des propositions 9 et 10, ses murs étant numérotés comme dans la proposition 10. Le générateur  $s_i$  tel

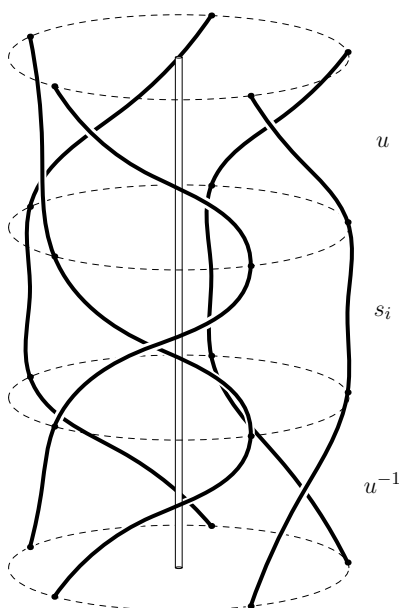


FIG. 7 –  $us_iu^{-1} = s_{i-1}$

que défini dans la section 2 est la classe d'homotopie d'un lacet qui se relève dans  $Y$  en un chemin  $\gamma$  partant du point  $p = p(C + iV)$  dans la  $(2n - 2)$ -cellule  $C + iV$  et traversant une seule fois, et transversalement, la  $(2n - 3)$ -cellule  $C_i + iV_i^{0+}$ , pour finir au point  $p'$  symétrique de  $p$  par rapport à  $H_i + iH_i^0$ . De la sorte,  $\gamma(1) = p'$  est obtenu à partir de  $\gamma(0) = p$  en échangeant les coefficients  $i$  et  $i + 1$  (sauf pour le « cas limite »  $i = n = 0$  et  $i + 1 = 1$  où, de surcroît, on ajoute 1 à l'un des coefficients et retire 1 à l'autre), ce qui correspond à un croisement des brins partant de l'extrémité  $i$  et de l'extrémité  $i + 1$ . Soit  $t \in [0, 1]$  tel que  $\gamma(t) \in C_i + iV_i^{0+}$ . On note  $y$  la partie imaginaire de  $\gamma(t)$ . On a  $y \in V_i^{0+}$ , donc  $y_i > y_{i+1}$ . Par conséquent,  $\exp(2i\pi y_i) = \exp(-2\pi y_i) < \exp(-2\pi y_{i+1}) = \exp(2i\pi y_{i+1})$  ce qui signifie que, lorsqu'ils se croisent, le brin qui part de l'extrémité  $i$  passe plus près de l'origine que celui qui part de l'extrémité  $i + 1$ .  $\square$

On vérifie alors simplement que l'action de  $u$  sur  $\pi_1(A, p)$  est donnée par  $us_iu^{-1} = s_{i-1}$  (voir figure 7), et on en déduit la présentation annoncée au théorème 18.

## 4 Une autre présentation de $\pi_1(Y/W)$

Avant d'énoncer le résultat principal de cette section, intéressons-nous au lien fort existant entre un groupe de Weyl et son groupe de tresses associé.

Le groupe de Weyl fini  $W_{\text{fin}} \simeq \mathfrak{S}_n$  admet la présentation par générateurs et relations

suivante :

$$W_{\text{fin}} = \langle s_1, \dots, s_{n-1} ; s_i^2 = 1, s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \text{ et } s_i s_j = s_j s_i \text{ pour } |i - j| \geq 2 \rangle.$$

Ainsi, la présentation du groupe de tresses

$$\mathcal{B}_n = \langle s_1, \dots, s_{n-1} ; s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \text{ et } s_i s_j = s_j s_i \text{ pour } |i - j| \geq 2 \rangle$$

est obtenue à partir de la présentation du groupe de Weyl fini en retirant la relation  $s_i^2 = 1$ . Un lien similaire existe entre une présentation du groupe de Weyl affine  $W$  et la présentation de  $\pi_1(Y/W)$  (ou de celle de  $\tilde{\mathcal{B}}_n$ ) que nous avons établie dans les sections précédentes. En effet, le groupe de Weyl affine admet la présentation suivante :

$$W = \langle (s_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} ; \text{ si } n > 2, s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}, \\ s_i s_j = s_j s_i \text{ pour } i - j \neq -1, 0, 1 \text{ et } s_i^2 = 1 \rangle$$

et il suffit là encore de retirer la relation  $s_i^2 = 1$  pour obtenir une présentation de  $\pi_1(Y/W)$ .

Par ailleurs, nous avons démontré (proposition 2) que  $W$  est produit semi-direct de  $W_{\text{fin}}$  et du réseau  $Q$ . On peut en déduire une autre présentation de  $W$ . Les générateurs sont  $s_1, \dots, s_{n-1}$  (générateurs de  $W_{\text{fin}}$ ) et  $t_1, \dots, t_{n-1}$  (générateurs de  $Q$ , avec  $t_i = \tau_{e_i - e_{i+1}}$  la translation de vecteur  $e_i - e_{i+1}$ ) soumis aux relations

1.  $s_i^2 = 1, s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}, s_i s_j = s_j s_i$  pour  $|i - j| \geq 2$ ,
2.  $t_i t_j = t_j t_i$  pour tous  $i$  et  $j$ ,
3.  $s_i t_i = t_i^{-1} s_i, s_i t_{i+1} = t_{i+1} t_i s_i, s_{i+1} t_i = t_i t_{i+1} s_{i+1}, s_i t_j = t_j s_i$  pour  $|i - j| \geq 2$ .

Remarquons que, compte tenu des relations  $s_i^2 = 1$  et  $t_i t_j = t_j t_i$ , les relations 3 peuvent être remplacées par les relations

- 3'.  $s_i t_i = t_i^{-1} s_i, s_i t_{i+1} = t_{i+1} t_i s_i^{-1}, s_{i+1} t_i = t_{i+1} t_i s_{i+1}^{-1}, s_i t_j = t_j s_i$  pour  $|i - j| \geq 2$ .

Cette présentation peut à son tour être transformée en une présentation de  $\pi_1(Y/W)$  en enlevant certaines relations.

**Théorème 22.** *Le groupe  $\pi_1(Y/W)$  admet une présentation par générateurs et relation donnée par les générateurs  $s_1, \dots, s_{n-1}, t_1, \dots, t_{n-1}$  soumis aux relations 1, 2 et 3' auxquelles on a retiré les relations  $s_i^2 = 1$  et  $s_i t_i = t_i^{-1} s_i$ .*

*Démonstration.* Notons pour le moment  $G$  le groupe présenté comme dans le théorème. Rappelons que le groupe  $\pi_1(Y/W)$  admet la présentation par générateurs et relations suivante :

$$\pi_1(Y/W) = \langle (s_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} ; \text{ si } n > 2, s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}, \\ s_i s_j = s_j s_i \text{ pour } i - j \neq -1, 0, 1 \rangle.$$

Dans la suite, on identifie un élément  $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  à l'élément de  $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$  qui lui est congru. On définit les morphismes de groupes

$$\Phi : G \rightarrow \pi_1(Y/W)$$

$$s_i \mapsto s_i$$

$$t_i \mapsto s_{i+1}^{-1} \cdots s_{n-1}^{-1} s_0 \cdots s_{i-1} s_{i-2}^{-1} \cdots s_0^{-1} s_{n-1} \cdots s_i$$

et

$$\Psi : \pi_1(Y/W) \rightarrow G$$

$$s_i \mapsto s_i$$

$$(1 \leq i \leq n-1)$$

$$s_0 \mapsto s_{n-1} \cdots s_2 t_1 s_1^{-1} \cdots s_{n-1}^{-1}$$

Il suffit de vérifier que ces morphismes sont bien définis, et qu'ils sont inverses l'un de l'autre. Pour montrer que  $\Phi$  est bien défini, il suffit de montrer que, d'une part,  $\Phi(t_i)\Phi(t_j) = \Phi(t_j)\Phi(t_i)$ , d'autre part,  $s_i\Phi(t_{i+1}) = \Phi(t_{i+1})\Phi(t_i)s_i^{-1}$ ,  $s_{i+1}\Phi(t_i) = \Phi(t_{i+1})\Phi(t_i)s_{i+1}^{-1}$  et  $s_i\Phi(t_j) = \Phi(t_j)s_i$  pour  $|i-j| \geq 2$ . Pour simplifier, on note  $S_{n \nearrow m}^+ = s_n s_{n+1} \cdots s_m$  si  $n \leq m$ ,  $S_{n \searrow m}^+ = s_n s_{n-1} \cdots s_m$  si  $n \geq m$ , de même  $S_{n \nearrow m}^- = s_n^{-1} s_{n+1}^{-1} \cdots s_m^{-1}$  et  $S_{n \searrow m}^- = s_n^{-1} s_{n-1}^{-1} \cdots s_m^{-1}$ . Par convention,  $S_{n \nearrow m}^\pm = 1$  si  $n > m$  et  $S_{n \searrow m}^\pm = 1$  si  $n < m$ . Ainsi,  $\Phi(t_i) = S_{i+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i-1}^+ S_{i-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow i}^+$ . Soit  $i \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$ . Montrons que  $s_i\Phi(t_{i+1}) = \Phi(t_{i+1})\Phi(t_i)s_i^{-1}$ . On a

$$\begin{aligned} \Phi(t_{i+1})\Phi(t_i)s_i^{-1} &= S_{i+2 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i}^+ S_{i-1 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow i+1}^+ S_{i+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i-1}^+ S_{i-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow i}^+ s_i^{-1} \\ &= S_{i+2 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i}^+ S_{i-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow i+1}^+ \end{aligned}$$

et

$$s_i\Phi(t_{i+1}) = s_i S_{i+2 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i}^+ S_{i-1 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow i+1}^+$$

L'élément  $s_i$  commute avec  $s_{i+2}^{-1}, \dots, s_{n-1}^{-1}, s_0, \dots, s_{i-2}$  donc

$$\begin{aligned} s_i\Phi(t_{i+1}) &= S_{i+2 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i-2}^+ s_i s_{i-1} s_i S_{i-1 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow i+1}^+ \\ &= S_{i+2 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i-2}^+ s_{i-1} s_i s_{i-1} S_{i-1 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow i+1}^+ \\ &= S_{i+2 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i}^+ S_{i-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow i+1}^+ = \Phi(t_{i+1})\Phi(t_i)s_i^{-1}. \end{aligned}$$

D'où  $s_i\Phi(t_{i+1}) = \Phi(t_{i+1})\Phi(t_i)s_i^{-1}$ . Montrons que  $s_{i+1}\Phi(t_i) = \Phi(t_{i+1})\Phi(t_i)s_{i+1}^{-1}$ . D'une part,

$$\begin{aligned} \Phi(t_{i+1})\Phi(t_i)s_{i+1}^{-1} &= S_{i+2 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i}^+ S_{i-1 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow i+1}^+ S_{i+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i-1}^+ S_{i-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow i}^+ s_{i+1}^{-1} \\ &= S_{i+2 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i}^+ S_{i-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow i}^+ s_{i+1}^{-1}, \end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned} s_{i+1}\Phi(t_i) &= S_{i+2 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i-1}^+ S_{i-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow i}^+ \\ &= S_{i+2 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i}^+ s_i^{-1} S_{i-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow i}^+ \\ &= S_{i+2 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i}^+ S_{i-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow i+2}^+ s_i^{-1} s_{i+1} s_i \\ &= S_{i+2 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i}^+ S_{i-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow i}^+ s_{i+1}^{-1} = \Phi(t_{i+1})\Phi(t_i)s_{i+1}^{-1}. \end{aligned}$$

car  $s_i^{-1}$  commute avec  $s_{i-2}, \dots, s_0, s_{n-1}, \dots, s_{i+2}$  et la relation  $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$  est équivalente à  $s_i^{-1} s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}^{-1}$ .

Soient maintenant  $i, j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  tels que  $|i-j| \geq 2$ , montrons que  $s_i \Phi(t_j) = \Phi(t_j) s_i$ . Supposons d'abord que  $i > j$ . Alors

$$\begin{aligned}
s_i \Phi(t_j) &= s_i S_{j+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow j-1}^+ S_{j-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow j}^+ \\
&= S_{j+1 \nearrow i-2}^- s_i s_{i-1} s_i S_{i+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow j-1}^+ S_{j-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow j}^+ \\
&= S_{j+1 \nearrow i-2}^- s_{i-1} s_i s_{i-1} S_{i+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow j-1}^+ S_{j-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow j}^+ \\
&= S_{j+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow j-1}^+ S_{j-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow i+1}^+ s_{i-1} s_i s_{i-1} S_{i-2 \searrow j}^+ \\
&= S_{j+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow j-1}^+ S_{j-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow i+1}^+ s_i s_{i-1} s_i S_{i-2 \searrow j}^+ \\
&= S_{j+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow j-1}^+ S_{j-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow j}^+ s_i = \Phi(t_j) s_i.
\end{aligned}$$

Si  $i < j$ ,

$$\begin{aligned}
s_i \Phi(t_j) &= s_i S_{j+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow j-1}^+ S_{j-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow j}^+ \\
&= S_{j+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i-2}^+ s_i s_{i-1} s_i S_{i+1 \nearrow j-1}^- S_{j-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow j}^+ \\
&= S_{j+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i-2}^+ s_{i-1} s_i s_{i-1} S_{i+1 \nearrow j-1}^- S_{j-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow j}^+ \\
&= S_{j+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow j-1}^+ S_{j-2 \searrow i+1}^- s_{i-1} s_i s_{i-1} S_{i-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow j}^+ \\
&= S_{j+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow j-1}^+ S_{j-2 \searrow i+1}^- s_i s_{i-1} s_i S_{i-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow j}^+ \\
&= S_{j+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow j-1}^+ S_{j-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow j}^+ s_i = \Phi(t_j) s_i.
\end{aligned}$$

Dans les deux cas, on a bien  $s_i \Phi(t_j) = \Phi(t_j) s_i$ .

Nous devons encore montrer que  $\Phi(t_i) \Phi(t_j) = \Phi(t_j) \Phi(t_i)$  pour tous  $i, j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . Les calculs étant particulièrement longs, nous les présentons en annexe dans la sous-section 4.1.

Pour montrer que  $\Psi$  est bien définie, il suffit de montrer que  $s_{n-1} \Psi(s_0) s_{n-1} = \Psi(s_0) s_{n-1} \Psi(s_0)$  (ou de manière équivalente, que  $s_{n-1}^{-1} \Psi(s_0) s_{n-1} = \Psi(s_0) s_{n-1} \Psi(s_0)^{-1}$ ), que  $s_1 \Psi(s_0) s_1 = \Psi(s_0) s_1 \Psi(s_0)$  (ou de manière équivalente, que  $s_1^{-1} \Psi(s_0) s_1 = \Psi(s_0) s_1 \Psi(s_0)$ ), et que  $\Psi(s_0)$  commute avec  $s_j$  pour tout  $j \in \llbracket 2, n-2 \rrbracket$ . Montrons que  $s_{n-1}^{-1} \Psi(s_0) s_{n-1} = \Psi(s_0) s_{n-1} \Psi(s_0)^{-1}$ . Le membre de gauche est égal à

$$s_{n-1}^{-1} \Psi(s_0) s_{n-1} = S_{n-2 \searrow 2}^+ t_1 S_{1 \nearrow n-2}^-.$$

Afin de simplifier le membre de droite, calculons quelques relations utiles. On a

$$S_{1 \nearrow n-2}^- S_{n-1 \searrow 1}^+ = S_{n-1 \searrow 1}^+ S_{2 \nearrow n-1}^-.$$

En effet

$$\begin{aligned}
S_{1 \nearrow n-2}^- S_{n-1 \searrow 1}^+ &= S_{1 \nearrow n-3}^- s_{n-2}^{-1} s_{n-1} s_{n-2} S_{n-3 \searrow 1}^+ \\
&= S_{1 \nearrow n-3}^- s_{n-1} s_{n-2} s_{n-1}^{-1} S_{n-3 \searrow 1}^+ \\
&= s_{n-1} S_{1 \nearrow n-3}^- s_{n-2} S_{n-3 \searrow 1}^+ s_{n-1}^{-1}
\end{aligned}$$

et en procédant ainsi de suite de la même façon, on obtient bien la relation annoncée. On a également

$$S_{n-1 \setminus 2}^+ S_{n-1 \setminus 3}^+ s_2^{-1} = S_{n-2 \setminus 2}^+ S_{n-1 \setminus 3}^+.$$

En effet,  $s_{n-1}$  commute avec  $s_2, \dots, s_{n-3}$ , donc

$$\begin{aligned} S_{n-1 \setminus 2}^+ S_{n-1 \setminus 3}^+ s_2^{-1} &= s_{n-1} s_{n-2} s_{n-1} S_{n-3 \setminus 2}^+ S_{n-2 \setminus 3}^+ s_2^{-1} \\ &= s_{n-2} s_{n-1} s_{n-2} S_{n-3 \setminus 2}^+ S_{n-2 \setminus 3}^+ s_2^{-1} = s_{n-2} S_{n-1 \setminus 2}^+ S_{n-2 \setminus 3}^+ s_2^{-1} \end{aligned}$$

puis en « déplaçant » de même  $s_{n-2}, \dots, s_3$  on obtient

$$S_{n-1 \setminus 2}^+ S_{n-1 \setminus 3}^+ s_2^{-1} = S_{n-2 \setminus 2}^+ S_{n-1 \setminus 2}^+ s_2^{-1} = S_{n-2 \setminus 2}^+ S_{n-1 \setminus 3}^+.$$

En utilisant les relations qui définissent  $G$  et les relations ci-dessus, on obtient alors

$$\begin{aligned} \Psi(s_0) s_{n-1} \Psi(s_0)^{-1} &= S_{n-1 \setminus 2}^+ t_1 S_{1 \nearrow n-2}^- S_{n-1 \setminus 1}^+ t_1^{-1} S_{2 \nearrow n-1}^- \\ &= S_{n-1 \setminus 2}^+ t_1 S_{n-1 \setminus 1}^+ S_{2 \nearrow n-1}^- t_1^{-1} S_{2 \nearrow n-1}^- \\ &= S_{n-1 \setminus 2}^+ S_{n-1 \setminus 3}^+ t_1 s_2 s_1 s_2^{-1} t_1^{-1} S_{3 \nearrow n-1}^- S_{2 \nearrow n-1}^- \\ &= S_{n-1 \setminus 2}^+ S_{n-1 \setminus 3}^+ s_2^{-1} t_2 t_1 s_1 t_1^{-1} t_2^{-1} s_2 S_{3 \nearrow n-1}^- S_{2 \nearrow n-1}^- \\ &= S_{n-1 \setminus 2}^+ S_{n-1 \setminus 3}^+ s_2^{-1} t_2 t_1 t_2^{-1} s_1^{-1} s_2 S_{3 \nearrow n-1}^- S_{2 \nearrow n-1}^- \\ &= S_{n-1 \setminus 2}^+ S_{n-1 \setminus 3}^+ s_2^{-1} t_1 s_1^{-1} s_2 S_{3 \nearrow n-1}^- S_{2 \nearrow n-1}^- \\ &= S_{n-2 \setminus 2}^+ S_{n-1 \setminus 3}^+ t_1 s_1^{-1} S_{3 \nearrow n-1}^- S_{2 \nearrow n-2}^- \\ &= S_{n-2 \setminus 2}^+ t_1 s_1^{-1} S_{n-1 \setminus 3}^+ S_{3 \nearrow n-1}^- S_{2 \nearrow n-2}^- \\ &= S_{n-2 \setminus 2}^+ t_1 s_1^{-1} S_{2 \nearrow n-2}^- = s_{n-1}^{-1} \Psi(s_0) s_{n-1}. \end{aligned}$$

Montrons maintenant que  $s_1^{-1} \Psi(s_0) s_1 = \Psi(s_0) s_1 \Psi(s_0)$ . D'un côté,

$$\begin{aligned} s_1^{-1} \Psi(s_0) s_1 &= s_1^{-1} S_{n-1 \setminus 2}^+ t_1 S_{1 \nearrow n-1}^- s_1 \\ &= s_1^{-1} S_{n-1 \setminus 3}^+ s_2 t_1 S_{1 \nearrow n-1}^- s_1 \\ &= s_1^{-1} S_{n-1 \setminus 3}^+ t_2 t_1 s_2^{-1} S_{1 \nearrow n-1}^- s_1 \\ &= S_{n-1 \setminus 3}^+ s_1^{-1} t_2 t_1 s_2^{-1} s_1^{-1} s_2^{-1} s_1 S_{3 \nearrow n-1}^- \\ &= S_{n-1 \setminus 3}^+ s_1^{-1} t_2 t_1 s_1^{-1} s_2^{-1} S_{3 \nearrow n-1}^- \\ &= S_{n-1 \setminus 3}^+ t_2 s_1 s_1^{-1} s_2^{-1} S_{3 \nearrow n-1}^- \\ &= S_{n-1 \setminus 3}^+ t_2 S_{2 \nearrow n-1}^-. \end{aligned}$$

De l'autre côté,

$$\begin{aligned}
\Psi(s_0)s_1\Psi(s_0) &= S_{n-1\setminus 2}^+ t_1 S_{1\setminus n-1}^- s_1 S_{n-1\setminus 1}^+ t_1^{-1} S_{2\setminus n-1}^- \\
&= S_{n-1\setminus 2}^+ t_1 S_{1\setminus n-1}^- S_{n-1\setminus 3}^+ s_1 s_2 s_1 t_1^{-1} S_{2\setminus n-1}^- \\
&= S_{n-1\setminus 2}^+ t_1 s_1^{-1} s_2^{-1} s_1 s_2 s_1 t_1^{-1} S_{2\setminus n-1}^- \\
&= S_{n-1\setminus 2}^+ t_1 s_2 t_1^{-1} S_{2\setminus n-1}^- \\
&= S_{n-1\setminus 2}^+ s_2^{-1} t_2 t_1 t_1^{-1} S_{2\setminus n-1}^- \\
&= S_{n-1\setminus 3}^+ t_2 S_{2\setminus n-1}^- = s_1^{-1} \Psi(s_0) s_1.
\end{aligned}$$

Montrons enfin que  $\Psi(s_0)$  commute avec  $s_j, j \in \llbracket 2, n-2 \rrbracket$  :

$$\begin{aligned}
\Psi(s_0)s_j &= S_{n-1\setminus 2}^+ t_1 S_{1\setminus n-1}^- s_j \\
&= S_{n-1\setminus 2}^+ t_1 S_{1\setminus j+1}^- s_j S_{j+2\setminus n-1}^- \\
&= S_{n-1\setminus 2}^+ t_1 S_{1\setminus j-1}^- s_{j+1} S_{j\setminus n-1}^- \\
&= S_{n-1\setminus j}^+ s_{j+1} S_{j-1\setminus 2}^+ t_1 S_{1\setminus n-1}^- \\
&= S_{n-1\setminus j+2}^+ s_j S_{j+1\setminus 2}^+ t_1 S_{1\setminus n-1}^- \\
&= s_j S_{n-1\setminus 2}^+ t_1 S_{1\setminus n-1}^- = s_j \Psi(s_0).
\end{aligned}$$

Ainsi,  $\Psi$  est bien définie. Il ne reste plus qu'à montrer que  $\Phi$  et  $\Psi$  sont inverses l'une de l'autre. Pour  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , on a bien sûr  $\Phi \circ \Psi(s_i) = s_i$  et  $\Psi \circ \Phi(s_i) = s_i$ . De plus

$$\Phi \circ \Psi(s_0) = S_{n-1\setminus 2}^+ \Phi(t_1) S_{1\setminus n-1}^- = S_{n-1\setminus 2}^+ S_{2\setminus n-1}^- s_0 S_{n-1\setminus 1}^+ S_{1\setminus n-1}^- = s_0.$$

Remarquons que, dans  $G$ ,  $s_{i+1} t_i s_i^{-1} s_{i+1}^{-1} = t_{i+1} t_i s_{i+1}^{-1} s_i^{-1} s_{i+1}^{-1} = t_{i+1} t_i s_i^{-1} s_{i+1}^{-1} s_i^{-1} = s_i t_{i+1} s_{i+1}^{-1} s_i^{-1}$  et  $t_{i+1} s_i t_i^{-1} = s_i^{-1} t_{i+1} t_i t_i^{-1} = s_i^{-1} t_{i+1}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,

$$\begin{aligned}
\Psi \circ \Phi(t_i) &= S_{i+1\setminus n-1}^- \Psi(s_0) S_{1\setminus i-1}^+ S_{i-2\setminus 1}^- \Psi(s_0)^{-1} S_{n-1\setminus i}^+ \\
&= S_{i+1\setminus n-1}^- S_{n-1\setminus 2}^+ t_1 S_{1\setminus n-1}^- S_{1\setminus i-1}^+ S_{i-2\setminus 1}^- S_{n-1\setminus 1}^+ t_1^{-1} S_{2\setminus n-1}^- S_{n-1\setminus i}^+ \\
&= S_{i\setminus 2}^+ t_1 S_{1\setminus n-1}^- S_{1\setminus i-1}^+ S_{i-2\setminus 1}^- S_{n-1\setminus 2}^+ t_1 S_{1\setminus i-1}^- \\
&= S_{i\setminus 3}^+ s_2 t_1 s_1^{-1} s_2^{-1} S_{3\setminus n-1}^- S_{1\setminus i-1}^+ S_{i-2\setminus 1}^- S_{n-1\setminus 3}^+ s_2 s_1 t_1^{-1} s_2^{-1} S_{3\setminus i-1}^- \\
&= S_{i\setminus 3}^+ s_1 t_2 s_2^{-1} s_1^{-1} S_{3\setminus n-1}^- S_{1\setminus i-1}^+ S_{i-2\setminus 1}^- S_{n-1\setminus 3}^+ s_1 s_2 t_2^{-1} s_1^{-1} S_{3\setminus i-1}^- \\
&= s_1 S_{i\setminus 3}^+ t_2 s_2^{-1} S_{3\setminus n-1}^- S_{2\setminus i-1}^+ S_{i-2\setminus 2}^- S_{n-1\setminus 3}^+ s_2 t_2^{-1} S_{3\setminus i-1}^- s_1^{-1}
\end{aligned}$$

puis, par des opérations similaires, on obtient

$$\begin{aligned}
\Psi \circ \Phi(t_i) &= S_{1\setminus i-1}^+ t_i s_i^{-1} S_{i+1\setminus n-1}^- S_{n-1\setminus i}^+ s_{i-1} t_{i-1}^{-1} S_{i-2\setminus 1}^- \\
&= S_{1\setminus i-1}^+ t_i s_{i-1} t_{i-1}^{-1} S_{i-2\setminus 1}^- \\
&= S_{1\setminus i-1}^+ s_{i-1}^{-1} t_i S_{i-2\setminus 1}^- = t_i.
\end{aligned}$$

Et finalement,  $\Phi \circ \Psi = \text{Id}_{\pi_1(Y/W)}$  et  $\Psi \circ \Phi = \text{Id}_G$ .  $\square$

De cette présentation de  $\pi_1(Y/W)$ , nous pourrions déduire, comme dans la section précédente, une deuxième présentation de  $\tilde{\mathcal{B}}_n$ . Il suffirait de déterminer la manière dont  $u$  agit par conjugaison sur les  $t_i$ . Cette action n'étant pas particulièrement simple, nous ne le ferons pas, mais il est malgré tout intéressant d'interpréter les générateurs  $t_i$  en termes de tresses comme nous l'avons fait avec les  $s_i$ .

En se souvenant que le générateur  $t_i$  correspond à la translation de vecteur  $e_i - e_{i+1}$ , l'élément  $t_i$  dans  $\pi_1(Y/W)$  se relève en un lacet de  $Y$  qui relie un point  $p$  au point  $p'$  obtenu de  $p$  en augmentant la  $i$ -ème coordonnée de 1 et en diminuant la  $(i+1)$ -ème de 1. Ainsi, en termes de tresses, la tresse  $t_i$  est telle que le brin  $i$  entoure l'axe central pour revenir en  $i$ , et le brin  $i+1$  entoure également l'axe central pour revenir en  $i+1$ , mais en tournant dans l'autre sens. Cependant, cette description ne suffit pas à connaître la façon dont chacun de ces brins croise les autres brins au cours de ce tour.

En fait, étant donné que nous savons déjà à quelle tresse correspondent les  $s_i$ , pour trouver à quelle tresse correspond  $t_i$ , il nous suffit d'utiliser la relation

$$t_i = s_{i+1}^{-1} \cdots s_{n-1}^{-1} s_0 \cdots s_{i-1} s_{i-2}^{-1} \cdots s_0^{-1} s_{n-1} \cdots s_i.$$

Nous en déduisons que :

- le brin  $i+1$  passe par dessous les brins  $i+2, \dots, n$  puis par dessus les brins  $1, \dots, i$ ,
- le brin  $i$  passe par dessus les brins  $i-1, \dots, 1$  puis par dessous les brins  $n, \dots, i+1$ .

Les figures 8 et 9 représentent les tresses  $t_2$  et  $t_4$  dans le cas où  $n = 6$ .

#### 4.1 Annexe : calcul de la relation $\Phi(t_i)\Phi(t_j) = \Phi(t_j)\Phi(t_i)$

On reprend toutes les notations de la démonstration du théorème 22. Nous démontrons ici la relation  $\Phi(t_i)\Phi(t_j) = \Phi(t_j)\Phi(t_i)$  pour  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On peut supposer que  $i < j$ . Certaines étapes des calculs ci-dessous ne sont pas valables dans quelques cas limites comme  $i = 1$  ou  $j = i+1$ . Pour simplifier, nous ne traitons pas ces cas particuliers ; il suffirait d'adapter très légèrement les calculs pour ce faire. On a

$$\begin{aligned} \Phi(t_i)\Phi(t_j) &= S_{i+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i-1}^+ S_{i-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow i}^+ S_{j+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow j-1}^+ S_{j-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow j}^+ \\ &= S_{i+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i-1}^+ S_{i-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow j}^+ S_{j-1 \searrow i}^+ S_{j+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i-2}^+ S_{i-1 \nearrow j-1}^- S_{j-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow j}^+. \end{aligned}$$

Comme  $s_k$  et  $s_l$  commutent pour  $|k-l| > 1$  (sauf  $s_0$  et  $s_{n-1}$ ), les blocs  $S_{j-1 \searrow i}^+$  et  $S_{j+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i-2}^+$  commutent. L'expression précédente est donc égale à

$$S_{i+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i-1}^+ S_{i-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow j}^+ S_{j+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i-2}^+ S_{j-1 \searrow i}^+ S_{i-1 \nearrow j-1}^- S_{j-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow j}^+.$$

En utilisant à plusieurs reprises les relations du type  $s_l s_{l+1} s_l = s_{l+1} s_l s_{l+1}$  (ou  $s_{n-1} s_0 s_{n-1} = s_0 s_{n-1} s_0$ ), on montre que

$$S_{i-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow j}^+ S_{j+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i-2}^+ = S_{j \nearrow n-2}^- s_{n-1} S_{0 \nearrow i-2}^+ S_{i-3 \searrow 0}^- s_{n-1}^{-1} S_{n-2 \searrow j}^+$$



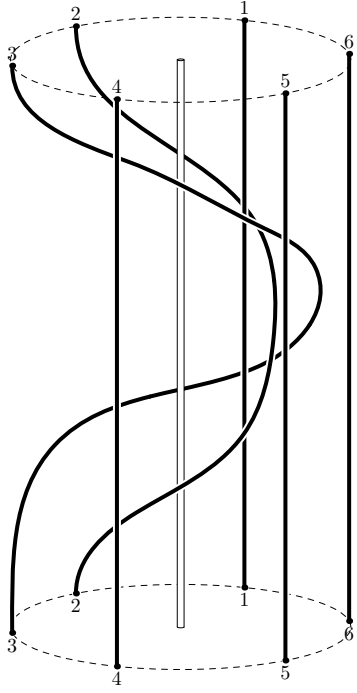


FIG. 8 -  $t_2$

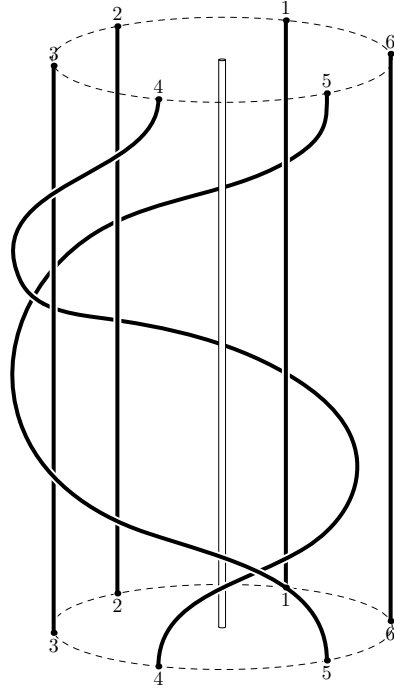


FIG. 9 -  $t_4$

et  $S_{j-1 \setminus i}^+ S_{i-1 \nearrow j-1}^+ = S_{i-1 \nearrow j-2}^+ S_{j-1 \setminus i-1}^+$ , et donc  $\Phi(t_i) \Phi(t_j)$  se réécrit

$$S_{i+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i-1}^+ S_{j \nearrow n-2}^- s_{n-1} S_{0 \nearrow i-2}^+ S_{i-3 \setminus 0}^- s_{n-1}^{-1} S_{n-2 \setminus j}^+ S_{i-1 \nearrow j-2}^+ S_{j-1 \setminus i-1}^+ S_{j-2 \setminus 0}^- S_{n-1 \setminus j}^+.$$

Dans cette dernière expression, les blocs  $S_{i-3 \setminus 0}^- s_{n-1}^{-1} S_{n-2 \setminus j}^+$  et  $S_{i-1 \nearrow j-2}^+$  commutent, et l'on obtient

$$S_{i+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i-1}^+ S_{j \nearrow n-2}^- s_{n-1} S_{0 \nearrow i-2}^+ S_{i-1 \nearrow j-2}^+ S_{i-3 \setminus 0}^- s_{n-1}^{-1} S_{n-2 \setminus j}^+ S_{j-1 \setminus i-1}^+ S_{j-2 \setminus 0}^- S_{n-1 \setminus j}^+. \quad (1)$$

Commençons pas nous occuper de la partie de gauche de cette expression :

$$S_{i+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i-1}^+ S_{j \nearrow n-2}^- s_{n-1} S_{0 \nearrow i-2}^+ S_{i-1 \nearrow j-2}^+.$$

Les éléments du bloc  $S_{0 \nearrow i-1}^+$  commutent avec les éléments précédents jusqu'à s'intercaler entre les éléments du bloc  $s_{n-1} S_{0 \nearrow i-2}^+$  :

$$S_{i+1 \nearrow n-1}^- S_{j \nearrow n-2}^- s_0 s_{n-1} s_1 s_0 \cdots s_{i-3} s_{i-1} s_{i-2} S_{i-1 \nearrow j-2}^+.$$

On peut alors transformer la chaîne  $s_{i-1}s_{i-2}s_{i-1}$  en  $s_{i-2}s_{i-1}s_{i-2}$ . Ce faisant, on fait apparaître une chaîne  $s_{i-2}s_{i-3}s_{i-2}$  que l'on peut transformer en  $s_{i-3}s_{i-2}s_{i-3}$ , et ainsi de suite. On obtient au final

$$S_{i+1 \nearrow n-1}^- S_{j \nearrow n-2}^- s_{n-1} s_0 s_{n-1} s_1 s_0 \cdots s_{i-3} s_{i-1} s_{i-2} S_{i \nearrow j-2}^+$$

L'élément  $s_j^{-1}$  du bloc  $S_{j \nearrow n-2}^-$  commute avec les éléments précédents jusqu'à l'élément  $s_{j+1}^{-1}$ . On a alors une chaîne  $s_j^{-1} s_{j+1}^{-1} s_j^{-1}$  que l'on transforme en  $s_{j+1}^{-1} s_j^{-1} s_{j+1}^{-1}$ ; l'élément  $s_{j+1}^{-1}$  de gauche commute alors à son tour avec les éléments précédent et vient se placer tout en bout de chaîne. En procédant de même avec  $s_{j+1}^{-1}, \dots, s_{n-2}^{-1}$ , on a

$$S_{j+1 \nearrow n-1}^- S_{i+1 \nearrow n-1}^- s_{n-1} s_0 s_{n-1} s_1 s_0 \cdots s_{i-3} s_{i-1} s_{i-2} S_{i \nearrow j-2}^+$$

Alors, un  $s_{n-1}^{-1}$  et un  $s_{n-1}$  s'éliminent, et on obtient

$$S_{j+1 \nearrow n-1}^- S_{i+1 \nearrow n-2}^- s_0 s_{n-1} s_1 s_0 \cdots s_{i-3} s_{i-1} s_{i-2} S_{i \nearrow j-2}^+$$

À ce stade, les éléments intercalés  $s_0, s_1, \dots, s_{i-1}$  commutent avec les éléments précédents et notre expression se réécrit

$$S_{j+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i-1}^+ S_{i+1 \nearrow n-2}^- s_{n-1} S_{0 \nearrow i-2}^+ S_{i \nearrow j-2}^+$$

Traitons maintenant la partie droite de l'expression (1). Elle est égale à

$$S_{i-3 \searrow 0}^- s_{n-1}^{-1} S_{n-2 \searrow j}^+ S_{j-1 \searrow i-1}^+ S_{j-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow j}^+$$

On travaille de manière similaire à ce que l'on a fait pour la partie gauche, en intercalant le début de la chaîne  $S_{j-2 \searrow 0}^-$ , c'est-à-dire  $S_{j-2 \searrow i}$ , avec la chaîne  $S_{j-1 \searrow i-1}^+$ , puis en utilisant les relations du type  $s_k s_{k+1} s_k = s_{k+1} s_k s_{k+1}$ , ce qui élimine un  $s_{j-2} s_{j-2}^{-1}$ , puis en « désentrelaçant » les chaînes obtenues et en faisant commuter celle de droite tout à la fin de l'expression. On obtient

$$S_{i-3 \searrow 0}^- s_{n-1}^{-1} S_{n-2 \searrow j-1}^+ S_{j-3 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow j}^+ S_{j-2 \searrow i}^+$$

et donc

$$\begin{aligned} \Phi(t_i) \Phi(t_j) &= S_{j+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i-1}^+ S_{i+1 \nearrow n-2}^- s_{n-1} S_{0 \nearrow i-2}^+ S_{i \nearrow j-2}^+ \\ &\quad S_{i-3 \searrow 0}^- s_{n-1}^{-1} S_{n-2 \searrow j-1}^+ S_{j-3 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow j}^+ S_{j-2 \searrow i}^+. \end{aligned} \quad (2)$$

Écrivons maintenant

$$\Phi(t_j) \Phi(t_i) = S_{j+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow j-1}^+ S_{j-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow j}^+ S_{i+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i-1}^+ S_{i-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow i}^+$$

De manière analogue à ce que l'on a fait pour  $\Phi(t_i) \Phi(t_j)$ , on montre que

$$\begin{aligned} \Phi(t_j) \Phi(t_i) &= S_{j+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i-1}^+ S_{i+1 \nearrow n-2}^- s_{n-1} S_{0 \nearrow i-2}^+ S_{i \nearrow j-2}^+ \\ &\quad S_{i-3 \searrow 0}^- s_{n-1}^{-1} S_{n-2 \searrow j-1}^+ S_{j-3 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow j}^+ S_{j-2 \searrow i}^+, \end{aligned} \quad (3)$$

et en comparant (2) et (3), on constate que  $\Phi(t_i) \Phi(t_j) = \Phi(t_j) \Phi(t_i)$ .

## Références

- [1] JOAN S. BIRMAN, *Braids, links, and mapping class groups*, Annals of mathematics studies, Princeton university press, 1974
- [2] BOURBAKI, Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4-6, *Éléments de mathématique* XXXIV, Hermann, 1968
- [3] HARM VAN DER LEK, The homotopy type of complex hyperplane complements, 1983
- [4] NGUYỄN VIỆT DŨNG, *The fundamental groups of the spaces of regular orbits of the affine Weyl groups*, Topology Vol. 22, No. 4, pp. 425-435, 1983

## **Erklärung**

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe, dass alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus anderen Quellen übernommen wurden, als solche kenntlich gemacht sind und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegt wurde.

Erlangen, den 6. Juli 2010