Stage olympique d'Achères

Du 1 au 6 août 2005

Stage olympique d'Achères, juillet 2005

Avant-propos

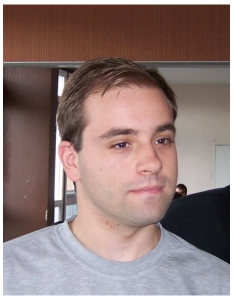
Le stage d'Achères II a été organisé par Animath.

Son objet a été de rassembler les lauréats de diverses compétitions mathématiques et de les faire travailler sur des exercices en vue de la formation de l'équipe qui représentera la France à l'Olympiade internationale de mathématiques en Slovénie en juillet 2005.

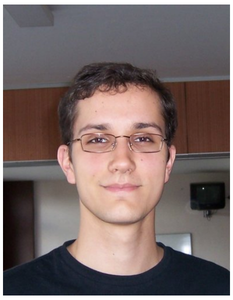
Nous tenons à remercier le centre J.A.L. Mutatis pour son excellent accueil et l'École normale supérieure pour son soutien logistique.

Le trombinoscope

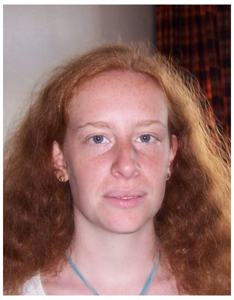
D'abord les profs...



Xavier Caruso



François Charles



Sandrine Henri

François Lo Jacomo

Jean-Michel Slowik

Johan Yebbou

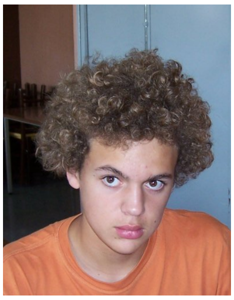
Puis les élèves...

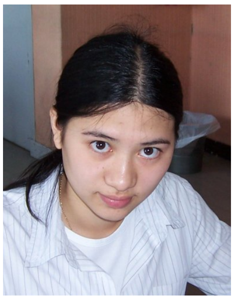

Samuel Bach


Guillaume Barraquand


Agathe Benoît


Thomas Chartier


Samuel Collin


Bao-Anh Dang Vu


Sarah Diot-Girard


Arnaud Dumas


Mathieu Finas

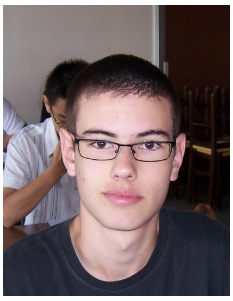

David Fourquet


Robin Ngi


Benoît Seguin


Duco van Amstel


Jill-Jênn Vie


Mathieu Voland


Coline Wiatrowski

Table des matières

Activité I

L'apprentissage

Le matin, les élèves recevaient un cours qui leur enseignait les principales connaissances et les principaux réflexes à avoir pour traiter un exercice d'olympiade. Voici un résumé succint des paroles de leur professeur.

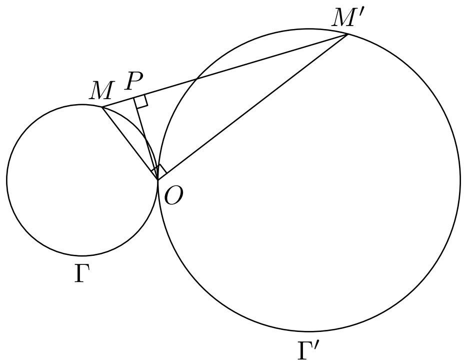
1 Géométrie

Homothéties

On a commencé par un rappel sur les homothéties : comme c'est une notion au programme, on n'y revient pas ici. Donnons plutôt un exercice.

Exercice 1. Deux cercles Γ, Γ' sont tangents en O. Soit M un point de Γ et M' un point de Γ' tels que (OM) est perpendiculaire à (OM'). On note P le projeté orthogonal de O sur (MM'). Déterminer le lieu de P quand M décrit Γ.

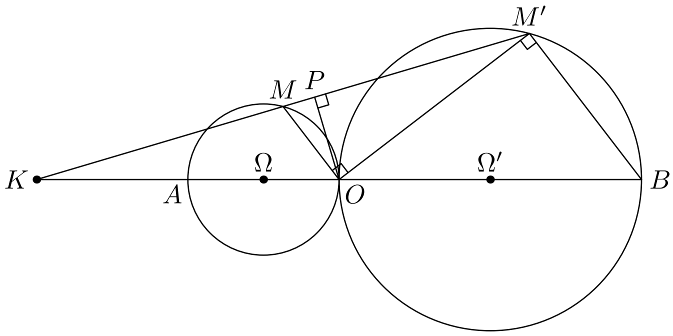
Solution de l'exercice 1. Commençons par plusieurs remarques importantes. Tout d'abord, il est absolument nécessaire de commencer par faire une figure propre :



On constate alors qu'il peut y avoir différents cas de figure : cercles tangents extérieurement ou intérieurement ; dans le cas des cercles extérieurs, il faudra distinguer $r \neq r'$ et $r = r'$.

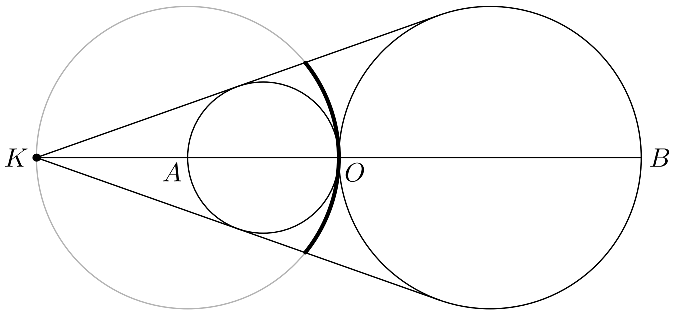
Par ailleurs, quand on demande un lieu, il y a une équivalence et donc deux sens à traiter. Plus généralement, dans un problème où il s'agit d'établir une double implication, on a souvent intérêt à examiner s'il y a un sens plus facile avant de s'intéresser à la réciproque ; il arrive alors que le sens direct serve pour la réciproque.

Supposons $r \neq r'$. On considère l'homothétie de centre K qui envoie le cercle Γ sur Γ'. Ainsi, si Ω (resp. Ω') désigne le centre de Γ (resp. Γ'), si r (resp. r') son rayon et si $k = \frac{r'}{r}$ désigne le rapport de l'homothétie, on a la relation $\overrightarrow{K\Omega'} = k\overrightarrow{K\Omega}$, ce qui exprime le fait que K s'obtient comme barycentre de (Ω, k) et $(\Omega', -1)$. (On n'a pas besoin normalement de justifier la position de K. L'existence de l'homothétie est supposée connue par le cours.)



Les droites (OM) et (BM') sont parallèles et cela suffit à justifier que l'homothétie envoie (OM) sur (BM'). On en déduit qu'elle envoie M sur M'. Ainsi les points K, M et M' sont alignés. Le triangle KOP est rectangle, donc le point P se situe donc sur le cercle de diamètre $[KO]$.

Cependant, tout le cercle n'est pas forcément atteint : dans le cas des cercles extérieurs, seule la partie représentée en gras sur la figure suivante est obtenue comme il n'est pas très difficile de s'en convaincre :



Si les cercles sont tangents intérieurement, on obtient tout le cercle de diamètre $[KO]$. Enfin dans le cas particulier des cercles tangents extérieurement de même rayon, on obtient un segment passant par O et perpendiculaire à l'axe des centres.

Propriétés (à mémoriser) : l'image d'un cercle par une homthétie est un cercle ; et réciproquement, étant donné deux cercles de rayon différent, il existe une homothétie (et même deux[1]) qui envoie l'un d'eux sur l'autre. Si les rayons sont égaux, l'homothétie de rapport positif devient une translation. Le centre des homothéties s'obtient comme barycentre des centres des cercles affectés de coefficients judicieux. Il s'obtient également comme point d'intersection des tangentes communes quand elles existent[2].

Le théorème de Ménélaüs

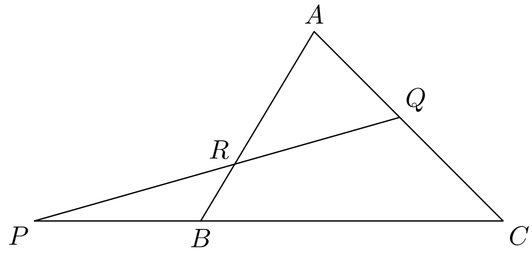
Si on classe les théorèmes selon leur importance dans les exercices, on mettra ce théorème en deuxième catégorie.

[1]Elles sont de rapport r'/r et $-r'/r$, où r et r' désignent les rayons respectifs des cercles.

[2]Ceci est une propriété visuelle agréable, mais contrairement à la caractérisation par les barycentres ce n'est pas la propriété essentielle, ne serait-ce que parce qu'elle est inopérante quand il n'existe pas de tangente commune, c'est-à-dire quand les cercles sont intérieurs l'un à l'autre.

Théorème 1.1 *Soit ABC un triangle. On place P, Q et R des points respectifs des droites (BC), (AC) et (AB). Les trois points sont alignés si et seulement si :*

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{QA}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{RB}}{\overline{RA}} = 1$$



Les mesures algébriques comme $\overline{PA}$ sont simplement des distances avec un signe déterminé selon une convention d'orientation choisie au départ sur la droite considérée ; plus précisément, si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur unitaire directeur de la droite (PQ), et si $\overrightarrow{PQ} = \lambda \overrightarrow{u}$, alors $\overline{PQ} = \lambda$. Toutefois, si on ne s'intéresse qu'au sens direct, le théorème reste vrai avec de simples distances.

On peut aussi briser un tabou encore plus fort en écrivant :

$$\frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{QC}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{RA}}{\overrightarrow{RB}} = 1.$$

Bien sûr, on ne doit pas habituellement diviser les vecteurs. Cependant on constate ici que l'on ne fait la division que de vecteurs colinéaires, et dans ce cas $\frac{\overrightarrow{u}}{\overrightarrow{v}}$ est défini comme l'unique réel λ vérifiant $\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{v}$.

Démonstration. On fait les deux sens séparément bien entendu. On commence par supposer que les points sont alignés et on doit montrer la formule.

On note h_P l'homothétie de centre P de rapport $\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$. Elle envoie B sur C. On définit de manière analogue les homothéties h_Q et h_R : h_Q de centre Q envoie C sur A et h_R de centre R envoie A sur B.

Notons $h = h_Q \circ h_P$. Admettons temporairement que h est encore un homothétie de rapport le produit des rapports de h_P et h_Q et dont le centre est sur la droite reliant les centres de h_P et h_Q. Ainsi h est une homothétie de rapport $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}$ et de centre R (car le centre est sur la droite (PQ) et aussi sur la droite (AB) puisque la composée envoie B sur A). En utilisant à nouveau que h envoie B sur A, on voit que son rapport est également donné par $\frac{\overline{RB}}{\overline{RA}}$, et ceci donne la formule du théorème.

Si l'on n'aime pas les homothéties, on peut également donner une démonstration utlisant le théorème de Thalès. Pour cela, on considère B' projeté de B sur AC parallèlement à la droite (PQ). D'après le théorème de Thalès, on a

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{QC}}{\overline{QB'}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\overline{RB}}{\overline{RA}} = \frac{\overline{QB'}}{\overline{QA}}$$

et donc :

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{RB}}{\overline{RA}} = \frac{\overline{QC}}{\overline{QB'}} \cdot \frac{\overline{QB'}}{\overline{QA}} = \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}$$

ce qui donne la relation voulue.

Traitons à présent la réciproque. On part donc de trois points P, Q, R vérifiant :

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{QA}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{RB}}{\overline{RA}} = 1$$

Comme souvent, on utilise le sens direct en introduisant un point auxiliaire. Ici, ce sera le point $R' \in (AB)$ tel que P, Q et R' sont alignés. Le but est de montrer que $R = R'$. Il est certain par le sens direct du théorème de Ménélaüs que :

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{QA}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{R'B}}{\overline{R'A}} = 1$$

En combinant cette propriété et l'hypothèse, on en déduit que $\frac{RA}{RB} = \frac{R'A}{R'B}$. Et cela suffit pour assurer $R = R'$ comme on le voulait[3]. $\square$

Remarque. Ce type de raisonnement où la réciproque se déduit du sens direct est assez intéressant : le principe est d'introduire pour la réciproque un point auxiliaire auquel s'applique le sens direct et de montrer qu'il est en fait confondu avec un point donné par l'énoncé. En tout cas, lorsque l'on a un exercice dans lequel une équivalence intervient, il est souvent bon de passer quelques minutes à détecter lequel des deux sens semble le plus facile. Il est ensuite judicieux de commencer par celui-ci, et éventuellement de l'utiliser pour étudier la réciproque.

Démontrons à présent la propriété des homothéties utilisées dans la preuve de Ménélaüs. On prend h (resp. h') une homothétie de rapport k (resp. k') et de centre O (resp. O'). Si $kk' = 1$, on laisse au lecteur le soin de démontrer que $h \circ h'$ est une translation ; on suppose désormais que $kk' \neq 1$;

Soit M un point du plan. On cherche à situer $M'' = h'(h(M))$. Soit $M' = h(M)$. Il est défini par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ et de même M'' est défini par $\overrightarrow{O'M''} = k'\overrightarrow{O'M'}$. Les points M tels que $M'' = M$ sont alors ceux qui vérifient l'égalité vectorielle :

$$(kk' - 1)\overrightarrow{OM} = (k' - 1)\overrightarrow{OO'}.$$

Ainsi il y a un unique point fixe. Notons-le Ω. L'égalité vectorielle précédente assure que Ω est sur la droite (OO').

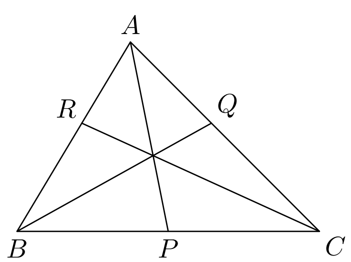
Maintenant, comme h et h' sont des homothéties, on a (avec des notations évidentes) :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Omega' P'} &= k\overrightarrow{\Omega P} \\ \overrightarrow{\Omega'' P''} &= k'\overrightarrow{\Omega' P'} \end{aligned}$$

et du fait que $\Omega'' = Omega$, il reste $\overrightarrow{\Omega P''} = kk'\overrightarrow{\Omega P}$, ce qui assure que $h \circ h'$ est une homothétie de centre Ω et de rapport kk'.

Théorème de Céva

Théorème 1.2 *On se place dans la situation suivante :*



[3] S'en convaincre en exercice...

Les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes (ou parallèles) si et seulement si :

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{QA}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{RB}}{\overline{RA}} = -1.$$

Notez que le théorème est également valable lorsque les points P, Q et R sont situés en dehors des côtés (mais toujours sur les droites correspondantes évidemment). D'ailleurs, c'est le seul cas où l'on peut avoir parallélisme et non concourance.

Démonstration. Commençons comme toujours par le sens direct.

Nous ne traitons pas le cas « parallèle » qui est très facile par le théorème de Thalès. Pour le cas de coucourance, on utilise la notion de barycentre. Comme tout point de plan, M s'écrit comme barycentre de A, B et C affectés de coefficients judicieux que nous notons x, y et z.

Le point P s'écrit alors comme barycentre de (B, y) et (C, z). En effet, notons P' le barycentre des deux points pondérés précédents. Par propriété d'associativité des barycentre, M s'écrit comme barycentre de (A, x) et $(P', y + z)$ et donc P' est sur la droite (AM). Comme il est également sur la droite (BC), on a nécessairement $P = P'$. On obtient alors $y\overrightarrow{PB} + z\overrightarrow{PC} = 0$ puis

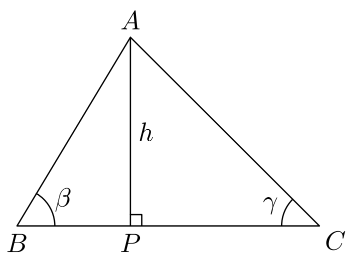
$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} = -\frac{y}{z}$$

et les relations analogues pour les points Q et R : le théorème de Céva s'en déduit.

Pour la réciproque, on exploite le sens direct comme dans le théorème de Ménélaüs. $\square$

À retenir : Si A, B et C sont des points non alignés, tout point de plan M s'écrit comme barycentre de A, B et C affectés de coefficients judicieux que nous notons x, y et z. Ces derniers réels sont définis à multiplication par un réel près. Ils s'appellent les *coordonnées barycentriques* de M relativement aux points A, B et C.

Remarque. Le théorème de Céva permet de démontrer des propriétés classiques de concourance dans les triangles. Évidemment pour les médianes. Cela marche aussi pour les hauteurs. Dans la figure suivante :



on a :

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = -\frac{h \tan\gamma}{h \tan\beta} = -\frac{\tan\gamma}{\tan\beta}.$$

et des formules analogues pour les autres rapports. Le théorème de Céva permet alors de conclure.

On peut finalement raisonner de façon analogue pour prouver la concourance des bissectrices.

Orthocentre, droite et cercle d'Euler

On part d'un triangle ABC. Voici une suite d'affirmations **à connaître par cœur** (première catégorie) :

☞ Les trois médiatrices se coupent en un point O *centre du cercle circonscrit.*

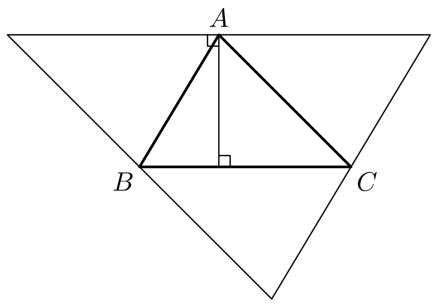
☞ Les trois hauteurs se coupent en H, *orthocentre.*

☞ Les trois médianes se coupent en G, *isobarycentre*, ou encore *centre de gravité*.

☞ On a les relations vectorielles $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$.

☞ Il existe un cercle (appelé *cercle d'Euler*) passant par les neuf points suivants :
– les milieux des côtés : A', B', C'
– les pieds des hauteurs : H_a, H_b, H_c
– les points I, J et K milieux respectifs de $[AH]$, $[BH]$ et $[CH]$
Le rayon de ce cercle est $R/2$ où R est le rayon du cercle circonscrit. Les points O, G, H et Ω (centre du cercle d'Euler) sont alignés (sur la *droite d'Euler*) et plus précisément $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG} = 2\overrightarrow{O\Omega}$.

Démonstration. On n'insiste pas sur la concourance des trois médiatrices. On a déjà vu une démonstration pour la concourance de hauteurs par le théorème de Céva ; cela dit, il existe des démonstrations plus géométriques. Par exemple, en complétant la figure comme dans le dessin suivant :



les trois hauteurs deviennent les trois médiatrices du grand triangle, et donc leur concourance résulte du point précédent.

Pour démontrer la relation vectorielle suivante, on introduit[4] le point K défini par $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. On a alors $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ et puisque OBC est isocèle en O, il vient (AK) perpendiculaire (BC). De même, on démontre que (BK) est perpendiculaire à (AC) et (CK) à (AB). On en déduit que K est situé sur les trois hauteurs et donc l'orthocentre du triangle. (Notez que cette relation redémontre la concourance des hauteurs. On pouvait donc au final se passer d'un bout de la discussion précédente.)

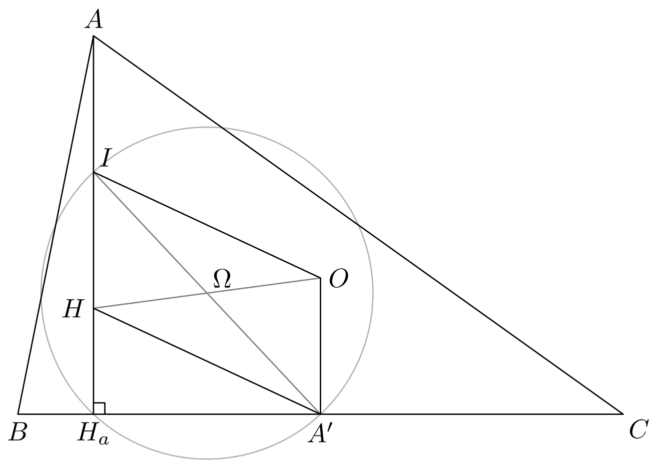
On considère à présent l'homothétie h de centre G et de rapport $-1/2$. Elle envoie A sur A', B sur B' et C sur C'. (Notez que cette homothétie est également celle qui envoie également le grand triangle de tout à l'heure sur le petit.) L'image par h du cercle circonscrit à ABC a pour centre Ω défini par :

$$\overrightarrow{G\Omega} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GO}$$

et passe par les points A', B' et C'. Un calcul vectoriel facile à partir de la relation précédente assure que Ω est le milieu de $[OH]$.

Il nous reste à montrer que le cercle d'Euler passe par les points H_a, H_b, H_c et I, J et K. Bien entendu, il suffit de le faire pour H_a et I, les autres cas se traitant de façon analogue. Dessinons[5] une figure avec seulement les points intéressants pour raisonner plus facilement :

[4] Encore une méthode de fausse position.
[5] Il est souvent important de tracer plusieurs figures auxiliaires non surchargées pour pouvoir raisonner plus facilement.

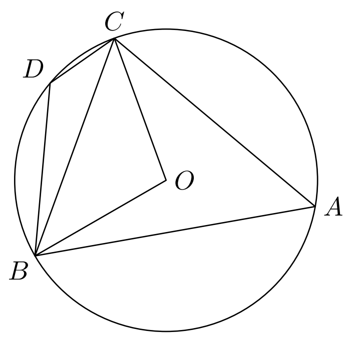


On a montré que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$, d'où on déduit que le quadrilatère $IHA'O$ est un parallélogramme. Ainsi $\Omega A' = \Omega I$ et le point I est bien sur le cercle. On a même mieux : le segment $[A'I]$ est un diamètre du cercle d'Euler. L'angle droit en H_a assure alors que H_a est également sur ce cercle. Ceci clôt la preuve. □

Remarque. Si l'on a bien assimilé les propriétés des figures précédentes, on en déduit facilement plusieurs nouvelles. Par exemple, l'homothétie de centre H et de rapport 2 envoie le cercle d'Euler sur le cercle circonscrit à ABC. On déduit de cela que les symétriques de H par rapport aux côtés sont sur ce cercle circonscrit.

Conditions de cocyclicité

Il s'agit d'une chose très très importante, classée en première catégorie, et peut-être même encore avant si ça existait. On se place dans la configuration suivante :

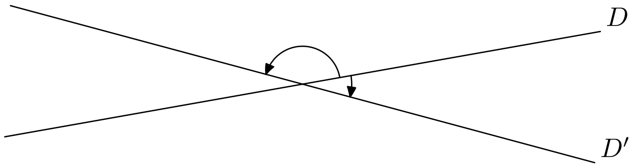


Si l'angle $\widehat{BOC}$ vaut 2α, alors on a $\widehat{BAC} = \alpha$ et $\widehat{BDC} = \pi - \alpha$.

Démonstration. Laissée au lecteur : il suffit de combiner les égalités d'angles dans les triangles isocèles OBC, OCA, OAB. □

Pour énoncer la propriété précédente de façon plus agréable, il est utile de faire intervenir la notion d'angle orienté[6] de droites. Précisément si D et D' sont deux droites, on peut définir leur angle noté (D, D'), c'est un des deux angles représentés sur la figure suivante :

[6] Cependant, cette notion n'est pas clairement dans le « programme » des olympiades. Souvent, dans les exercices, on rajoute des hypothèses pour ne garder qu'un seul cas de figure.



Cet angle est déterminé modulo π (de sorte que les deux angles précédents ont bien même mesure). On vérifie facilement que cette notion d'angles orientés vérifient les relations usuelles de Chasles.

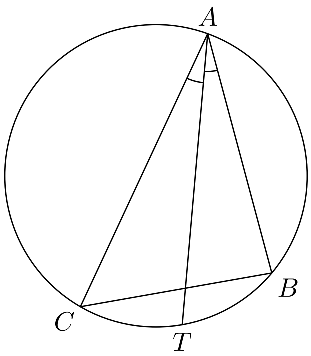
L'avantage de l'introduction de cette notion est qu'elle permet de reformuler (ou de donner des conséquences) de la propriété précédente. Par exemple, si A décrit le cercle, la mesure de l'angle orienté (AB, AC) est constante. Autrement dit, si les points B, C, M et N sont cocycliques alors :

$$(MB, MC) = (NB, NC)$$

cette égalité ayant lieu modulo π. Le second intérêt de cette formulation plus simple est qu'elle admet directement une réciproque : si l'égalité d'angles précédente est vérifiée, alors les points sont cocycliques.

Nous laissons en exercice au lecteur le soin de prouver que la propriété précédente peut être utilisé pour montrer que les symétriques de l'orthocentre par rapport aux côtés sont sur le cercle circonscrit.

Nous pouvons également utiliser ce qui précède pour préciser la position du centre du cercle inscrit. On rappelle que par définition c'est l'intersection[7] des trois bissectrices intérieures d'un triangle. Soit la configuration suivante :



Le point T est alors situé au milieu de l'arc $\overset{\frown}{BC}$. Cela implique en particulier $TB = TC$ et donc T appartient à la médiatrice de $[BC]$. Autrement dit, la bissectrice de $\hat{A}$ et la médiatrice de $[BC]$ s'intersectent sur le cercle circonscrit de ABC.

Remarque. Cette dernière formulation est plus difficile à prouver de façon directe. En effet, il faut alors retourner le problème et adopter à nouveau une méthode de fausse position : on définit T' comme l'intersection de la bissectrice et du cercle, et on prouve que ce point est aussi sur la médiatrice comme on l'a fait précédemment.

Il y a une raison objective à cela. Dans le cas où le triangle est isocèle, le point d'intersection de la médiatrice et de la bissectrice n'est pas défini puisque ces deux droites sont confondues. Ce cas d'exception semble suggérer que cette dernière intersection se comporte moins bien du point de vue des propriétés et des manipulations que l'intersection de la bissectrice avec le cercle (qui elle est toujours définie même si le triangle est isocèle).

[7] Les trois bissectrices sont concourantes, car on peut définir la bissectrice de l'angle $\hat{A}$ comme l'ensemble des points équidistants des droites (AB) et (AC). On adapte alors la démonstration de la concourance des médiatrices.

Toujours dans la configuration précédente, en notant I le centre du cercle inscrit, on montre que TBI est isocèle en T. Pour cela, on procède à nouveau à une chasse aux angles : en notant α, β et γ les angles du triangles ABC respectivement en A, B et C, on a $\widehat{BTI} = \widehat{BTA} = \gamma$ et :

$$\widehat{IBT} = \widehat{IBC} + \widehat{CBT} = \frac{\beta}{2} + \widehat{CAT} = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2}.$$

Comme la somme des angles du triangle BTI vaut $\pi = \alpha + \beta + \gamma$, il vient que $\widehat{BIT} = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2}$ et on conclut que le triangle BTI est bien isocèle.

Droite de Simson

C'est, comme le cercle d'Euler, un résultat de première importance. Certains des candidats français aux Olympiades internationales ne le connaissaient pas, ce qui leur a valu de ramener du Mexique plusieurs sombres zéros en géométrie.

Théorème 1.3 *Soient ABC un triangle, M un point du plan et P, Q et R les projetés orthogonaux de M sur les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Alors les points P, Q et R sont alignés si et seulement si M est sur le cercle circonscrit à ABC.*

Démonstration. Pour faire une démonstration rigoureuse qui ne s'embarrasse pas de tous les cas de figure, on est amené à raisonner en termes d'angles orientés de droites.

Les points P, Q, M et C sont cocycliques (sur le cercle de diamètre $[MC]$) et donc :

$$(PQ, PM) = (CQ, CM) = (CA, CM) \pmod{\pi}.$$

En remplaçant Q par R, on obtient une relation analogue[8] qui est :

$$(PQ, PR) = (BA, BM) \pmod{\pi}.$$

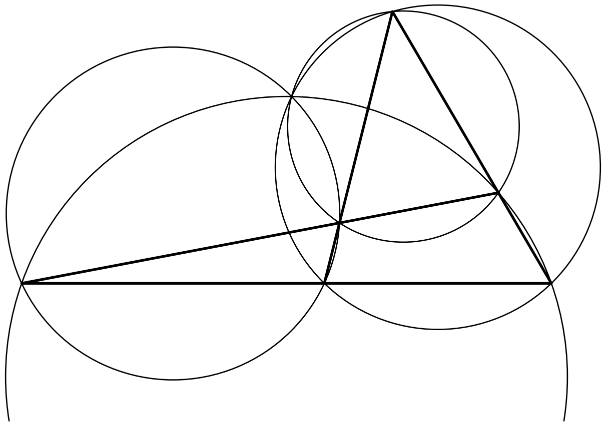
Ainsi, les points P, Q et R sont alignés si et seulement si :

$$\begin{aligned} (PQ, PM) &= (PR, PM) \pmod{\pi} \\ (CA, CM) &= (BA, BM) \pmod{\pi} \end{aligned}$$

et cette dernière condition exprime la cocyclicité des points A, B, C et M. □

Voici une conséquence du théorème précédent :

Théorème 1.4 *On se donne quatre droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ en position générale (*i.e.* deux non parallèles, trois non concourantes). Alors les quatre cercles circonscrits tracés sur la figure suivante :*



[8] En se concentrant intensément, mais sans réfléchir... logiquement !

passent par un même point.

Pour démontrer cela, on peut effectuer une chasse aux angles, mais plus simplement on peut utiliser le théorème de Simson. Appelons Γ_i le cercle circonscrit aux triangles formé par les trois droites Δ_j, $j \neq i$. Notons S le point d'intersection (qui n'est pas l'intersection de Δ_3 et de Δ_4) de Γ_1 et de Γ_2. Alors les projetés de S sur les droites Δ_2, Δ_3, Δ_4 d'une part et sur les droites Δ_1, Δ_3, Δ_4 d'autre part sont alignés d'après le théorème de Simson. Mais alors les quatre projetés sur les droites sont alignés et démontre que S appartient aux deux autres cercles en utilisant la réciproque du théorème de Simson.

Similitudes

Il s'agit ici d'une première approche destinée à fournir une solution rapide de l'exercice 5 donné à Mérida. La notion de similitude est au programme de la spécialité mathématiques de la terminale S : le lecteur sera invité à étudier avec soin cette partie du programme.

Dans le plan, la similitude (directe) de centre O, de rapport k et d'angle α est la transformation s qui à tout point M fait correspondre le point M' tel que $OM' = kOM$ et $\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}} = \alpha$ (modulo 2π).

Si on note h l'homothétie de centre O et de rapport k et r la rotation de centre O et d'angle α, on constate que $s = r \circ h = h \circ r$.

Supposons que la similitude s envoie A, sur A' et B sur B' ; les triangles OAB et $OA'B'$ sont semblables ; on en déuit qu'il existe une similitude s' qui envoie A sur B et A' sur B'.

Partons maintenant de quatre points distincts A, B, A', B'. Pour éviter des cas particuliers, supposons que les quatre droites (AB), $(A'B')$, (AA') et (BB') sont en position générale, c'est-à-dire que deux quelconques d'entre elles ne sont pas parallèles, et que trois quelconques ne sont pas concourantes.

On démontre alors qu'il existe une unique similitude directe s telle que $s(A) = A'$ et $s(B) = B'$. Cette propriété sera démontrée en classe de terminale à l'aide des nombres complexes, et nous l'admettrons ici bien que les commentaires qui suivent suffisent à reconstituer une démonstration géométrique (que le lecteur est invité à chercher).

Le point clé est de construire le centre de s : comme s doit envoyer la droite (AB) sur $(A'B')$, son angle α doit être égal à $(AB, A'B')$ modulo π, ce qui impose à O d'appartenir aux cercles circonscrits aux triangles définis respectivement par les droites AB, $A'B'$, AA' d'une part, et AB, $A'B'$, BB' d'autre part : c'est ici qu'il faudrait vérifier que le point commun de ces deux cercles qui n'est pas égal à l'intersection de AB et $A'B'$ est effectivement centre d'une similitude s.

Mais O est aussi le centre d'une similitude telle que $s'(A) = B$ et $s'(A') = B'$ et appartient donc aussi aux cercles circonscrits aux triangles définis respectivement par les droites AA', BB', AB d'une part et AA', BB', $A'B'$ d'autre part.

On retrouve ainsi le théorème des quatre cercles concourants, théorème qu'on peut maintenant appeler aussi théorème du centre de similitude : on retient que le centre de similitude appartient aux quatre cercles définis à partir des quatre droites (AA'), (BB'), (AB) et $(A'B')$ et que ses projetés orthogonaux sur ces quatre droites sont alignés.

Terminons toutes ces belles choses par une application à l'exercice 5 de Mérida, exercice assez simple si on l'aborde avec la notion de similitude.

Exercice 2. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. On suppose que (AD) et (BC) ne sont pas parallèles et que $AD = BC$. Soit $E \in [AD]$ et $F \in [BC]$ tels que $AE = CF$. On note P, Q, R les points d'intersection respectifs de (AC) et (BD), de (AC) et (EF), de (BD) et (EF). Montrer que quand E varie, les cercles circonscrits aux triangles PQR ont un point commun autre que P.

Solution de l'exercice 2. Comme $AD = CB$ et qu'il n'y a pas parallélisme, on voit qu'il existe une rotation s telle que $s(A) = C$ et $s(D) = B$. De plus, compte tenu des hypothèses sur E et F on a $s(E) = F$. (On a décidé de noter s cette rotation car on n'utilisera désormais que les propriétés des similitudes). Soit O le centre de s.

Utilisons le cours : comme $s(A) = C$ et $s(D) = B$, les projetés orthogonaux de O sur (AD), (BC), (AC), (BD) sont alignés sur une droite Δ ; comme $s(A) = C$ et $s(E) = F$, les projetés orthogonaux de O sur $(AE) = (AD)$, $(CF) = (BC)$, (AC) et (EF) sont alignés sur une droite Δ'. Mais $\Delta = \Delta'$ puisqu'il y a trois points communs. En définitive, les cinq projetés sur les droites (AD), (BC), $(AC) = (PQ)$, $(BD) = (PR)$, $(EF) = (QR)$ sont alignés : en particulier, le théorème de Simson montre que O appartient au cercle circonscrit à PQR.

Quand E varie, on a donc montré que le cercle circonscrit à PQR passe toujours par O. Pour conclure, il suffit de remarquer que O est distinct de P : si on avait $O = P$, la rotation s serait une homothétie (car enverrait (PA) sur (PC)) ; (BC) et (AD) seraient alors parallèles, ce qui n'est pas.

2 Stratégies

Dans ce cours, on voudrait vous montrer comment un peu de bon sens, et quelques principes simples, permettent de traiter sans trop réfléchir un grand nombre d'exercices.

Le principe des tiroirs

On commence par un énoncé très facile qu'il faut bien avoir en tête, car ses conséquences sont utiles et son application parfois un peu cachée. Normalement, ce qui suit n'a pas besoin de démonstration.

Théorème 2.1 *Si l'on place n objets dans m tiroirs, et si $n > m$, alors il y a un tiroir qui contient au moins deux objets.*

C'est ce que l'on appelle le *principe des tiroirs*. On peut le généraliser (un peu) comme suit :

Théorème 2.2 *Si l'on place n objets dans m tiroirs, et si $n > km$, alors il y a un tiroir qui contient au moins $k+1$ objets.*

Enfin, une version abstraite de la même chose :

Théorème 2.3 *Si $f : A \to B$ est une application d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à m éléments, et si $n > km$, alors on peut trouver $b \in B$ tel que $f^{-1}(\{b\})$ contienne au moins $k+1$ éléments*[9].

On pourrait aussi donner une version « du point de vue des objets » : on peut trouver $k+1$ éléments qui sont dans le même tiroir (ou qui ont même image par f). Remarquons enfin que l'on peut remplacer le nombre k dans les énoncés précédents par la *partie entière* de n/m, notée $[n/m]$, c'est-à-dire le plus petit entier inférieur ou égal à n/m.

Donnons quelques exemples pas trop difficiles :

✍ Parmi 13 personnes, on peut en trouver 2 qui sont nées au même mois de l'année.

[9] Par définition, $f^{-1}(\{b\})$ est l'ensemble des éléments de A envoyés sur b par la fonction f.

✍ Parmi 101 nombres réels compris entre 0 et 1 (au sens large), on peut en trouver 2 dont la différence est inférieure ou égale à $\frac{1}{100}$

✍ Si a et b sont deux nombres entiers, et si b est au moins égal à 2, alors le développement décimal (c'est-à-dire la suite des chiffres) de la fraction $\frac{a}{b}$ est périodique à partir d'un certtain rang, et la période est au plus $b-1$.

La preuve du premier exemple est laissée au lecteur. Le deuxième exemple se comprend en introduisant comme objets les 101 nombres en question, et comme tiroirs les 100 intervalles $[0, 1/100[, [1/100, 2/100[, \ldots, [99/100, 1]$. Le principe des tiroirs nous permet d'affirmer que l'on peut trouver deux nombres qui sont dans le même intervalle, et la différence de ces deux nombres est bien inférieure ou égale à 1/100.

Pour démontrer le résultat du dernier exemple, il suffit de poser la division de a par b. Quand on pose celle-ci, les restes qui peuvent intervenir lorsque l'on calcule les chiffres situés après la virgule sont au plus égaux à $b-1$. Bien entendu, si l'on trouve 0 à un moment, alors la division s'arrête : il n'y a qu'un nombre fini de chiffres après la virgule, et le résultat est démontré (il y a une suite infinie de 0, donc la suite est périodique de période 1). Si l'on ne trouve jamais de 0, les seuls restes que l'on peut obtenir sont $1, 2, \ldots, b-1$. Le principe des tiroirs nous montre donc qu'après avoir calculé b chiffres après la virgule, on trouvera forcément un reste que l'on a déjà obtenu auparavant, ce qui rend la suite de chiffres calculée périodique de période au plus $b-1$.

Quand on cherche à appliquer le principe des tiroirs, deux difficultés au moins se présentent. D'abord, il faut trouver à quoi l'appliquer, c'est-à-dire choisir convenablement ses objets et ses tiroirs. Ensuite, il faut être capable de vérifier que les hypothèses nécessaires à l'application du principe sont satisfaites. Pour cela, on doit estimer les nombres de tiroirs et d'objets. On verra un peu plus tard comment s'occuper du second problème. Quant au premier, c'est en *s'exerçant* qu'on le résout ! Continuons donc à donner des exemples.

Exercice 3. Dans une assemblée de n personnes, certaines se connaissent et pas d'autres[10]. Montrer que l'on peut trouver deux individus différents qui connaissent le même nombre de personnes dans l'assemblée.

Solution de l'exercice 3. On a envie de considérér comme tiroirs les entiers de 0 à $n-1$, et de mettre une personne de l'assemblée dans le tiroir qui correspond au nombre de personne qu'elle connaît. Mais il y a n tiroirs, et n personnes, donc le principe des tiroirs ne s'applique pas. Heureusement, on remarque qu'il est impossible qu'il y ait à la fois une personne qui connaisse les $n-1$ autres, et une autre qui n'en connaisse aucune. Au plus $n-1$ tiroirs sont donc occupés, ce qui permet de conclure.

Exercice 4. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des entiers naturels. Montrer que la somme d'un certain nombre d'entre eux est divisible par n.

Solution de l'exercice 4. On considère les restes modulo n des nombres $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots, a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Deux cas sont possibles. Le premier cas est celui où le reste 0 intervient dans cette suite. Cela signifie que l'un des n entiers considérés est divisible par n, et résout l'exercice. Dans le second cas, le reste 0 n'intervient pas. Les n restes que l'on considère sont donc parmi les entiers de 1 à $n-1$. Le principe des tiroirs nous assure donc que deux des entiers considérés, appelons-les $a_1 + a_2 + \cdots + a_i$ et $a_1 + a_2 + \cdots + a_j$, ont le même reste modulo n. Cela signifie exactement que leur différence, c'est-à-dire $a_{i+1} + a_2 + \cdots + a_j$ (on peut bien entendu, quitte à échanger les deux indices, supposer que i est strictement inférieur à j), est divisible par n, ce qui achève la démonstration.

[10]On suppose que si A connaît B, alors B connaît A.

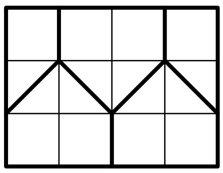
Exercice 5. Montrer que, parmi $n+1$ nombres de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, on peut en trouver deux dont l'un divise l'autre.

Solution de l'exercice 5. Tout nombre a compris entre 1 et $2n$ s'écrit $a = 2^k(2s+1)$ où s est un entier entre 0 et $n-1$. Comme l'on considère $n+1$ nombres, le principe des tiroirs nous permet d'en trouver deux, appelons les a et b, qui s'écrivent $a = 2^k(2s+1)$ et $b = 2^\ell(2s+1)$. Il est clair que l'un de ces deux nombres divise l'autre.

L'autre aspect du principe des tiroirs est plus géométrique, se rapprochant du deuxième exemple que l'on a donné au début.

Exercice 6. On place six points dans un rectangle de largeur 3 et de longueur 4. Montrer qu'au moins deux d'entre eux sont à une distance inférieure ou égale à $\sqrt{5}$.

Solution de l'exercice 6. On découpe le rectangle en cinq parties de la façon suivante :



D'après le principe des tiroirs, deux points au moins sont situés dans le même « tiroir ». Il est alors facile de vérifier que la distance entre ces deux points est inférieure ou égale à $\sqrt{5}$.

On peut remarquer que le principe des tiroirs fournit dans cet exercice un résultat bien meilleur que le raisonnement naturel qui consisterait à dire que deux points sont à une distance supérieure à $\sqrt{5}$ si et seulement si les disques de centre ces deux points et de rayons $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ sont disjoints, puis à estimer l'aire totale recouverte par ces disques. Si le principe des tiroirs est plus efficace, c'est qu'il tient compte de la géométrie du problème considéré, et pas seulement d'un argument quantitatif comme l'aire de la figure : sa forme même est prise en compte.

Autour de la récurrence

La notion de récurrence est un outil essentiel pour traiter tout ce qui a trait aux ensembles finis. Le résultat fondamental est le suivant.

Théorème 2.4 *Tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.*

Démontrer vraiment ce résultat est difficile sans faire de cercle vicieux. A vrai dire, c'est en un sens impossible, puisque c'est plus un élément de la définition de $\mathbb{N}$ qu'une de ses propriétés.

Comme pour le principe des tiroirs, on semble n'avoir énoncé qu'une trivialité, mais ça n'est pas le cas : (presque)[11] toutes les propriétés des entiers peuvent s'en déduire. En outre, il est important de se rendre compte que cette propriété n'est par exemple pas vérifiée par l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Bien entendu, $\mathbb{R}$ n'a pas de plus petit élément, mais même un de ses sous-ensembles bornés comme l'intervalle $]0, 1[$ n'en a pas non plus (prouvez-le !).

Le principe de récurrence, dont nous allons parler dans un instant, est bien sûr plus utile que le résultat que l'on vient d'énoncer, mais il ne faut quand même pas négliger ce dernier, qui peut souvent servir et donner des idées.

Passons donc à la récurrence proprement dite :

[11] Le « presque » est important, et certains textes que vous pouvez trouver sur le site d'Animath vous en dirons plus.

Théorème 2.5 *Soit $P(n)$ une proposition*[12] *dépendant de l'entier relatif n et soit a un entier quelconque. Pour montrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à a, il suffit de prouver*

- ✍ *que $P(a)$ est vraie,*
- ✍ *que pour tout entier k supérieur ou égal à a, la proposition $P(k)$ entraîne la proposition $P(k+1)$.*

Le principe de récurrence est une conséquence de la propriété de $\mathbb{N}$ que nous avons vue plus haut : en effet, on peut supposer $a = 0$ comme il est facile de le voir, et si l'on raisonne par l'absurde en supposant que les conditions d'application de la récurrence sont satisfaites sans que la propriété $P(n)$ soit vraie pour tout entier n positif, alors l'ensemble des entiers n pour lesquels $P(n)$ est fausse est non vide, mais n'a pas de plus petit élément[13].

Donnons tout de suite un exemple en montrant que la somme des carrés des nombres entiers compris entre 1 et n vaut $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Ici, on prend $a = 0$, et la proposition $P(n)$ est « la sommme des carrés des nombres entiers compris entre 1 et n vaut $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ». La proposition $P(0)$ est évidemment vraie : c'est l'égalité $0 = 0$. Soit k un entier positif. On suppose que la proposition $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que :

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

On a donc :

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2.$$

Mais un calcul simple montre que l'on a

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

ce qui est précisément la proposition $P(k+1)$, et permet de conclure la démonstration par récurrence.

L'exemple précédent met en évidence deux aspects du raisonnement par récurrence. Tout d'abord, sa – relative – facilité : il est souvent assez mécanique de prouver par récurrence des égalités d'entiers. Mais on voit de la même façon que le raisonnement par récurrence ne se suffit pas à lui-même : dans l'exemple précédent, il nous fallait connaître la formule *a priori* pour pouvoir faire la démonstration, et c'est bien souvent là que se trouve la difficulté.

Avant de continuer, donnons, sans démonstration, une forme un peu plus générale du principe de récurrence, la récurrence *forte*.

Théorème 2.6 *Soit $P(n)$ une proposition dépendant de l'entier relatif n et soit a un entier quelconque. Pour montrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à a, il suffit de prouver :*

- ✍ *que $P(a)$ est vraie,*
- ✍ *que pour tout entier k supérieur ou égal à a, les propositions $P(a), P(a+1), \ldots, P(k)$ entraînent la proposition $P(k+1)$.*

[12] Très souvent, c'est en fait une certaine propriété de l'entier n.

[13] Complétez cette preuve !

Bien entendu, le principe de récurrence peut aussi servir, c'est très courant et la suite du texte le supposera connu, des suites ou des fonctions par récurrence.

Donnons un exemple de problème où la récurrence forte intervient.

Exercice 7. Dans un village, les lois sur l'adultère sont très strictes : un mari qui peut prouver que sa femme le trompe doit la bannir du village le soir même du jour où il s'en aperçoit. Bien sûr, chaque homme sait toujours si les autres habitants du village sont trompés ou non par leur femme, mais jamais si lui-même est trompé. Un beau matin, le curé annonce « dans ce village, il y a au moins une femme qui trompe son mari ». Or dans ce village, il y a 100 femmes infidèles. Que se passe-t-il ?

Solution de l'exercice 7. Le lecteur, attentif et à l'esprit rapide, se contentera de savoir qu'il faut montrer, par récurrence forte sur l'entier n, que si n femmes trompent leur mari dans ce village, alors, n soirs après l'annonce du curé, les n maris trompés banniront simultanément leur n femmes.

Tout ces exemples montrent l'intérêt qu'on a, quand c'est possible, de raisonner par récurrence. Pour ce faire, il est souvent nécessaire de renforcer les résultats que l'on cherche à obtenir. Voyons comment :

Exercice 8. Montrer que

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2.$$

Solution de l'exercice 8. Bien entendu, le résultat demandé ne peut pas se démontrer directement par récurrence sur l'entier n. Il suffit de démontrer l'inégalité suivante, plus forte :

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n+1}.$$

Exercice 9. Soit N un entier au moins égal à 2, Montrer l'inégalité

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{\cdots\sqrt{(N-1)\sqrt{N}}}}}<3.$$

Solution de l'exercice 9. La première idée est de tenter une démonstration par récurrence sur N. Mais quelques tentatives infructueuses nous convainquent vite que cette idée ne marche pas. Pourtant, l'idée de départ était bonne, mais on va plutôt faire une récurrence sur 2, pas sur N. Plus précisément, on peut conjecturer la généralisation suivante :

$$\sqrt{m\sqrt{(m+1)\sqrt{\ldots\sqrt{(N-1)\sqrt{N}}}}}<m+1.$$

A N fixé, on peut raisonner par récurrence *descendante* sur m : le principe est tout à fait semblable, sauf que l'on part de $m=N$ et que l'on prouve que le résultat pour m implique le résultat au rang $m-1$. La mise en oeuvre de la preuve précise ne présente pas de difficulté.

Concluons avec un exercice plus difficile, le sixième de l'olympiade internationale 1988. Pour ne pas tenter le lecteur, on ne donne pas de solution, en indiquant seulement qu'il faut deviner quelle est la fonction définie, et que ce n'est pas tout à fait évident.

Exercice 10. Soit f la fonction de $\mathbb{N}^\star$ dans lui même définie par $f(1) = 1$, $f(3) = 3$, et, pour tout entier n strictement positif,

$$f(2n) = f(n) \quad ; \quad f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n) \quad ; \quad f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n).$$

Trouver le nombre d'entiers n compris entre 1 et 2005 tels que $f(n) = n$.

Et voilà, ce cours est terminé ! Bien sûr, il y a encore beaucoup de choses à dire, et à apprendre, et j'espère que vous ferez l'effort non seulement de lire les polycopiés présents sur le site d'Animath[14], mais aussi, et surtout, de pratiquer, en réflechissant par vous-même, tant il est vrai que les mathématiques ne s'apprennent que si l'on en fait.

3 Fonctions

Je souhaite vous parler des méchantes fonctions. Car dans vos gentils programmes scolaires, le mot « fonction » ne désigne que les « bonnes fonctions » : les polynômes notamment, des fonctions bien régulières... Alors que le concept de fonction, tel qu'il a été mis au point à partir du XIXème siècle, correspond à bien autre chose que ces « bonnes fonctions ». D'autant qu'en ce même XIXème siècle a été précisée la notion de « nombre réel », très différente des nombres entiers. En 1877, Cantor écrivait à propos d'une fonction qui à un point d'un segment (un nombre réel) associait bijectivement un point d'un carré (deux nombres réels) : « je le vois mais je ne le crois pas ». Presque tout ce qu'on vous enseigne au lycée était connu au XVIIIème siècle, mais aujourd'hui, cette formidable transformation du concept de fonction qui s'est opérée sur plusieurs décennies, on compte sur vous pour l'assimiler en un quart d'heure.

Une fonction d'un ensemble A dans un ensemble B associe à tout élément de A un élément de B. Une équation fonctionnelle, c'est une équation dont l'inconnue est une fonction, ladite fonction pouvant être définie de n'importe quelle manière pour peu qu'à un élément de l'ensemble de départ elle associe un élément de l'ensemble d'arrivée.

Exercice 11. Existe-t-il une fonction f, de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels (positifs ou nuls) dans lui-même, qui pour tout entier n vérifie $f(f(n)) = n + 1$?

Solution de l'exercice 11. À quoi peut être égal $f(0)$? À 0 ? Non, car cela entraînerait $f(f(0)) = f(0) = 0$, incompatible avec $f(f(n)) = n + 1$. À 1 ? Non : on devrait avoir $f(f(0)) = f(1) = 1$, donc $f(f(1)) = 1$, incompatible avec la définition. À 2 ? Pour que $f(f(n)) = n + 1$, il faudrait que $f(2) = 1$, $f(1) = 3$ et $f(3) = 2$, mais $f(2)$ n'est pas égal à 4 : contradiction. On pourrait continuer ainsi, si ce n'est qu'à ce rythme là on risque fort d'y passer la nuit. Une fois qu'on a fait connaissance avec l'équation par des tâtonnements de ce type, il faut se lancer, essayer de trouver un argument global qui mène à la solution de l'équation. En l'occurrence, l'argument consiste à réitérer une troisième fois la fonction f :

$$\begin{aligned} f(f(f(n))) &= f[f(f(n))] = f(n+1) \\ &= f(f[f(n)]) = f(n) + 1 \end{aligned}$$

si bien que pour tout n on doit avoir $f(n+1) = f(n)+1$. Si l'on pose $f(0) = a$ (a n'est pas encore connu), $f(1) = a + 1$, $f(2) = a + 2$, et par récurrence il est facile de montrer que $f(n) = a + n$.

[14] `http://www.animath.fr/`

Il en résulte que $f(f(n)) = 2a + n$, et pour avoir $f(f(n)) = n + 1$ il faudrait que $a = 1/2$, ce qui n'est pas possible car l'image $n + a$ d'un entier n doit obligatoirement être un entier. Ce qui prouve bien qu'une telle fonction n'existe pas.

Maintenant, un exercice qui pourrait ressembler à première vue :

Exercice 12. Existe-t-il une fonction de $\mathbb{N}^\star$ dans $\mathbb{N}^\star$ qui pour tout entier n strictement positif vérifie $f(f(n)) = f(n) + n$?

Solution de l'exercice 12. Non seulement il en existe, mais il en existe tout plein : en posant $f(1) = 3$ par exemple, on aurait $f(3) = 4$, puis $f(4) = 7$, $f(7) = 11$, $11 \mapsto 18 \mapsto 29 \mapsto \cdots$ Puis on choisit $f(2)$ parmi les valeurs non encore utilisées, ce qui donne une seconde chaîne de valeurs, et ainsi de suite... Mais l'énoncé (Olympiades 1995) donnait des conditions supplémentaires qui limitaient le choix : $f(1) = 2$, et pour tout n, $f(n) < f(n + 1)$. On avait donc $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 5 \mapsto 8 \mapsto 13 \mapsto 21 \mapsto \cdots$ et pour 4 qui n'appartenait pas à cette chaîne, on devait avoir $f(4) > f(3) = 5$ et $f(4) < f(5) = 8$, ce qui laissait deux possibilités : $4 \mapsto 6 \mapsto 10 \mapsto 16 \mapsto \cdots$ ou $4 \mapsto 7 \mapsto 11 \mapsto 18 \mapsto 29 \mapsto \cdots$. Mais ces possibilités vérifiaient-elles la condition $f(n+1) > f(n)$ (fonction strictement croissante) ? Devant un tel problème, on doit faire un choix de stratégie : soit on cherche à prouver qu'une telle fonction n'existe pas, et on trouve un argument global qui lui interdit d'exister, soit on cherche à prouver qu'elle existe et on construit explicitement ladite fonction. En l'occurrence, elle existe, et on remarque dans la première chaîne de valeurs $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 5 \mapsto 8 \mapsto 13 \mapsto 21 \mapsto \cdots$ des termes de la suite de Fibonacci. De fait, il est facile de prouver par récurrence que si F_k est le k-ième terme de cette suite, $f(F_k) = F_k + 1$. D'où l'idée d'introduire le nombre d'or, $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$: puisque F_{k+1} est l'entier le plus voisin de φF_k, ne peut-on pas trouver une fonction de la forme $f(n) = [\varphi n + c]$, en notant $[x]$ la partie entière du réel x, pour une constante c judicieusement choisie ? On peut montrer que non seulement c'est possible, pour peu que c appartienne à un intervalle que l'on va préciser, mais en outre, pour chaque valeur de cet intervalle, la fonction ainsi définie est différente de celle obtenue pour toute autre valeur, ce qui fournit une infinité non dénombrable de fonctions solutions.

Contentons-nous de trouver une solution, donc un choix possible de c tel que la fonction $f(n) = [\varphi n + c]$ soit solution. Il faut prouver deux choses : d'une part que $f(f(n)) = f(n) + n$ pour tout n, d'autre part que pour tout n, $f(n + 1) > f(n)$. La seconde relation est évidente : comme $\varphi > 1$ ($\varphi \simeq 1,618\ldots$), entre $\varphi n + c$ et $\varphi(n + 1) + c$, il y a au moins un entier (parfois deux), car tout intervalle de longueur supérieure à 1 contient un entier. Si bien que le plus petit entier inférieur ou égal à $\varphi(n + 1) + c$ ne peut pas être le même que le plus petit entier inférieur ou égal à $\varphi.n + c$, il est obligatoirement strictement supérieur. Maintenant, a-t-on :

$$[\varphi[\varphi n + c] + c] = [\varphi n + c] + n\,?$$

Ceci revient à prouver que pour tout n, d'une part :

$$\varphi[\varphi n + c] + c \geq [\varphi n + c] + n$$

et d'autre part :

$$\varphi[\varphi n + c] + c < [\varphi n + c] + n + 1.$$

Or si l'on pose $m = [\varphi n + c]$, $\frac{m-c}{\varphi} \leq n < \frac{m+1-c}{\varphi}$, et il suffit de prouver l'inégalité :

$$\varphi m + c \geq m + \frac{m + 1 - c}{\varphi}$$

(lui-même supérieur à $m + n$), et que :

$$\varphi m + c < m + \frac{m - c}{\varphi} + 1$$

(lui-même inférieur à $m+n+1$). Comme $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$, les termes en m s'annulent et il reste à trouver une constante c telle que $\frac{1-c}{\varphi} \leq c < 1 - \frac{c}{/}\varphi$. On trouve facilement :

$$\frac{1}{\varphi^2} \leq c < \frac{1}{\varphi}$$

soit environ $0,382 \leq c < 0,618$. Pour toute valeur de l'intervalle ainsi défini, la fonction $[\varphi n + c]$ est solution du problème (il aurait suffi de le prouver pour une seule de ces valeurs, par exemple $c = 1/2$). Montrer que toutes ces fonctions sont différentes n'est pas évident, car pour deux valeurs très proches de c un très grand nombre de valeurs des fonctions ainsi définies sont les mêmes.

Toujours sur l'ensemble des entiers naturels, voici un problème jugé difficile il y a quelques années par les candidats au concours général :

Exercice 13. Soit f une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer qu'on peut trouver trois entiers naturels a, b, c tels que $a < b < c$ et $f(a) + f(c) = 2f(b)$.

Solution de l'exercice 13. Il ne s'agit pas d'une équation fonctionnelle, puisque f est donnée, et on n'a pas à choisir entre prouver que c'est possible et prouver que c'est impossible, car l'énoncé nous fournit la réponse. Il faut donc exhiber ces trois entiers a, b, c. Si je choisis $a = 0$, j'aurai obligatoirement, pour tout b non nul, $a < b$. Il reste à trouver c tel que d'une part $c > b$, d'autre part $f(c) = 2f(b) - f(a)$. La seconde relation ne pose pas problème : par définition, la fonction f est une bijection, elle est injective : tout entier de l'ensemble d'arrivée est l'image d'un seul entier de l'ensemble de départ, et surtout elle est surjective : tout entier est l'image d'au moins un entier. Donc en définitive, tout entier est l'image d'un et un seul entier, de sorte que quel que soit b, il existe un et un seul c vérifiant $f(c) = 2f(b) - f(a)$. Mais comment prouver que $c > b$? Tout simplement en choisissant un b particulier, à savoir le plus petit entier tel que $f(b) > f(0)$. Comme f est surjective, cet entier existe, et il est bien sûr distinct de $a = 0$. Qui plus est :

$$f(c) = f(b) + (f(b) - f(a)) > f(b) > f(a)$$

prouve d'une part que c fait lui aussi partie des entiers dont l'image est strictement supérieure à $f(a)$ (donc $c \geq b$, puisque b est le plus petit d'entre eux), d'autre part que c est distinct de b (puisque $f(c) > f(b)$), donc en définitive, on a bien $a < b < c$ et $f(a) + f(c) = 2f(b)$, ce qui achève la démonstration. La difficulté du problème est qu'on croit devoir démontrer plus de choses qu'on en a à démontrer en réalité.

Il arrive que l'on n'ait pas à déterminer explicitement une fonction, mais seulement une valeur de la fonction. Il peut exister une infinité de fonctions vérifiant l'équation, mais prenant toutes obligatoirement la même valeur pour un entier donné. Un exemple classique :

Exercice 14. Une fonction f de $\mathbb{N}^\star$ dans $\mathbb{N}^\star$ vérifiant, pour deux entiers n et m quelconques, $f(nm) = f(n) + f(m) - 1$. On suppose qu'il existe un nombre fini d'entiers n tels que $f(n) = 1$. Sachant que $f(30) = 4$, calculer $f(14400)$.

Solution de l'exercice 14. La relation $f(nm) = f(n) + f(m) - 1$ fournit :

$$f(30) = f(2) + f(15) - 1 = f(2) + f(3) + f(5) - 2$$

mais que peuvent valoir $f(2)$, $f(3)$ et $f(5)$? Leur somme doit être égale à 6, puisque $f(30) = 4$, donc soit tous trois valent 2, soit l'un d'eux au moins vaut 1. C'est là qu'intervient la seconde hypothèse : si $f(n) = 1$, $f(n^2) = 2f(n) - 1 = 1$, et donc $f(n^4), f(n^8), \ldots$ sont tous égaux à

1. Si $n = 1$, on a obligatoirement $f(1) = 1$, car pour tout m, $f(m) = f(m) + (f(1) - 1)$. Mais si $f(n)$ était égal à 1 pour un entier n distinct de 1, alors il serait égal à 1 pour une infinité d'autres entiers : $n^2, n^4, n^8, \ldots$ ce qui contredirait l'hypothèse qu'il existe un nombre fini d'entiers n tels que $f(n) = 1$. On en déduit que pour tout n distinct de 1, $f(n) \geq 2$. En particulier, pour avoir $f(30) = 4$, il faut que $f(2) = f(3) = f(5) = 2$, donc $f(4) = 2f(2) - 1 = 3$, $f(120) = f(4) + f(30) - 1 = 6$, et comme $14400 = 120^2$, il vient $f(14400) = 2f(120) - 1 = 11$.

Avant d'envisager des fonctions définies sur l'ensemble des nombres réels, un mot de fonctions définies sur l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels. Une équation fondamentale, à bien connaître car le résultat et la démonstration s'appliquent à nombre de problèmes, c'est l'équation de Cauchy :

Exercice 15. Déterminer toutes les fonctions de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$ telles que, pour tout couple de rationnels (x, y), on a $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Solution de l'exercice 15. Cette relation permet de démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $f(nx) = nf(x)$. En effet, c'est vrai pour $n = 0$: pour les valeurs particulières $x = y = 0$, on doit avoir $f(0) = 2f(0)$, donc $f(0) = 0$. Supposons que ce soit vrai pour un entier naturel n quelconque (et pour toute valeur de x). Alors, $f(x+nx) = f(x)+f(nx) = f(x)+nf(x)$ (d'après l'hypothèse de récurrence), donc en définitive $f((n + 1)x) = (n + 1)f(x)$: la relation est encore vraie pour l'entier suivant $(n + 1)$, et pour toute valeur de x. Cela prouve par récurrence qu'elle est vraie pour tout n, entier naturel, et pour tout x. Elle est même vraie pour tout n entier relatif, et pour tout x, car :

$$f(nx + (-n)x) = f(nx) + f((-n)x).$$

Comme le membre de gauche est égal à 0, $f((-n)x) = -f(nx) = -nf(x)$. Si donc on pose $f(1) = a$, pour tout entier n de $\mathbb{Z}$, $f(n) = an$. Mais peut-on calculer $f(x)$ lorsque x n'est pas entier, mais seulement rationnel ? Oui ! En effet, tout rationnel x s'écrit $x = p/q$. Donc, d'après la relation démontrée ci-dessus, $f(qx) = qf(x)$. Mais $qx = p$, entier, donc $f(qx) = ap$. Il en résulte que $f(x) = \frac{ap}{q} = ax$. Sur l'ensemble des rationnels, l'équation de Cauchy $f(x + y) = f(x) + f(y)$ admet pour uniques solutions les fonctions linéaires $f(x) = ax$, pour $a = f(1)$ rationnel quelconque.

Remarque. Il en va tout autrement sur l'ensemble des réels. L'ensemble des réels contient infiniment plus de nombres que l'ensemble des rationnels, il est non dénombrable, ce qui signifie qu'on ne peut pas numéroter les réels (alors qu'on pourrait numéroter les rationnels), et le raisonnement par récurrence ne s'applique pas aux nombres réels. Notamment, rien ne permet d'affirmer que seules les fonctions linéaires f(x) = ax sont solution de l'équation de Cauchy sur l'ensemble des nombres réels. On a besoin d'un axiome de plus pour dire si oui ou non il existe d'autres fonctions vérifiant cette équation, et il est impensable d'exhiber une telle fonction, jamais on ne parviendra à en construire une explicitement. Par contre, on peut affirmer qu'une fonction autre que $f(x) = ax$ (a réel quelconque) vérifiant l'équation de Cauchy : pour tous réels x et y, $f(x+y) = f(x) + f(y)$, serait en tout point non continue, non monotone et non bornée. Donc si l'énoncé fournit la condition supplémentaire que la fonction doit être continue ne fût-ce qu'en un point, monotone ou bornée ne fût-ce que sur un intervalle si petit soit-il, alors seules conviennent les fonctions $f(x) = ax$.

Dire qu'une fonction est continue en un point x_0, c'est dire que lorsque x tend vers x_0, $f(x)$ tend vers $f(x_0)$. Or l'ensemble $\mathbb{Q}$ desrationnels possède la propriété d'être dense dans $\mathbb{R}$, ce qui signifie qu'entre deux réels si proches soient-ils, on peut toujours trouver un rationnel. En effet, si x et y sont distants de $\varepsilon > 0$, si petit soit-il, il existera toujours un entier $N > \frac{1}{\varepsilon}$, de sorte que Nx et Ny seront distants de $N\varepsilon > 1$. Entre Nx et Ny, on peut trouver un entier p, donc entre x et y on peut trouver un rationnel p/N. Donc pour tout réel x, on peut construire une suite x_n de rationnels qui tendent vers x (en choisissant par exemple x_n compris entre x et $x + \frac{1}{n}$, et si la fonction f est continue, lorsque x_n tendra vers x, $f(x_n)$ tendra vers $f(x)$, ce qui permet de calculer f pour tout x réel, connaissant $f(x_n)$ pour tout x_n rationnel. Notamment, dans le cas de l'équation de Cauchy, si une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ vérifie l'équation de Cauchy $f(x+y) = f(x)+f(y)$ pour tout x et y réels, alors pour tout x_n rationnel elle vérifie $f(x_n) = ax_n$, et lorsque x_n tend vers x, ax_n tend vers ax, elle vérifie donc également $f(x) = ax$ pour tout x réel. En affinant cette démonstration, on remarque qu'il suffit que f soit continue en un point pour conclure que $f(x) = ax$.

Dire qu'une fonction est croissante sur un intervalle, c'est dire que pour tous x et y de l'intervalle, $x \leq y$ entraîne $f(x) \leq f(y)$. La fonction est strictement croissante si $x < y$ entraîne $f(x) < f(y)$. Elle est décroissante si $x \leq y$ entraîne $f(x) \geq f(y)$, et strictement décroissante si $x < y$ entraîne $f(x) > f(y)$. Si f est une bijection d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans un autre intervalle de $\mathbb{R}$, le fait qu'elle soit monotone entraîne qu'elle est continue sur cet intervalle, et réciproquement. Donc une fonction f monotone sur un intervalle qui vérifierait, sur tout $\mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x)+f(y)$ serait obligatoirement du type $f(x) = ax$.

Une fonction bornée est une fonction majorée et minorée. Elle est majorée s'il existe un majorant M tel que toutes ses valeurs vérifient $f(x) < M$. Elle est minorée s'il existe un minorant m tel que toutes ses valeurs vérifient $f(x) > m$. Les réels M et m dépendent de la fonction, mais sont bien sûr indépendants de x. On peut prouver qu'une fonction qui serait majorée ou minorée sur un intervalle si petit soit-il et qui vérifierait l'équation de Cauchy serait du type $f(x) = ax$. En d'autres termes, il arrive qu'une hypothèse supplémentaire (fonction continue, monotone ou bornée) permette de prolonger à l'ensemble des nombres réels un résultat *a priori* valable seulement pour les nombres rationnels. Mais sans une telle hypothèse, les méthodes à utiliser pour résoudre une équation fonctionnelle sur l'ensemble des réels ne sont pas les mêmes que celles utilisables sur l'ensemble des rationnels et, encore moins, sur l'ensemble des entiers.

De quels outils dispose-t-on pour résoudre une équation fonctionnelle sur l'ensemble des réels ? On peut commencer par chercher des valeurs particulières. On peut chercher si la fonction est paire (*i.e.* $f(-x) = f(x)$ pour tout x) ou impaire (*i.e.* $f(-x) = -f(x)$ pour tout x), si elle est positive, ou d'autres propriétés qui nous aideront pour conclure. Mais celles-ci ne sont généralement pas suffisantes, et il n'y a pas de méthode systématique pour trouver l'argument décisif.

Intéressons-nous pour commencer à l'équation suivante :

Exercice 16. Déterminer toutes les fonctions f continues, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant pour tout x et y de réels :

$$(f(x) + f(y))f\left(\frac{x+y}{2}\right) = 2f(x)f(y).$$

Solution de l'exercice 16. Une telle fonction peut-elle s'annuler ? Oui, si par exemple elle est identiquement nulle. La fonction identiquement nulle est manifestement une solution triviale de l'équation. Mais supposons qu'il existe une fonction solution telle que $f(x) = 0$ et $f(y) \neq 0$. Le membre de droite étant nul, le membre de gauche l'est aussi, et comme $f(x) + f(y)$ n'est pas nul, $f((x + y)/2)$ doit être nul. Si maintenant l'on pose $x_1 = (x + y)/2$, pour la même raison $f((x_1 + y)/2)$ doit être nul, et ainsi de suite : on peut construire une suite de points, $x_{n+1} = (x_n + y)/2$, tels que, par récurrence, $f(x_n) = 0$ pour tout n. Mais ces points convergent vers y, où la fonction f est supposée continue, ce qui contredit le fait que $f(y)$ est supposé non nul. Donc si f n'est pas identiquement nul, f ne s'annule en aucun point, et on peut définir la fonction $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. Or en divisant les deux membres de l'équation par $2f(x)f(y)f((x+y)/2)$, on aboutit à :

$$\frac{g(x)+g(y)}{2} = g\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Cette équation, appelée équation de Jensen, ressemble fort à l'équation de Cauchy, si ce n'est qu'elle admet comme solution toutes les fonctions constantes. Plus précisément, si la fonction $g(x)$ est solution, pour toute constante b la fonction $g(x) - b$ est solution, et en particulier la fonction $h(x) = g(x) - g(0)$. Or lorsque $y = 0$, comme $h(0) = 0$, $\frac{h(x)}{2} = h(x/2)$, résultat vrai pour tout réel x et en particulier pour le réel $x + y$:

$$h\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{h(x+y)}{2}$$

si bien que l'équation s'écrit $h(x)+h(y) = h(x+y)$, équation de Cauchy qui entraîne $h(x) = ax$, puisque h est continue, donc $g(x) = ax+b$, avec $b = g(0)$ constante quelconque. Mais $g(x)$ étant l'inverse de $f(x)$, $g(x)$ ne s'annule jamais, ce qui n'est possible que si $a = 0$, donc si $g(x) = b$, donc si $f(x) = 1/b$ est elle aussi une fonction constante. En définitive, seules peuvent être solutions de cette équation les fonctions constantes (identiquement nulle ou autres), et on vérifie bien, dans l'autre sens, qu'elles sont effectivement solutions.

Parfois, il est utile de chercher si la fonction admet des points fixes. Un point fixe est une valeur de x vérifiant $f(x) = x$. Prenons l'exemple suivant :

Exercice 17. Quelles sont les fonctions de $\mathbb{R}^{+\star}$ dans $\mathbb{R}^{+\star}$ vérifiant, pour tous x et y dans $\mathbb{R}^{+\star}$:

$$f(xf(y)) = yf(x)$$

et vérifiant en outre : $f(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$?

Solution de l'exercice 17. Commençons par voir quelles propriétés une telle fonction doit obligatoirement vérifier. Notamment, peut-elle prendre deux fois la même valeur ? Si $f(y) = f(z)$, alors pour tout x, on a $f(xf(y)) = f(xf(z))$, ce qui signifie que $yf(x) = zf(x)$, et comme $f(x)$ est non nul (la fonction prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^{+\star}$ par hypothèse), $y = z$. Donc la fonction est injective. Notamment, si je pose $x = y = 1$, $f(f(1)) = f(1)$ entraîne $f(1) = 1$, car seul 1 peut avoir $f(1)$ comme image par f. Par ailleurs, lorsque $y = x$, il vient $f(xf(x)) = xf(x)$, ce qui signifie que $xf(x)$ est un point fixe de la fonction. Le réel 1 est lui aussi un point fixe de la fonction, mais peut-on en déduire que $xf(x) = 1$, ce qui suffirait à conclure que $f(x) = 1/x$? Il faudrait prouver que f n'admet pas de point fixe autre que 1. Et c'est là vraisemblablement que la seconde hypothèse ($f(x) \to 0$) intervient : dans un problème bien posé, toutes les hypothèses sont utiles. Si x et y sont des points fixes, $f(x) = x$ et $f(y) = y$ entraîne, dans l'équation fonctionnelle, $f(xy) = yx$, donc xy est lui aussi un point fixe. On en déduit que, si x est un point fixe, x^2 est un point fixe, puis $xx^2 = x^3$ également, et ainsi de suite, par récurrence, x^n est un point fixe. Si $x > 1$, cela fournit une infinité de points fixes qui tendent vers $+\infty$, ce qui contredit l'hypothèse que la fonction tend vers zéro lorsque x tend vers $+\infty$. Si $x < 1$, cela fournit une infinité de points fixes qui tendent vers 0, et il suffirait de prouver que l'inverse d'un point fixe est lui aussi un point fixe. Si x est un point fixe et $y = 1/x$, $f(xf(1/x)) = 1$, ce qui prouve que $xf(1/x) = 1$ puisque f est injective, donc que $f(1/x) = 1/x$. En définitive, la fonction ne peut pas admettre un point fixe différent de 1, et comme $xf(x)$ est un point fixe pour tout x, $f(x) = 1/x$ pour tout x.

J'avais prévu – mais je n'ai pas eu le temps de le faire – de traiter d'autres exemples d'équations fonctionnelles, où interviennent d'autres arguments :

Exercice 18. Déterminer toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tout x et tout y réels :

$$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2.$$

<u>*Solution de l'exercice 18*</u>. Là, ce n'est pas la continuité qui joue, mais le fait qu'un carré est toujours positif. Prouvons, par l'absurde, que $f(y) \geq y$ pour tout y. Si pour un y on avait $y > f(y)$, alors on pourrait trouver un x tel que $y = x^2 + f(y)$. Alors $y - f(y)$, strictement positif, serait le carré d'un entier. Il en résulterait que :

$$f(y) = f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2 \leq y$$

car $f(x)^2 \geq 0$ quel que soit x, ce qui contredirait l'hypothèse $f(y) < y$. Donc pour tout réel y, on a $f(y) \geq y$, en particulier pour le réel $x^2 + f(y)$:

$$f(x^2 + f(y)) \geq x^2 + f(y) \geq x^2 + y.$$

Mais $f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$. Pour tout x et tout y, $y + f(x)^2 \geq x^2 + y$, ce qui entraîne $f(x)^2 \geq x^2$ pour tout x réel. Si $f(x)$ est négatif, notamment, $f(x)^2 \geq x^2$ et $f(x) \geq x$ entraîne $f(x) = x$. Or la fonction f est surjective : tout réel u, en particulier tout réel négatif u, peut s'écrire $u = f(t)$, il suffit de choisir un x quelconque, de poser $y = u - f(x)^2$, $u = f(t)$ avec $t = x^2 + f(y)$. Donc tout réel u négatif vérifie : $u = f(u)$. Ceci vaut également pour $u = 0$: $f(0) = 0$. Donc en posant $y = 0$ dans l'équation initiale, $f(x^2) = f(x)^2$, ce qui signifie que si x est positif, $f(x)^2 = f(-x)^2$ et comme $-x < 0$, $f(-x) = -x$, donc $f(x) = x$ ou $-x$. Comme $f(x) \geq x$, il reste $f(x) = x$ pour tout x positif, et en définitive seule l'identité est solution de l'équation.

Exercice 19. Soient a et b deux réels strictement positifs. Prouver qu'il existe une fonction unique f telle que, pour tout réel x :

$$f(f(x)) + af(x) = b(a + b)x.$$

<u>*Solution de l'exercice 19*</u>. L'idée est, à partir de x, de construire une suite $x_1 = f(x)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_n = f(x_n - 1)$, qui vérifie pour tout entier n :

$$x_{n+2} + ax_{n+1} - b(b + a)x_n = 0.$$

L'étude de telles suites est classique : les deux racines u et v de l'équation $X^2 + aX - b(b + a)$ (en l'occurrence b et $-(a + b)$) sont telles que toute suite $x_n = \lambda u^n + \mu v^n$ vérifie la relation de récurrence. Et comme une suite est entièrement connue à partir de ses deux premiers termes, toute suite vérifiant la relation de récurrence s'écrit sous cette forme. Donc $x_n = \lambda b^n + \mu(-1)^n(b + a)^n$. Pour qu'une telle suite ne prenne que des valeurs positives, il faut que $\mu = 0$: dès lors $x = x_0 = \lambda$, $f(x) = x_1 = \lambda b$, d'où la fonction s'écrit, pour tout x, $f(x) = \lambda x$.

Exercice 20. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, vérifie $f(x) \leq 1$ pour tout x et, pour tout x :

$$f\left(x + \frac{5}{6}\right) + f(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) + f\left(x + \frac{1}{3}\right).$$

Montrer qu'une telle fonction est périodique[15].

[15] C'est-à-dire qu'il existe un réel positif p pour lequel, quel que soit x, $f(x + p) = f(x)$.

<u>*Solution de l'exercice 20*</u>. L'idée est de poser $g(x) = f(x+1/3) - f(x)$. On a $g(x+1/2) = g(x)$, et donc *a fortiori* $g(x+1) = g(x)$. Pour un x donné, les fonctions $g(x+k/3)$ ne peuvent prendre que trois valeurs distinctes, a, b et c, et l'on a $f(x+n) - f(x) = n(a+b+c)$. Le fait que $f(x) \leq 1$ pour tout x entraîne $a+b+c = 0$, soit $f(x+n) = f$ (en particulier $f(x+1) = f(x)$), ce qui signifie bien que f est périodique.

Et pour conclure en beauté :

Exercice 21. Trouver les méchantes fonctions f telles que, pour tous réels x et y :

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1.$$

<u>*Solution de l'exercice 21*</u>. Ce n'est pas la fonction qui est méchante, une fonction toute gentille $f(x) = k - \frac{x^2}{2}$ convient. Si l'on pose $c = f(0)$, $x = f(y)$, l'équation donne immédiatement (!) $f(x) = \frac{c+1-x^2}{2}$. Mais ceci, seulement si x est l'image par f d'un élément y. Toute la difficulté, c'est que la fonction f est nullement injective, et il faut prouver que cette même formule vaut lorsque x n'est pas l'image d'un réel y par f. Or en posant $y = 0$, on a $f(x-c) - f(x) = f(c) + cx - 1$, qui, lorsque x varie, prend toutes valeurs réelles, ce qui prouve que tout réel peut s'écrire $t = a - b$ avec $a = f(x-c)$ et $b = f(x)$ pour un x donné. Il en résulte que :

$$f(a) = \frac{c+1-a^2}{2} \quad ; \quad f(b) = \frac{c+1-b^2}{2}$$

et donc :

$$f(x) = f(a-b) = f(b) + ab + f(a) - 1 = c - \frac{(a-b)^2}{2} = c - \frac{x^2}{2}.$$

La seule fonction solution est $f(x) = c - \frac{x^2}{2}$, avec en outre $c = 1$ car lorsque $x = f(y)$, on a également $f(x) = \frac{1+c}{2} - \frac{x^2}{2}$, donc $c = \frac{1+c}{2}$.

Activité II

La pratique

L'après-midi, forts de l'enseignement du matin, les élèves étaient confrontés à des interrogations orales. Ils avaient une heure pour résoudre un exercice sous l'œil sévère et attentif d'un animateur. Voici les exercices proposés dans chacun des thèmes, ainsi que leurs solutions regroupées à la fin.

1 Géométrie

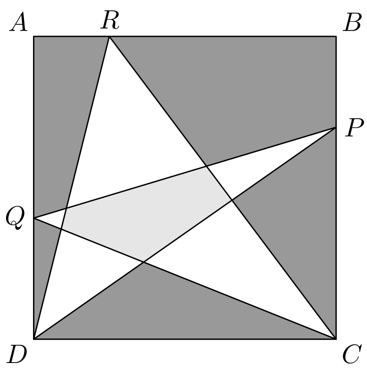
Exercice 1 (posé à Samuel Bach). Montrer que les médianes d'un triangle le partagent en six petits triangles de même aire.

Exercice 2 (posé à Guillaume Barraquand). Soient A, B, C et D quatre points cocycliques. On suppose que les droites (AB) et (CD) se coupent en E. Montrer que :

$$\frac{AC}{BC} \cdot \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{BE}.$$

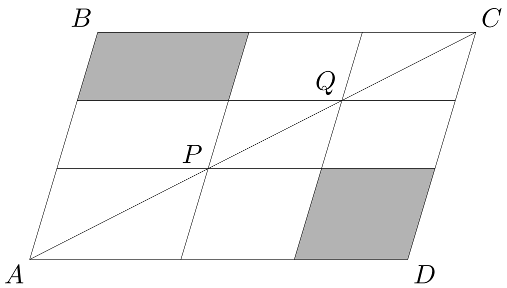
Exercice 3 (posé à Agathe Benoît). On appelle H_A, H_B et H_C les trois pieds des hauteurs d'un triangle ABC. On appelle O l'orthocentre de ce triangle, P celui de AH_BH_C et Q celui de CH_AH_B. Montrer que $PQ = H_CH_A$.

Exercice 4 (posé à Agathe Benoît). Les trois points P, Q et R sont choisis quelconques sur trois côtés d'un carré.



Montrer que l'écart entre l'aire gris foncé et l'aire gris clair est constant (indépendant de P, Q et R).

Exercice 5 (posé à Agathe Benoît). Soit $ABCD$ un parallélogramme et deux points P et Q quelconques sur la diagonale $[AC]$.



Montrer que les deux parallélogramme grisés ont même aire.

Exercice 6 (posé à Thomas Chartier). Soit ABC un triangle. On construit extérieurement à ABC les triangles PBC, QCA et RAB tels que $\widehat{PBC} = \widehat{PCB} = 15^\circ$, $\widehat{QCA} = \widehat{RBA} = 45^\circ$ et $\widehat{QAC} = \widehat{RAB} = 30^\circ$. Montrer que $PQ = PR$ et que (PQ) est perpendiculaire à (PR).

Exercice 7 (posé à Thomas Chartier). Dans le plan, on considère une droite Δ et deux points A et B. Déterminer le point M de Δ tel que la somme des distances $MA + MB$ soit minimale.

Exercice 8 (posé à Samuel Collin). Sur une table sont disposées 54 pièces et on sait que 23 d'entre elles exactement sont sur pile. Est-il possible de retourner certaines de pièces puis de les séparer en deux tas de telle sorte qu'il y ait autant de pièces sur pile dans chaque tas ?

Exercice 9 (posé à Samuel Collin, Robin Ngi). Étant donné un segment de longueur 1 et un segment de longueur x, proposer une construction à la règle et au compas d'un segment de longueur $\sqrt{x}$.

Exercice 10 (posé à Samuel Collin, Robin Ngi). Soient un segment $[AB]$, X un point de $[AB]$ et P un point du cercle de diamètre $[AB]$. Montrer que la fraction :

$$\frac{\tan \widehat{APX}}{\tan \widehat{PAX}}$$

ne dépend pas de la position de P.

Exercice 11 (posé à Bao Anh Dang Vu). Soit P un point de la diagonale $[BD]$ d'un rectangle $ABCD$. On note F le projeté de P sur $[BC]$. Soit H sur le segment $[BC]$ tel que $BF = FH$. On appelle Q le point d'intersection de (PC) et (AH). Montrer que les triangles APQ et CHQ ont même aire.

Exercice 12 (posé à Sarah Diot-Girard). Montrer que toute droite qui coupe un triangle en deux polygones de même aire et de même périmètre passe par le centre du cercle circonscrit.

Exercice 13 (posé à Arnaud Dumas). Un point P à l'intérieur d'un triangle ABC vérifie les conditions $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 3\widehat{PBA} = 3\widehat{PCA}$. Montrer que :

$$\frac{AC}{AB + PC} = \frac{AB}{AC + PB}.$$

Exercice 14 (posé à Mathieu Finas). On note O (resp. I) le centre du cercle circonscrit (resp. inscrit) à ABC et R (resp. r) son rayon. Montrer que $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

Exercice 15 (posé à Mathieu Finas, Jill-Jênn Vie). Soit Γ un cercle et soit M un point du plan. Une droite D passant par M coupe Γ en L et N. Montrer que le produit $\overline{ML} \cdot \overline{MN}$ ne dépend pas de D.

Exercice 16 (posé à David Fourquet). Soit ABC un triangle rectangle en B. Soit D un point de $[AC]$ tel que $CD = AB$. Montrer que dans le triangle ABD, la médiane issue de B, la bissectrice de l'angle $\hat{A}$ et la hauteur issue de D sont concourantes.

Exercice 17 (posé à David Fourquet). Soit $ABCD$ un trapèze avec (AB) parallèle à (CD). On note L l'intersection des diagonales. Déterminer l'aire du trapèze en fonction des aires des triangles ALB et CLD.

Exercice 18 (posé à Benoît Seguin). Soit ABC un triangle rectangle en C. Sur la droite (AC) on place un point D tel que $CD = BC$, C étant situé entre A et D. La perpendiculaire à (AB) passant par D reccoupe (BC) en E. Montrer que $AC = CE$.

Exercice 19 (posé à Benoît Seguin). Le triangle ABC est rectangle en A. On note D le pied de la hauteur issue de A. La droite joignant les centres des cercles inscrits dans les triangles ABD et ACD coupe respectivement (AB) et (AC) en K et L. Montrer que $AK = AD = AL$. En déduire que l'aire du triangle ABC est supérieure ou égale au double de l'aire de AKL.

Exercice 20 (posé à Duco van Amstel). Soient A et B deux points du plan et $k > 0$. Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA = kMB$.

Exercice 21 (posé à Jill-Jênn Vie). Soit $ABCDEF$ un hexagone convexe tel que $AB = BC$, $CD = DE$ et $EF = FA$. Montrer que les perpendiculaires aux droites (FB), (BD) et (DF) passant respectivement par les points A, C et E sont concourantes.

Exercice 22 (posé à Mathieu Voland). Démontrer que les hauteurs d'un triangle sont les bissectrices du triangle orthique.

Exercice 23 (posé à Coline Wiatrowski). Soit ABC un triangle. On note Y le point d'intersection de la médiatrice de $[AC]$ avec le côté $[BC]$. Soit Z le point du segment $[AY]$ tel que $AB = CZ$. Les droites (CZ) et (AB) se coupent en X. Montrer que les point X, Y, Z et B sont cocycliques.

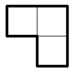
2 Stratégies

Exercice 24 (posé à Samuel Bach). Un damier 4×4 contient des $(+)$ dans toutes les cases sauf celle de la première ligne, troisième colonne, qui contient un $(-)$. À chaque étape, on choisit une ligne, une colonne ou une diagonale au hasard (pas nécessairement une grande diagonale), et on change tous les signes qui s'y trouvent. Peut-on aboutir à une configuration ne contenant que des signes $(+)$?

Exercice 25 (posé à Guillaume Barraquand). Cinquante-et-un points sont placés à l'intérieur d'un carré de côté 1. Montrer que l'on peut trouver trois points à l'intérieur d'un disque de rayon $\frac{1}{7}$.

Exercice 26 (posé à Guillaume Barraquand, Mathieu Finas). Un groupe de rock dispose de onze semaines de répétition. Ils répètent au moins une fois par jour et pas plus de douze fois par période de sept jours. Montrez qu'il existe une période de jours consécutifs pendant laquelle le groupe a répété vingt-et-une fois.

Exercice 27 (posé à Agathe Benoît). Paver une quadrillage $2^n \times 2^n$ privé d'un petit carré par des pièces de la forme :



Exercice 28 (posé à Agathe Benoît). On met 2000 balles blanches dans une boîte. Une étape consiste à remplacer, au choix :
- deux balles blanches par une verte ;
- deux balles rouges par une verte ;
- deux balles vertes par une bleue et une rouge ;
- une balle bleue et une balle verte par une rouge ;
- une balle verte et une balle rouge par une bleue.

a) Est-il possible après une suite d'étapes précédentes qu'il ne reste que trois balles dont une et une seule est verte ?

b) Est-il possible après une suite d'étapes précédentes qu'il ne reste qu'une seule balle ?

Exercice 29 (posé à Thomas Chartier). On considère une figure symétrique par rapport à un point O. Deux joueurs posent à tour de rôle un petit carré sur la figure. Lorsque l'un des deux joueurs ne peut plus jouer, il a perdu. Déterminer quel joueur possède une stratégie gagnante.

Exercice 30 (posé à Thomas Chartier, Arnaud Dumas). On colorie le plan avec trois couleurs. Montrer qu'il existe deux points à distance 1 de la même couleur.

Exercice 31 (posé à Samuel Collin). Les entiers $1, 2, \ldots, 2005$ sont écrits sur un tableau. À chaque étape, on choisit au hasard deux nombres a et b du tableau, on les efface et les remplace par $a + b - 1$. Quel sera le dernier nombre restant sur le tableau ?

Exercice 32 (posé à Samuel Collin). Chaque sommet d'un cube contient un entier (au départ 1 pour deux sommets d'une diagonale de face et 0 pour les six autres sommets). À chaque étape, on choisit une arête quelconque et on ajoute 1 aux entiers de ses deux extrémités. Peut-on, en répétant ce processus, aboutir à un cube dont tous les sommets contiennent le même nombre ?

Exercice 33 (posé à Bao Anh Dang Vu, David Fourquet). Est-il possible de relier n fermes à n puits de façon à ce que les routes (qui sont des segments) ne se croisent pas ?

Exercice 34 (posé à Bao Anh Dang Vu, David Fourquet). Montrer que :

$$\frac{1}{15} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{99}{100} < \frac{1}{10}.$$

Exercice 35 (posé à Sarah Diot-Girard). On se donne une famille (E_i) $(i \geq 1)$ de sous-ensemble ensembles non vides de $\mathbb{N}$ tels que tous les entiers de E_i aient exactement i chiffres. On suppose que pour tout i et pour tout $x \in E_i$, le nombre formé des $i-1$ premiers chiffres de x est élément de E_{i-1}.

Montrer qu'il existe un « nombre avec une infinité de chiffres » dont la troncature aux i premiers chiffres est dans E_i pour tout i.

Exercice 36 (posé à Arnaud Dumas). Montrer que dans tout polyèdre, il existe au moins deux faces ayant le même nombre d'arètes.

Exercice 37 (posé à Arnaud Dumas). On colorie le plan de deux couleurs. Montrer que pour tout d, il existe deux points de même couleur distant de d.

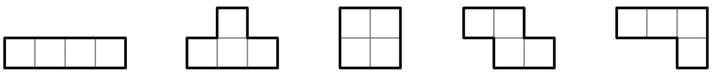
Exercice 38 (posé à David Fourquet). Donner la valeur de :

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}.$$

Exercice 39 (posé à Robin Ngi). Montrer que toute somme d'argent au moins égale à 8 centimes peut être payée avec des pièces de 5 centimes et des pièces de 3 centimes.

Exercice 40 (posé à Robin Ngi). Combien peut-on placer de cavaliers sur un échiquier mutuellement imprenables ?

Exercice 41 (posé à Benoît Seguin). Montrer que l'on ne peut pas paver un rectangle 4×5 avec les cinq pièces suivantes (utilisées une fois chacune) :



Exercice 42 (posé à Duco van Amstel). Montrer que parmi $2n+1$ entiers distincts compris entre $-2n+1$ et $2n-1$, on peut en trouver trois dont la somme est nulle.

Exercice 43 (posé à Jill-Jênn Vie). Certains arcs d'un cercle sont coloriés en bleu, la somme de leurs mesures étant strictement inférieure à 180°. Montrer qu'on peut trouver un diamètre dont les extrémités sont toutes deux non coloriées.

Exercice 44 (posé à Jill-Jênn Vie). Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier n tel que $|\sin n| < \varepsilon$.

Exercice 45 (posé à Mathieu Voland). On se donne $k_1, \ldots, k_{10}$ dix entiers naturels. Montrer qu'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_{10}$ des éléments non tous nuls de $\{-1, 0, 1\}$ tels que la somme :

$$\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \cdots + \alpha_{10} k_{10}$$

soit multiple de 1001.

Exercice 46 (posé à Mathieu Voland). Existe-t-il un polynôme P à coefficients entiers (relatifs) tels que $P(7) = 9$ et $P(12) = 15$?

Exercice 47 (posé à Coline Wiatrowski). Soit α un réel. Montrer qu'il existe une infinité de couples d'entiers (p, q), $q \neq 0$, tels que :

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}.$$

3 Fonctions

Exercice 48 (posé à Samuel Bach). Montrer qu'il n'existe pas de bijection $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$f(x^2) - f(x)^2 \geq \frac{1}{4}$$

pour tout réel x.

Exercice 49 (posé à Guillaume Barraquand). On se donne des réels x et y positifs ou nuls vérifiant $x^3 + y^3 > 2$. Montrer que :

$$x^2 + y^3 < x^3 + y^4.$$

Exercice 50 (posé à Guillaume Barraquand). Montrer que toute fonction s'écrit comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 51 (posé à Guillaume Barraquand, Benoît Seguin). Determiner toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y$$

pour tous réels x et y.

Exercice 52 (posé à Agathe Benoît). Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Q}^{+\star} \to \mathbb{Q}^{+\star}$ vérifiant :

$$f(x+1) = f(x) + 1 \qquad \text{et} \qquad f(x^2) = f(x)^2$$

pour tout x.

Exercice 53 (posé à Thomas Chartier). Soient a, b et c des réels positifs ou nuls. Montrer que :

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a.$$

Exercice 54 (posé à Thomas Chartier). Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}\backslash\{0, 1\} \to \mathbb{R}$ vérifiant la condition :

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x.$$

Exercice 55 (posé à Samuel Collin). Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$ telles que $f(1) = 1$ et $f(m+n) = f(m) + f(n) + nm$.

Exercice 56 (posé à Sarah Diot-Girard, Jill-Jênn Vie). Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$xf(y) + yf(x) = (x^2 + y^2)f(xy)$$

pour tous réels x et y.

Exercice 57 (posé à Arnaud Dumas). Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $f(x) = f(x/2)$ pour tout réel x. Que se passe-t-il si on ajouter l'hypothèse « f continue » ?

Exercice 58 (posé à Arnaud Dumas). On considère $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. Montrer que :

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n}{x_1} \geq n.$$

Exercice 59 (posé à Mathieu Finas). Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

pour tous réels x et y.

Exercice 60 (posé à David Fourquet). Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que $f(0) = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on ait $f(f(n)) = n$, $f(f(n+2)+2) = n$.

Exercice 61 (posé à Robin Ngi). Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\frac{1}{x} f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x$$

pour tout réel x.

Exercice 62 (posé à Benoît Seguin). Soit (a_n) une suite vérifiant $0 \leq a_n \leq c$ et :

$$|a_i - a_j| \geq \frac{1}{i-j}$$

pour tous $i \neq j$. Montrer que $c \geq 1$.

Exercice 63 (posé à Duco van Amstel). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :

$$f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{2} \cdot f(x)$$

pour tout réel x. Montrer que f est périodique.

Exercice 64 (posé à Mathieu Voland). Déterminer les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que :

$$f(x+y) + f(x-y) = f(3x)$$

pour tous entiers $x \geq y$.

Exercice 65 (posé à Bao-Anh Dang Vu). Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$ vérifiant :

$$f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) = 3n$$

pour tout entier n.

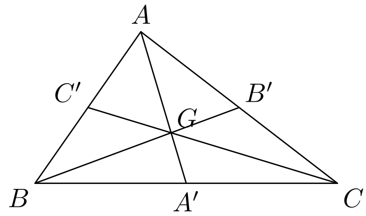
Exercice 66 (posé à Coline Wiatrowski). Prouver qu'il n'existe pas de fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ vérifiant :

$$f(x + f(y)) = f(x) - y$$

pour tous entiers x et y.

4 Les solutions

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>. On trace une figure et on en profite pour fixer les noms des points :

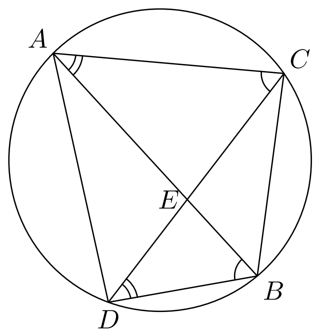


La constatation essentielle est qu'une médiane d'un triangle le partage en deux triangles d'aire égale : en effet, les deux triangles dont il est question ont même hauteur et les bases relatives à ces hauteurs ont même longueur.

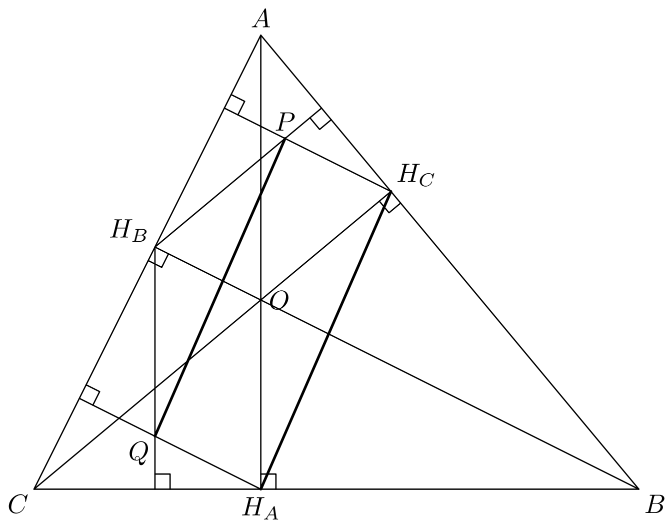
Dans la situation de l'exercice, la propriété précédente implique que les triangles $AA'B$ et $AA'C$ ont même aire. Il en est donc de même des triangles AGC' et $GA'C$. De même, on prouve que les triangles $GC'B$ et $GB'A$ d'une part et $GB'C$ et $GC'B$ d'autre part ont même aire. La conclusion résulte d'une nouvelle application de la constatation essentielle au triangle GBC et GAB avec les médianes (GA') et (GC').

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>.

Il faut en fait calculer $\frac{AC}{BD}\cdot\frac{AD}{BC}$, en remarquant d'abord que les triangles EAC et EDB sont semblables. En effet, les quatre points A, B, C et D étant cocycliques, quelle que soit leur position, les angles de droites (AB, AC) et (DB, DC) sont égaux. Donc $(EA, AC) = (DB, ED)$, et comme $(CE, EA) = (ED, EB)$, on a également $(AC, CE) = (EB, DB)$. Les triangles EAC et EDB, qui ont les mêmes angles, sont semblables, d'où $\frac{AC}{BD} = \frac{EA}{ED}$. Par le même raisonnement, les triangles EAD et ECB sont semblables, donc $\frac{AD}{BC} = \frac{ED}{EB}$. En faisant le produit, ED se simplifie, il reste la relation cherchée.

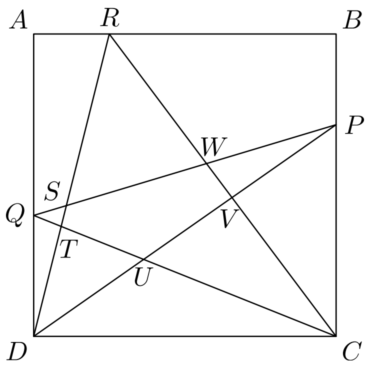


<u>*Solution de l'exercice 3*</u>.



Les droites (PH_C) et (BH_B) sont toutes les deux perpendiculaires à (AC) et donc parallèles. De même (PH_B) est parallèle à (CH_C). On en déduit que PH_COH_B est un parallélogramme et donc l'égalité de vecteurs $\overrightarrow{PH_C} = \overrightarrow{H_BO}$. De même, on montre que $\overrightarrow{QH_A} = \overrightarrow{H_BO}$ d'où il resulte $\overrightarrow{PH_C} = \overrightarrow{QH_A}$. Ainsi PH_CH_AQ est un parallélogramme d'où la conclusion.

Solution de l'exercice 4. Nommons les points d'intersection qui définissent le pentagone central :



Les triangles PCQ et PCD ont même aire puisqu'ils ont même base et même hauteur. On en déduit en simplifiant les aires redondantes :

$$\mathcal{A}(QST) + \mathcal{A}(PVW) = \mathcal{A}(DUC) - \mathcal{A}(STUVW).$$

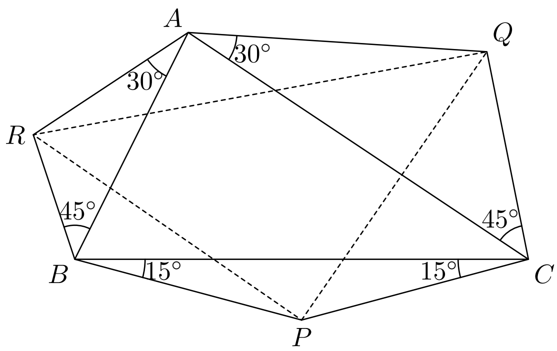
D'autre part l'aire du triangle DRC est la moitié de celle du carré, et donc il est en de même de son complémentaire, c'est-à-dire :

$$\mathcal{A}(ARSQ) + \mathcal{A}(QTD) + \mathcal{A}(RWPB) + \mathcal{A}(PVC) + \mathcal{A}(QST) + \mathcal{A}(PVW) = \frac{S}{2}$$

où S désigne l'aire du carré. En remplaçant $\mathcal{A}(QST) + \mathcal{A}(PVW)$ par $\mathcal{A}(DUC) - \mathcal{A}(STUVW)$ dans la formule précédente, on voit que la différence de l'aire gris foncé et de l'aire gris clair vaut $\frac{S}{2}$ qui est donc bien indépendante des positions de P, Q et R.

Solution de l'exercice 5. On remarque qu'une diagonale sépare un parallélogramme en deux triangles de même aire. En appliquant cette propriété aux parallélogrammes (tracés) de diagonales $[AQ]$, $[PC]$, $[PQ]$ et $[AC]$, on obtient rapidement le résultat.

Solution de l'exercice 6.



On voudrait montrer que R est l'image de Q par un quart de tour (direct, dans l'orientation de la figure) de centre P. Pour cela, on considère la similitude s_1 de centre C qui envoie Q sur A et la similitude s_2 de centre B qui envoie A sur R. Elle sont toutes les deux d'angle $+45°$, donc la composée $r = s_2 \circ s_1$ est une similitude d'angle $+90°$ qui envoie Q sur R. De plus, sont rapport vaut :

$$\frac{CA}{CQ} \cdot \frac{BR}{BA} = 1$$

puisque les triangles ABR et ACQ sont (inversement) semblables. Donc r est un quart de tour direct. Il reste à voir que P est le centre de la rotation r. Pour cela, on détermine $P_1 = s_1(P)$. En calculant les angles, on constate que BCP_1 est un triangle équilatéral (car les angles de CPP_1 sont les mêmes que ceux de CQA), et que $s_2(P_1) = P$.

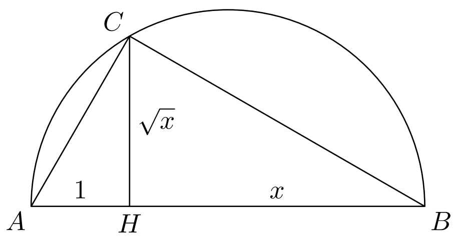
Solution de l'exercice 7. Si le segment $[AB]$ rencontre la droite Δ en N, $AN + NB = AB$ et pour tout autre point M de Δ, $AM + MB \geq AB$ d'après l'inégalité triangulaire. Dans ce cas, N est le point cherché : en particulier, si A et B sont tous deux sur Δ, tous les points de $[AB]$ sont solutions.

Si $[AB]$ ne recontre pas Δ, notons A' le symétrique de A par rapport à Δ. Pour tout point $M \in \Delta$, $MA' = MA$ donc $MA + MB = MA' + MB \geq A'B$. Or le segment $[A'B]$ rencontre Δ en N pour lequel $NA' + NB = A'B$: ce point N est l'unique solution.

Solution de l'exercice 8. Oui. Pour cela, on choisit 23 des pièces, on les retourne et on les regroupe dans un tas, les autres pièces formant l'autre tas. Montrons que cette façon de procéder convient. Notons x le nombre de pièces qui sont sur pile à l'origine parmi les 23 sélectionnées. Dans le reste, il y a alors $23 - x$ pièces sur pile. Mais comme on retourne les pièces du premier tas, il restera au final $23 - x$ pièces sur pile dans ce premier tas.

Solution de l'exercice 9.

La construction est la suivante : on place sur une droite trois points A, H et B dans cet ordre avec $AH = 1$ et $HB = x$. On trace ensuite le cercle de diamètre $[AB]$ et la perpendiculaire à (AB) passant par H. Leur intersection donne un point C vérifiant $HC = \sqrt{x}$.



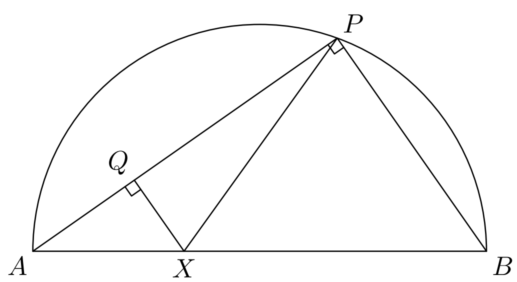
En effet, on a d'une part :

$$\tan \hat{A} = \frac{HC}{AH} = HC \quad \text{et} \quad \tan \hat{B} = \frac{HC}{BH} = \frac{HC}{x}.$$

Mais par ailleurs $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont complémentaires puisque l'angle en C est droit. On en déduit $\tan \hat{A} \cdot \tan \hat{B} = 1$ et puis $HC^2 = x$. Finalement, on a bien $HC = \sqrt{x}$.

Solution de l'exercice 10.

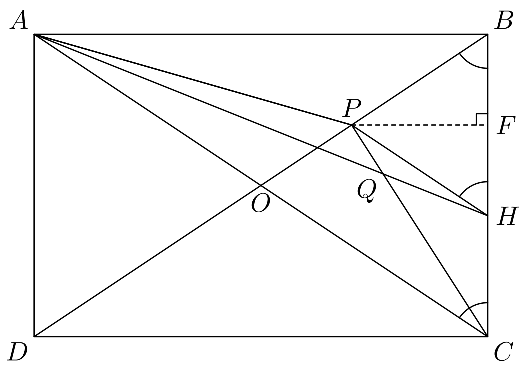
Soit Q le projeté de X sur la droite (AP). On a d'une part $\tan \widehat{APX} = \frac{QX}{QP}$. D'autre part, puisque APB est rectangle en P, il vient $\tan \widehat{PAX} = \tan \widehat{PAB} = \frac{PB}{PA}$. Finalement :



$$\frac{\tan \widehat{APX}}{\tan \widehat{PAX}} = \frac{QX}{QP} \cdot \frac{PA}{PB} = \frac{QX}{PB} \cdot \frac{PA}{QP} = \frac{AX}{AB} \cdot \frac{AB}{BX} = \frac{AX}{BX}$$

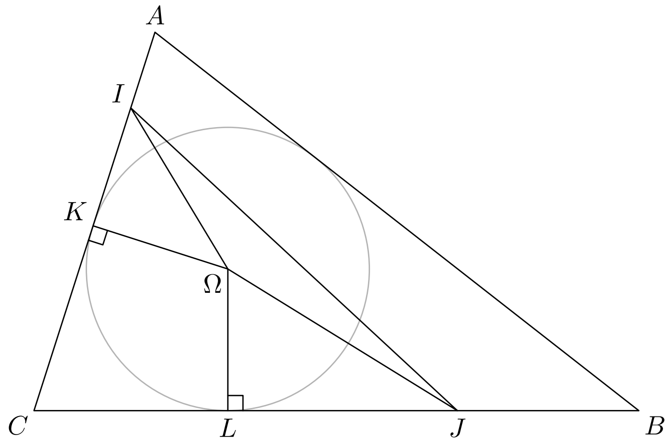
l'avant dernière égalité résultant du théorème de Thalès avec les parallèles (QX) et (PB). Pour conclure, on constate directement sur la dernière écriture l'indépendance en P.

Solution de l'exercice 11. On commence par faire une figure :



La droite (PF) est une hauteur et une médiane du triangle PHB, celui-ci est donc isocèle. On en déduit $\widehat{PBH} = \widehat{PHB}$. Par ailleurs, le triangle OBC est également isocèle, ce qui donne l'égalité d'angle $\widehat{OBC} = \widehat{OCB}$. Il en résulte $\widehat{PHB} = \widehat{OCB}$ et donc les droites (PH) et (AC) sont parallèles. Les triangles PHA et PHC ont alors la même aire[1], il en est ainsi de même des triangles PQA et HQC.

Solution de l'exercice 12. On note a, b et c les longueurs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ et p le demi-périmetre du triangle ABC. On pose $x = CI$ et $y = CJ$.



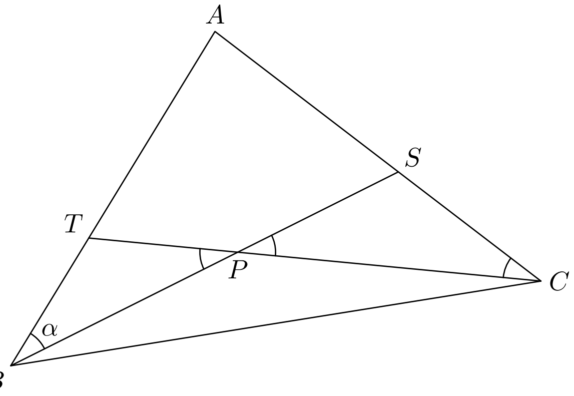
L'égalité des périmètres nous donne $p = x + y$. Soit Ω le centre du cercle inscrit et r son rayon. L'aire du triangle ABC est $pr = r(x + y)$ et celle de CIJ est :

$$\begin{aligned} A &= \mathcal{A}(KI\Omega) + \mathcal{A}(K\Omega C) + \mathcal{A}(CL\Omega) + \mathcal{A}(L\Omega J) + \mathcal{A}(I\Omega J) \\ &= \frac{r(x - KI)}{2} + \frac{r \cdot KI}{2} + \frac{r(y - JL)}{2} + \frac{r \cdot JL}{2} + \mathcal{A}(I\Omega J) \\ &= \frac{r(x + y)}{2} + \mathcal{A}(I\Omega J). \end{aligned}$$

Comme cette dernière aire doit être la moitié de celle du triangle ABC, le triangle $I\Omega J$ doit avoir une aire nulle. Autrement dit, les point I, Ω et J doivent être alignés comme demandé.

Solution de l'exercice 13. Notons α l'angle représenté sur la figure suivante :

[1] En effet, si on calcule celles-ci en prenant pour base PH, les deux triangles ont la même base et des hauteurs égales d'après le parallélisme.

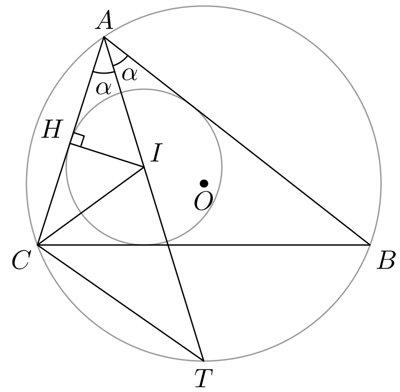


Les conditions de l'énoncé donnent $3\alpha = \pi - \hat{A}$, ou encore $\hat{A} = \pi - 3\alpha$. La somme des angles du triangle ATC vaut π, on en déduit $\widehat{ATC} = 2\alpha$. De même $\widehat{ASB} = 2\alpha$ et en regardant les angles du quadrilatère $ATPS$, il vient $\widehat{SPT} = \pi - \alpha$. De cela, on déduit $\widehat{TPB} = \widehat{SPC} = \alpha$ puis que les triangles TPB et SPC sont isocèles.

La somme $AB + PC$ vaut donc $AT + TC$. De même $AC + PB = AS + SB$. L'égalité de l'énoncé résulte à ce niveau du fait que les triangles ASB et ATC sont semblables (puisqu'ils ont mêmes angles).

Solution de l'exercice 14.

On note ABC le triangle, α la valeur du demi-angle en A. On désigne par H le projeté de I sur (AC) de sorte que $IH = r$ et par T le deuxième point d'intersection de la bissectrice issue de A avec le cercle circonscrit à ABC. On utilise la puissance d'un point par rapport à un cercle (voir exercice suivant). On a alors :

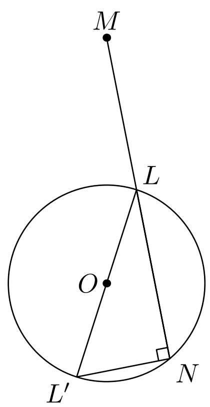


$$IA \cdot IT = R^2 - OI^2.$$

Mais la trigonométrie dans le triangle AHI, fournit $IA = IH/\sin\alpha = r/\sin\alpha$. Par ailleurs, d'après le cours, le triangle ITC est isocèle en T et donc $TI = TC = 2R\sin\alpha$. On en déduit $IA \cdot IT = 2Rr$ et donc la formule de l'énoncé.

Solution de l'exercice 15.

On note O le centre de Γ et R son rayon. On a :



$$\overline{ML} \cdot \overline{MN} = \overrightarrow{ML} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ML} \cdot \overrightarrow{ML'}$$

où L' est le point diamétralement opposé à L. Il s'ensuit :

$$\overline{ML} \cdot \overline{MN} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OL})(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OL}) = MO^2 - R^2$$

et on voit sur cette dernière écriture l'indépendance en D.

Solution de l'exercice 16. On définit le point E de la droite (AB) tel que (ED) parallèle à (AK).

Les angles marqués sur la figure sont alors tous égaux, ce qui prouve que le triangle ADE est isocèle en A. On en déduit :

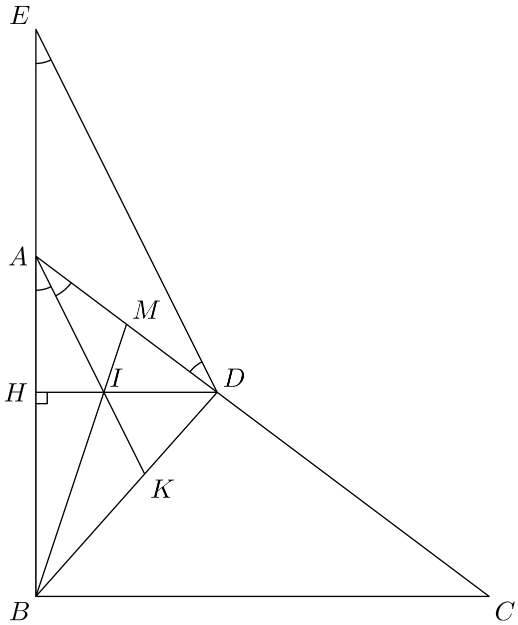
$$\frac{KB}{KD} = \frac{BA}{AE} = \frac{BA}{AD}$$

la première de ces égalités résultant du théorème de Thalès. À nouveau le théorème de Thalès dans le triangle ABC avec la parallèle (HD) nous donne :

$$\frac{HA}{HB} = \frac{AD}{DC} = \frac{AD}{AB}.$$

Des deux relations précédentes, on déduit :

$$\frac{HA}{HB} \cdot \frac{KB}{KD} \cdot \frac{MA}{MD} = 1$$

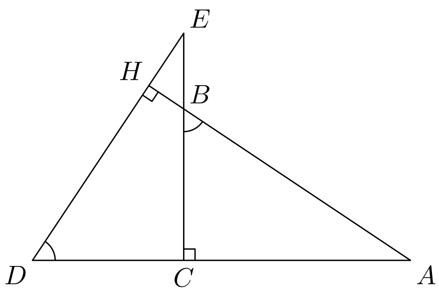


ce qui donne la conclusion par le théorème de Céva.

Solution de l'exercice 17. Notons a l'aire de ALB, b celle de CLD, c celle de ALD et d celle de BLC. Il s'agit de déterminer $a+b+c+d$ en fonction de a et de b.

Tout d'abord on remarque que les triangles ABD et ACB ont même aire puisqu'ils ont une base en commun (AB) et même hauteur correspondante. Ainsi $a+c=a+d$, soit $c=d$. En calculant les aires en utilisant les bases $[CL]$ et $[BL]$, on obtient $c/a = DL/BL$. Et de même, on a $b/d = DL/BL$. Il s'ensuit $c/a = b/d = b/c$ et donc $c^2 = ab$. Finalement $c = \sqrt{ab}$ et l'aire du trapèze s'obtient par la formule $a+b+2\sqrt{ab} = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$.

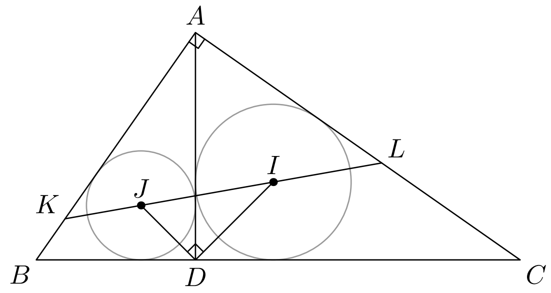
Solution de l'exercice 18.



Première solution. On a $\widehat{CBA} = \widehat{CDE}$, puisque (CB) est perpendiculaire à (CD) et (BA) à (DE). Il en résulte que les triangles CBA et CDE ont leurs angles égaux, ils sont semblables, et même égaux car $CB = CD$ par hypothèse. Cela entraîne $CA = CE$.

Deuxième solution. Les droites (EC) et (AB) sont deux hauteurs du triangle EDA. Leur intersection B est donc l'orthocentre du triangle, ce qui entraîne que (DB) est la troisième hauteur. Comme CDB est isocèle rectangle, (DB) fait un angle de $\pi/4$ avec (CB), et donc (AE), perpendiculaire à (DB), fait un angle de $\pi/4$ avec (AC), perpendiculaire à (CB). Finalement ACE est un triangle rectangle isocèle, ce qui implique $AC = CE$.

Solution de l'exercice 19. Appelons I et J les centres des cercles inscrits dans ADB et ADC :



Les triangles ADB et ADC sont semblables, il existe donc une similitude (de centre D et d'angle $\pi/2$) qui transforme ADB en CDA, et donc I en J. Il en résulte non seulement que (DI) et (DJ) sont perpendiculaires (ce qu'on sait déjà, puisque I et J sont sur les bissectrices des angles droits $\widehat{ADB}$ et $\widehat{CDA}$), mais aussi que $\frac{DJ}{DI} = \frac{DB}{DA}$ (puisque cette même similitude transforme B en A). Donc le triangle DIJ est lui aussi semblable au triangle DAB. Il existe donc une autre similitude qui transforme DIJ en DAB, et celle-ci est d'angle $\pi/4$. Cela prouve que $(IJ, AB) = (KL, AB) = \pi/4$. Le triangle rectangle AKL a pour angles à la base $\pi/4$, il est donc isocèle et $AK = AL$. Par ailleurs, les triangles AKI et ADI sont égaux : les angles en A sont égaux puisque (AI) est bissectrice de $\widehat{KAD}$, les angles $\widehat{AKI}$ et $\widehat{ADI}$ valent tous deux $\pi/4$, et en outre ils ont un côté commun AI. Il en résulte que $AD = AK$.

Quant à l'aire de AKL, en prenant AK comme hauteur et AL comme base, elle vaut $AK \cdot AL/2 = AD^2/2$. L'aire de ABC vaut $AD \cdot BC/2$. Il suffit donc de montrer que $AD \leq BC/2$. Or le milieu M de $[BC]$ est le centre du cercle circonscrit à ABC, ce qui donne $BC/2 = MB = MC = MA \geq MD$ puisque $[MA]$ est l'hypoténuse du triangle rectangle MAD.

Solution de l'exercice 20. La condition $MA = kMB$ est équivalente après élévation au carré et factorisation à :

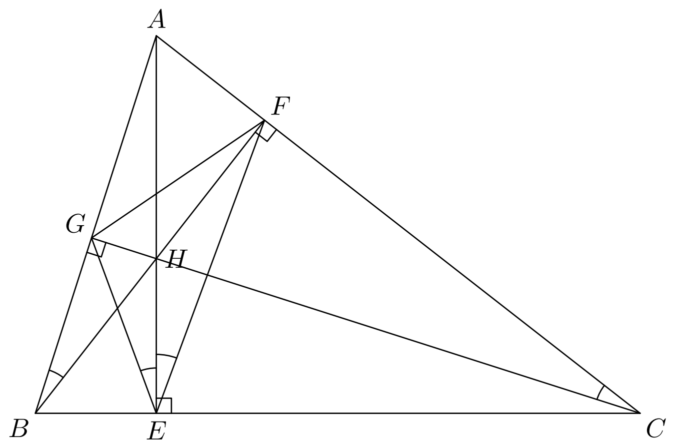
$$(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) = 0.$$

On traite d'abord le cas $k \neq 1$. On considère G_1 le barycentre de $((A,1),(B,k))$ et G_2 celui de $((A,1),(B,-k))$. La condition précédente est alors équivalente à $\overrightarrow{MG_1}\overrightarrow{MG_2} = 0$ et donc l'ensemble des points cherchés est le cercle de diamètre $[G_1G_2]$.

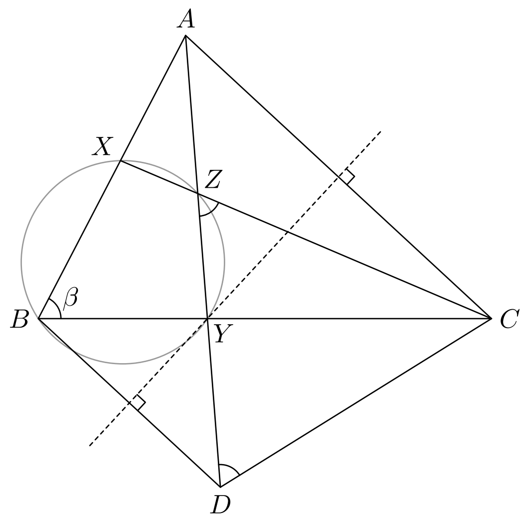
Si $k = 1$, on a simplement à « résoudre » $MA = MB$, et l'ensemble des points M solutions est par définition la médiatrice du segment $[AB]$.

Solution de l'exercice 21. Soit Γ_B le cercle de centre B et de rayon AB. On définit de même les cercles Γ_D et Γ_F. La perpendiculaire à (FB) passant par A est l'ensemble des points qui ont même puissance par rapport à Γ_B et Γ_F. L'intersection de la perpendiculaire à (FB) passant par A et de la perpendiculaire à (BD) passant par C est donc un point qui a même puissance par rapport aux trois cercles. Il appartient par le fait à la perpendiculaire à (DF) passant par E.

Solution de l'exercice 22. Comme BGC et BFC sont rectangles respectivement en G et F, les points B, G, C et F sont cocycliques, d'où $\widehat{GBF} = \widehat{GCF}$. De même, on montre que $\widehat{GBF} = \widehat{GEA}$ et $\widehat{AEF} = \widehat{GCF}$, et donc $\widehat{GEA} = \widehat{AEF}$. Ainsi la hauteur issue de A est la bissectrice de $\hat{E}$ dans le triangle orthique. On conclut par un raisonnement analogue pour les deux autres hauteurs.



Solution de l'exercice 23. On ajoute à la figure le point D symétrique de B par rapport à la médiatrice de $[AC]$:



Si l'on note β l'angle en B dans le triangle ABC, on a $\widehat{ADC} = \beta$. Par ailleurs, $CD = AB = CZ$ et donc le triangle DCZ est isocèle en C, ce qui implique $\widehat{DZC} = \beta$. Ceci suffit à conclure à la cocyclicité des quatre points X, Y, Z et B.

Solution de l'exercice 24. Pour faire intervenir la parité, il faut trouver une configuration d'un certain nombre de cases sur lesquelles le nombre de signes $(+)$ et de signes $(-)$ soit toujours de même parité, à chaque étape. Ce n'est pas le cas de tout le damier, puisque certaines petites diagonales ont une ou trois cases. Mais si l'on exclut les quatre coins et les quatre cases centrales, chaque étape modifie un nombre pair des huit cases restantes. Comme initialement ces huit cases contiennent un nombre impair de signes $(-)$ (en l'occurrence, un seul), elles contiendront toujours un nombre impair de signes $(-)$ à toute étape du jeu, donc il restera toujours au moins un signe $(-)$.

Solution de l'exercice 25. On découpe le grand carré en 25 petits carrés de taille $\frac{1}{5} \times \frac{1}{5}$. D'après le principe des tiroirs, il existe au moins trois points dans un de ces petits carrés. Or, un tel carré est inclus dans un disque de diamètre sa diagonale. Un tel disque a pour rayon $\frac{\sqrt{2}}{10} < \frac{1}{7}$. Cela répond à la question.

Solution de l'exercice 26. On appelle R_n le nombre de répétitions faites après le n-ième jour. On a $R_{n+1} \geq R_n + 1$ par hypothèse. D'autre part, le groupe a répété au maximum $132 = 12 \times 11$

fois puisqu'il y a onze semaines de répétition. Donc :

$$1 \leq R_1 < R_2 < \cdots < R_{77} \leq 132.$$

On en déduit :

$$22 \leq R_1 + 21 < R_2 + 21 < \cdots < R_{77} + 21 \leq 153.$$

Soit il existe i et j tels que $R_i = R_j + 21$, auquel cas, entre les jours i et j, le groupe a répété 21 fois, soit tous les nombres $R_1, \ldots, R_{77}, R_1 + 21, \ldots, R_{77} + 21$ sont deux à deux distincts. Mais celà est impossible car les entiers précédents sont compris entre 1 et 153 et sont au nombre de $77 \times 2 = 154$.

Solution de l'exercice 27. On procède par récurrence sur n : on considère un carré de taille $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ dont on a retiré une case. Ce carré se partage en quatre carrés de taille $2^n \times 2^n$ et la case retirée tombe dans l'un d'entre eux. Ce « petit » carré est pavable par l'hypothèse de récurrence. Maintenant, on place une pièce au centre recouvrant les trois autres « petits » carrés. Cette pièce prive chacun de ces carrés d'une case et donc ceux-ci deviennent pavables en utilisant à nouveau l'hypothèse de récurrence. Cela conclut.

Solution de l'exercice 28. *a)* On vérifie immédiatement que la parité du nombre de balles rouges ou blanches dans la boîte est inchangée par toutes les opérations permises dans le jeu. Comme le nombre de balles rouges ou blanches est pair (il vaut 2000) avant que l'on commence à jouer, il est encore pair lorsque l'on arrive à la situation où trois balles seulement sont dans la boîte. Si aucune de ces trois balles n'était verte, on aurait exactement trois balles rouges ou blanches dans la boîte, ce qui est impossible car le nombre 3 est impair. Il y a donc au moins une balle verte dans la boîte.

b) Après quelques essais infructueux, on conjecture qu'il est impossible de ne laisser qu'une seule balle dans la boîte. On va donc chercher un invariant qui permet de conclure. Mais l'invariant de la question précédente est trop grossier. Pour le raffiner, on va raisonner modulo 4 et pas modulo 2. Après quelques tatonnements, on trouve que le reste modulo 4 du nombre $B+2V+3R$ ne change pas au cours du jeu (les nombres B, V, R sont les nombres de balles blanches, vertes et rouges situées dans la boîte). Au début du jeu, ce nombre vaut 0 car 2000 est divisible par 4. Mais s'il n'y a qu'une seule balle dans la boîte, ce nombre ne peut valoir que $1, 2$ ou 3. Il est donc impossible de jouer de façon à ne laisser qu'une seule balle dans la boîte.

Solution de l'exercice 29. C'est le premier joueur qui gagne[2]. Il lui suffit pour cela de commencer par placer un carré centré en O puis de jouer toujours le carré symétrique (toujours par rapport à O) de son adversaire.

Solution de l'exercice 30. Raisonnons par l'absurde. Dans ce cas, si ABC est un triangle équilatéral de côté 1, les couleurs des trois sommets sont deux à deux distinctes. Soient A et B deux points du plan distants de $\sqrt{3}$. Il existe alors des points M et N tels que les triangles AMN et BMN soient tous les deux équilatéraux de côté 1. D'après la propriété précédente, les points A et B sont nécessairement de la même couleur.

En résumé, on vient de montrer que deux points distants de $\sqrt{3}$ sont de la même couleur. Mais alors, si O est un point quelconque du plan, le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$ est monochrome. Or, il est facile de trouver deux points distants de 1 sur ce cercle. C'est une contradiction.

Solution de l'exercice 31. À chaque étape, il y a un nombre de moins sur le tableau, et la somme de tous les nombres restants est elle aussi diminuée d'un, puisque a et b sont remplacés par

[2]Il y a quand même des subtilités : est-il toujours possible de poser un carré et est-on certain que le jeu s'arrête nécessaire au bout d'un temps fini. Ce n'est pas clair du tout !

$a+b-1$. Il faudra donc 2004 étapes pour qu'il ne reste plus qu'un nombre sur le tableau, et ce nombre sera :

$$(1+2+\cdots+2005)-2004=\frac{2005\times 2006}{2}-2004=2\,009\,011.$$

Solution de l'exercice 32. Non, car si l'on considère les deux tétraèdres réguliers ayant chacun pour sommets quatre des sommets du cube, et pour arêtes six des diagonales de faces du cube, toute arête du cube a un sommet sur l'un des tétraèdres et l'autre sommet sur l'autre. Si l'on ajoute 1 aux entiers des deux extrémités de l'arête, on ajoute un à la somme des entiers du premier tétraèdre, mais on ajoute aussi un à la somme des entiers du second tétraèdre : la différence entre ces deux sommes est donc invariante. Or dans la position initiale, cette différence est égale à 2, elle sera toujours égale à 2, ce qui entraîne que les entiers des sommets ne seront jamais tous égaux.

Solution de l'exercice 33. Considérons la configuration pour laquelle la somme des longueurs des segments est minimale. Cette configuration ne peut pas contenir un croisement parce que si les deux segments $[FP]$ et $[F'P']$ se croisaient (F et F' désignent des fermes, alors que P et P' désignent des puits), la configuration obtenue en remplaçant ces deux précédents segments par $[FP']$ et $[F'P]$ serait plus « petite ».

Solution de l'exercice 34. Posons :

$$A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100}\qquad\text{et}\qquad B=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{98}{99}.$$

Le produit AB se simplifie et donne au final $AB=\frac{1}{100}$. Par ailleurs, on a $\frac{2}{3}>\frac{1}{2}$, $\frac{4}{5}>\frac{3}{4}$, *etc.* et donc $B>A$. On en déduit $A^2<AB=\frac{1}{100}$ et donc $A<\frac{1}{10}$ (puisque $A>0$).

De même, on montre $B/2<A$ et donc $A^2>\frac{1}{200}$. Ainsi $A>\frac{1}{\sqrt{200}}>\frac{1}{15}$.

Solution de l'exercice 35. Pour tout i, notons F_i l'ensembles des derniers chiffres des nombres de E_i. Par hypothèse les F_i forment une suite décroissante de sous-ensembles non vides de E_1. Comme E_1 est fini, cette suite est stationnaire, et en particulier il existe un entier appartenant à tous les F_i. Cet entier sera le chiffre des unités du « nombre avec une infinité de chiffres » que l'on cherche à construire.

À ce stade, on élimine des E_i (pour tout i) tous les entiers qui ne se terminent pas par l'entier retenu. Les « nouveaux » E_i vérifient encore la même hypothèse et en recopiant le même argument que précédemment, on prouve qu'il existe un chiffre des dizaines du « nombre avec une infinité de chiffres » tel qu'il existe dans chacun des E_i un nombre se terminant par les deux chiffres construits.

De proche en proche, en appliquant encore le même raisonnement, on construit tous les chiffres du « nombre avec une infinité de chiffres ».

Solution de l'exercice 36. Notons f le nombre de faces. Le nombre d'arêtes d'une face F donnée est le même que le nombre de faces adjacentes à F, c'est donc un entier compris entre 1 et $f-1$. Le principe des tiroirs fournit la conclusion.

Solution de l'exercice 37. On considère un triangle équilatéral de côté d. D'après le principe des tiroirs, il a deux sommets de même couleur. Cela donne une solution.

Solution de l'exercice 38. Définissons la suite (u_n) par $u_0=0$ et la formule de récurrence :

$$u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}.$$

La question revient à donner une formule close pour u_n. Or, on se rappelle que l'on dispose de la formule :

$$2\cos^2\alpha = 1 + \cos(2\alpha)$$

valable pour tout α. Si l'on pose $f(x) = 2\cos x$, la formule précédente se réécrit sous la forme suivante :

$$f(x) = \sqrt{2 + f(2x)}$$

ou encore :

$$\sqrt{2 + f(x)} = f\left(\frac{x}{2}\right).$$

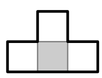
Cette dernière expression est tout à fait propice à la résolution de l'exercice, puisque l'utilisant, on montre sans difficulté par récurrence que $u_n = f(\pi/2^{n+1})$. D'où finalement l'expression :

$$u_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right).$$

Solution de l'exercice 39.
Première solution. On procède par récurrence. Le résultat est vrai pour $8 = 5 + 3$. Par ailleurs, si une somme n est payable avec des pièces de 5 et des pièces de 3, soit on utilise au moins une pièce de 5 et en remplaçant celle-ci par deux pièces de 3, on paye la somme $n+1$, soit on n'utilise que des pièces de 3, mais comme n est au moins égal à 8, on utilise au moins trois pièces de 3, et en remplaçant trois des pièces de 3 par deux pièces de 5 on paye la somme $n + 1$.

Deuxième solution. L'entier n s'écrit soit $3k$ (auquel cas il est payable avec k pièces de 3), soit $3k + 1$ (auquel cas, si k est au moins égal à 3, il est payable avec $(k - 3)$ pièces de 3 et 2 pièces de 5), soit $3k + 2$ (auquel cas, si k ;2C est au moins égal à 1, il est payable avec $(k - 1)$ pièces de 3 et 1 pièce de 5), ce qui explique que seuls 1, 4, 7 et 2 ne soient pas payables avec des pièces de 3 et des pièces de 5.

Solution de l'exercice 40. On peut en placer 32, car un cavalier placé sur une case blanche ne peut prendre qu'une case noire. Si l'on place les 32 cavaliers sur les 32 cases blanches de l'échiquier, ils sont mutuellement imprenables. Encore faut-il prouver qu'on ne peut pas en placer davantage. Subdivisons l'échiquier en 8 rectangles de 2×4 cases. Si on place plus de 32 cavaliers sur l'échiquier, l'un de ces rectangles contient plus de 4 cavaliers. Or sur chaque case d'un tel rectangle, un cavalier peut prendre une autre case du même rectangle. S'il y a n cavaliers dans ce rectangle, ces n cavaliers contrôlent n autres cases du même rectangle, et pour qu'ils soient mutuellement imprenables il faut que ces n autres cases soient vides, ce qui n'est pas possible dès lors que n est strictement supérieur à 4.

Solution de l'exercice 41. Si l'on colorie les cases du rectangle comme un damier, on remarque que toutes les pièces recouvrent forcément deux cases de chaque couleur sauf la pièce . La conclusion en résulte puisqu'il y a autant de cases de chaque couleur dans le rectangle.

Solution de l'exercice 42. Ce problème difficile utilise et un raisonnement par récurrence, et le principe des tiroirs. Tout d'abord, le résultat est vrai pour $n = 1$, car trois entiers distincts de $\{-1, 0, 1\}$ ne peuvent être que -1, 0 et 1 et leur somme est bien nulle. Supposons donc (hypothèse de récurrence) que pour un $n \geq 1$, ce résultat soit vrai, et montrons qu'il est encore vrai pour $n+1$. Considérons un ensemble E de $2n + 3$ entiers distincts de l'intervalle $A_{n+1} = [-2n - 1, 2n + 1]$. Parmi deux, combien appartiennent aussi à l'intervalle $A_n = [-2n + 1, 2n - 1]$? Il peut y en avoir soit $2n + 3$, soit $2n + 2$, soit $2n + 1$, soit $2n$, soit $2n - 1$, car seuls quatre nombres de A_{n+1}

n'appartiennent pas à A_n. Si $2n+1$ (ou plus) entiers de E appartiennent à A_n, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on peut trouver parmi eux trois entiers dont la somme est nulle. Il reste à étudier les cas où trois ou quatre entiers de E n'appartiennent pas à A_n. L'idée est de regrouper les entiers de A_n en un certain nombre de paires dont la somme soit l'opposé de l'un des entiers de E n'appartenant pas à A_n. Si le nombre de paires ainsi formées est inférieur au nombre d'entiers de E, le principe des tiroirs permettra d'affirmer que deux entiers de E appartiennent à la même paire, leur somme sera opposée à l'un des entiers de E, ce qui prouve que la somme de trois entiers de E sera nulle.

Or ceci est réalisable en distinguant deux cas : si, parmi les trois ou quatre entiers de E n'appartenant pas à A_n, figurent $2n+1$ et $-(2n+1)$, on choisit comme paires : $(1, 2n)$, $(2, 2n-1)$, $(3, 2n-2)$, jusqu'à $(n, n+1)$ dont la somme est opposée à $-(2n+1)$, et $(0, -(2n+1))$, $(-1, -2n)$, jusqu'à $(-n, -(n+1))$ dont la somme est opposée à $(2n+1)$. Les $2n+2$ entiers de E autres que $2n+1$ se distribuent entre ces $2n+1$ paires de sorte que deux d'entre eux appartiennent à la même paire. Si maintenant l'un des entiers $2n+1$ ou $-(2n+1)$ n'appartient pas à E, par exemple $2n+1$, comme on est dans le cas où trois ou quatre entiers de E appartiennent à $\{-(2n+1), -2n, 2n, 2n+1\}$, alors les trois autres de ces quatre entiers appartiennent à E, notamment $-(2n+1)$ et $2n$. On choisit comme paires $(1, 2n), \ldots, (n, n+1)$ dont la somme est opposée à $-(2n+1)$ et $(0, -2n), (1, -(2n-1)), \ldots, (-(n-1), -(n+1))$, de somme opposée à $2n$. Tous les éléments de E se répartissent dans ces $2n$ tiroirs sauf $-(2n+1)$ et éventuellement $-n$ (qui n'appartiennent à aucun tiroir), car $2n+1$, lui, n'appartient pas à E ; cela fait au moins $2n+1$ éléments dans $2n$ tiroirs : une fois encore, deux d'entre eux seront dans le même tiroir, ce qui achève la démonstration.

Solution de l'exercice 43. Colorions en rouge les arcs diamétralement opposés de ceux coloriés en bleu. Certains arcs seront peut-être simultanément rouges et bleus, mais ce qui est certain, c'est que la longueur des arcs rouges ou bleus sera strictement inférieure au double de la longueur des arcs bleus, donc à 360°. Cela signifie qu'on peut trouver au moins un point A du cercle qui ne soit ni rouge ni bleu : A n'appartient pas aux arcs bleus, et le point B diamétralement opposé à A n'appartient pas non plus aux arcs bleus (sinon A serait rouge), donc le diamètre $[AB]$ répond à la question.

Solution de l'exercice 44. Soit N un entier suffisamment grand, tel que $1/N < \varepsilon^2$. Divisons l'intervalle $[-1, 1[$ en N tiroirs $[k/N, (k+2)/N[$, et plaçons-y les (N+1) valeurs : $\cos 0$, $\cos 2$ jusqu'à $\cos(2N)$. On admettra qu'aucun de ces cosinus n'est égal à 1 (si l'on avait $\cos(2k) = 1$, on aurait $\sin(2k) = 0$ et le problème serait trivialement résolu, mais ce n'est pas possible car π n'est pas rationnel). Deux de ces cosinus, $\cos(2a)$ et $\cos(2b)$ se trouvent dans le même tiroir, ce qui entraîne :

$$|\cos(2a) - \cos(2b)| < 2\varepsilon^2.$$

Or $\cos(2a) - \cos(2b) = 2\sin(b+a)\sin(b-a)$. Le n cherché est soit $b+a$, soit $b-a$, car si aucun de ces deux sinus n'était inférieur à ε en valeur absolue, leur double produit ne serait pas, en valeur absolue, inférieur à $2\varepsilon^2$, ce qui achève la démonstration.

Solution de l'exercice 45. Considérons les 1024 nombres $\beta_1 k_1 + \beta_2 k_2 + \cdots + \beta_{10} k_{10}$ obtenus lorsque les β_i parcourent $\{0, 1\}$. D'après le principe des tiroirs, deux d'entre eux ont le même reste modulo 1001. Leur différence est alors un mutiple de 1001 et de la forme donnée dans l'énoncé.

Solution de l'exercice 46. On se rappelle que l'on dispose de la factorisation :

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

de sorte que pour tout n et pour tous entiers a et b, on a $a-b$ divise $a^n - b^n$. Ainsi, si P est un polynôme à coefficients entiers, $a-b$ divise $P(a) - P(b)$.

Si un tel P existait, $5 = 12 - 7$ devrait diviser $6 = P(12) - P(7)$, mais ce n'est pas le cas. Un tel polynôme n'existe donc pas.

Solution de l'exercice 47. Fixons $N > 0$ et nous considérons les nombres $0, \{\alpha\}, \{2\alpha\}, \dots, \{N\alpha\}$ (où $\{\cdot\}$ désigne la partie décimale. Il s'agit de nombres compris entre 0 et 1 et donc d'après le principe des tiroirs appliqués avec les intervalles $[k/N, (k+1)/N[$, il existe deux entiers distincts i et j compris entre 0 et N tels que $\{\alpha i\}$ et $\{\alpha j\}$ soit dans le même intervalle. On a alors :

$$|\{\alpha i\} - \{\alpha j\}| \leq \frac{1}{N}$$

ce qui signifie encore qu'il existe un entier p tel que :

$$|\alpha(i-j) - p| \leq \frac{1}{N}.$$

En divisant par $i - j$, on obtient :

$$\left|\alpha - \frac{p}{i-j}\right| \leq \frac{1}{N(i-j)} \leq \frac{1}{(i-j)^2}.$$

On obtient donc un couple comme dans le demande l'énoncé en prenant $q = i - j$.

Il reste à prouver qu'il existe une infinité de tels couples. Mais la démonstration précédente prouve en plus que dès que l'on fixe un entier N, on peut trouver un couple vérifiant la condition de l'énoncé ainsi que la condition supplémentaire :

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{N}.$$

Ainsi on peut trouver des couples (p, q) tels que la fraction $\frac{p}{q}$ soit arbitrairement proche de α, et comme ce dernier est supposé irrationnel, on peut en trouver une infinité.

Solution de l'exercice 48. En faisant « $x = 0$ », on obtient $f(0) - f(0)^2 \geq 1/4$, ce qui se réécrit $(f(0) - 1/2)^2 \neq 0$. On en déduit $f(0) = 1/2$. De même, on obtient $f(1) = 1/2$. Finalement f ne peut être bijective.

Solution de l'exercice 49. L'inégalité de moyenne entre moyenne d'ordre 2 et d'ordre 3 donne après élévation au carré :

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \leq \left(\frac{x^3 + y^3}{2}\right)^{2/3}.$$

L'hypothèse dit que $\frac{x^3+y^3}{2} \geq 1$, d'où on déduit :

$$\left(\frac{x^3 + y^3}{2}\right)^{2/3} < \frac{x^3 + y^3}{2}.$$

En regroupant les deux inégalités précédentes, on obtient $x^2 - x^3 < y^2 - y^3$. Mais on a toujours $y^2 - y^3 < y^3 - y^4$ et cela conclut.

Solution de l'exercice 50. Soit f une fonction. On définit :

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{f(x) + f(-x)}{2} \\ i(x) &= \frac{f(x) - f(-x)}{2}. \end{aligned}$$

On vérifie directement que p est paire et i impaire et que $f = p + i$.

<u>*Solution de l'exercice 51*</u>. Posons $a = f(0)$. En faisant « $y = 0$ » dans l'équation précédente, on obtient $f(x-a) = 1-x$. En posant $t = x-a$, il vient pour tout réel t, $f(t) = c-t$ avec $c = 1-a$. On peut alors calculer :

$$f(x - f(y)) = f(x - c + y) = 2c - x - y.$$

Ainsi la fonction f est solution si et seulement si $c = \frac{1}{2}$. On en déduit que l'unique fonction solution est $x \mapsto \frac{1}{2} - x$.

<u>*Solution de l'exercice 52*</u>. Il est clair que l'identité est une solution du problème. Prouvons que c'est la seule. Soit f une solution éventuelle. De la première condition et par une récurrence sans difficulté, on déduit que, pour tout $x \in \mathbb{Q}^{+\star}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(x+n) = f(x) + n$.

Soient $a, b \in \mathbb{N}^\star$. On a $\left(\frac{a}{b} + b\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 + b^2 + 2a$. Par suite, en utilsant la deuxième condition, il vient :

$$f\left(\left(\frac{a}{b} + b\right)^2\right) = \left(f\left(\frac{a}{b} + b\right)\right)^2 = \left(f\left(\frac{a}{b}\right) + b\right)^2 = \left(f\left(\frac{a}{b}\right)\right)^2 + b^2 + 2bf\left(\frac{a}{b}\right).$$

D'autre part :

$$f\left(\left(\frac{a}{b} + b\right)^2\right) = f\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2 + b^2 + 2a\right) = f\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2\right) + b^2 + 2a = \left(f\left(\frac{a}{b}\right)\right)^2 + b^2 + 2a.$$

Des deux égalités précédentes, on déduit immédiatement $bf\left(\frac{a}{b}\right) = a$, c.à.d. $f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b}$.

Ceci étant vrai quels que soient les entiers strictement positifs a et b, cela entraine que $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{Q}^{+\star}$.

<u>*Solution de l'exercice 53*</u>. C'est une application directe de l'inégalité de réordonnement après avoir remarqué que les nombres a^2, b^2, c^2 sont rangés dans le même ordre que a, b, c.

<u>*Solution de l'exercice 54*</u>. L'équation fonctionnelle obtenue en remplaçant successivement x par t, $\frac{1}{1-t}$ et $\frac{1}{t} - 1$ donne les trois égalités :

$$\begin{aligned} f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) &= x \\ f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(1 - \frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{1-x} \\ f\left(1 - \frac{1}{x} - 1\right) + f(x) &= 1 - \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

En additionnant la première et la troisième égalité et en retranchant la troisième, on trouve :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}\right).$$

Réciproquement que la fonction donnée par la formule précédente est bien solution.

<u>*Solution de l'exercice 55*</u>. Avec $m = 1$, la relation donne :

$$f(n+1) = f(n) + n + 1$$

ce qui donne une relation de récurrence simple. Exactement :

$$f(n) = n + f(n-1) = n + (n-1) + f(n-2) = \cdots = n + (n-1) + \cdots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Il y a donc une unique fonction solution : elle est donnée par la formule précédente.

Solution de l'exercice 56. En faisant « $x = 0$ », on obtient l'égalité $yf(0) = y^2 f(0)$ qui doit être vérifiée pour tout réel y, ce qui n'est possible que si $f(0) = 0$. Avec $x = 1$, il vient $f(y) + yf(1) = (1 + y^2)f(y)$ d'où $f(y) = \frac{f(1)}{y}$ pour tout $y \neq 0$. Seules peuvent être solutions les fonctions de la forme f définies par $f(x) = \frac{a}{x}$ (pour un certain entier a, en l'occurrence $f(1)$) et $f(0) = 0$.

Réciproquement, on vérifie que ces fonctions conviennent bien.

Solution de l'exercice 57. Sans hypothèse de continuité, il y a énormément de solutions. On remarque déjà que l'hypothèse implique $f(x) = f(2^n x)$ pour tout réel x et tout entier relatif n.

Précisément, on définit f n'importe comment sur $A = \{0\} \cup [1, 2[\cup] - 2, -1]$. Pour tout réel $x \neq 0$, il existe un unique entier (relatif) n tel que $2^n x \in A$. On définit alors $f(2^n x) = f(x)$. On obtient ainsi toute une série de fonctions solutions et il est passablement clair que toutes les solutions s'expriment ainsi.

Traitons maintenant la question avec l'hypothèse de continuité. Pour tout réel x, on a $f(x) = f(x/2^n)$ et donc par passage à la limite (quand $n \to +\infty$), il vient $f(x) = f(0)$. On en déduit que la fonction f est constante. Réciproquement il est clair que les fonctions constantes conviennent.

Solution de l'exercice 58. L'inégalité arithmético-géométrique s'écrit :

$$\frac{1}{n}\left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots \frac{x_n}{x_1}\right) \geq \sqrt[n]{\frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_3} \cdots \frac{x_n}{x_1}} = 1$$

ce qui donne directement la conclusion.

Solution de l'exercice 59. En remplaçant x et y par 0, on obtient $f(0)^2 = f(0)$, d'où $f(0)$ vaut 0 ou 1. Cependant, en faisant « $x = 0$ » et « $y = 1$ », il vient $f(0)(f(1) - 1) = 1$. Ainsi la valeur 0 est exclue pour $f(0)$, et nécessairement $f(0) = 1$. Faisons à présent « $y = 1$ ». On obtient directement $f(x) = x + 1$.

Il n'y a donc que la fonction $x \mapsto x + 1$ qui est solution (on vérifie réciproquement qu'elle convient bien).

Solution de l'exercice 60. Les deux dernières relations entraînent :

$$f(f(f(n+2)+2)) = f(n) = f(n+2) + 2$$

d'où on déduit $g(n) = g(n + 2)$ où g est définie par $g(n) = f(n) + n$. On a $g(0) = 1$ et $f(1) = f(f(0)) = 0$, d'où $g(1) = 1$. On en déduit directement que g est la fonction constante égale à 1 puis que $f(n) = 1 - n$.

Réciproquement on vérifie que la fonction $n \mapsto 1 - n$ est bien solution.

Solution de l'exercice 61. En remplaçant x par $-1/x$ dans l'équation fonctionnelle, on obtient :

$$-xf\left(\frac{1}{x}\right) + f(-x) = -\frac{1}{x}.$$

En multipliant l'équation de l'énoncé par x et en l'additionnant à la précédente égalité, on obtient $2f(-x) = x^2 - \frac{1}{x}$ puis finalement :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x}.$$

On vérifie réciproquement que la fonction précédente convient bien.

<u>*Solution de l'exercice 62*</u>. On considère une suite (a_n) qui vérifie la condition de l'énoncé. Soit n un entier au moins égal à 1. On classe les éléments de la suite dont les indices sont compris entre 1 et n pour obtenir une permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$ telle que :

$$a_{\sigma(1)} < a_{\sigma(2)} < \cdots < a_{\sigma(n)}.$$

L'hypothèse de l'énoncé nous donne, pour tout entier i compris entre 1 et n, l'inégalité :

$$a_{\sigma(i+1)} - a_{\sigma(i)} \geq \frac{1}{\sigma(i) + \sigma(i+1)}.$$

Sommant ces inégalités, il vient, puisque l'on a $a_{\sigma(1)} \geq 0$:

$$c \geq \frac{1}{\sigma(1) + \sigma(2)} + \frac{1}{\sigma(2) + \sigma(3)} + \ldots + \frac{1}{\sigma(n-1) + \sigma(n)}.$$

On passe à l'inverse pour obtenir :

$$\frac{1}{c} \leq \frac{1}{\frac{1}{\sigma(1)+\sigma(2)} + \frac{1}{\sigma(2)+\sigma(3)} + \ldots + \frac{1}{\sigma(n-1)+\sigma(n)}}.$$

On peut maintenant utiliser l'inégalité entre moyenne harmonique et moyenne arithmétique, qui nous donne :

$$\frac{1}{c} \leq \frac{\sigma(1) + \sigma(2) + \sigma(2) + \sigma(3) + \ldots + \sigma(n-1) + \sigma(n)}{(n-1)^2}$$

soit :

$$\frac{1}{c} \leq \frac{2(\sigma(1) + \sigma(2) + \sigma(3) + \ldots + \sigma(n-1) + \sigma(n)) - \sigma(1) - \sigma(n)}{(n-1)^2}.$$

Mais les $\sigma(i)$ sont exactement les entiers compris entre 1 et n. Leur somme vaut donc $\frac{n(n+1)}{2}$. On a donc obtenu l'inégalité :

$$\frac{1}{c} \leq \frac{n(n+1)}{(n-1)^2}.$$

Faisant tendre n vers l'infini, on trouve bien le résultat demandé.

<u>*Solution de l'exercice 63*</u>. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'équation fonctionnelle fournit les trois relations suivantes :

$$\begin{aligned} f(x+1) + f(x-1) &= \sqrt{2} \cdot f(x) \\ f(x+2) + f(x) &= \sqrt{2} \cdot f(x+1) \\ f(x) + f(x-2) &= \sqrt{2} \cdot f(x-1). \end{aligned}$$

En multipliant la première par $\sqrt{2}$ et en lui ajoutant les deux autres, il reste $f(x+2)+f(x-2) = 0$, ou encore $f(x+2) = -f(x+2)$.

Ainsi si x est un réel, on peut écrire $f(x) = -f(x+4) = f(x+8)$, d'où on déduit que la fonction est 8-périodique.

<u>*Solution de l'exercice 64*</u>. Avec $y = 0$, on récupère $2f(x) = f(3x)$ pour tout entier x. En particulier $f(0) = 0$. Avec $y = x$, on a $f(2x) = f(3x)$ et donc en combinant avec la relation précédente $f(2x) = 2f(x)$. Les égalités précédentes donnent pour tout n, $f(4n) = 2f(2n) = f(9n)$. Or en prenant $x = 3n$ et $y = n$. Il vient $f(4n) + f(2n) = f(9n)$, d'où $f(2n) = 0$ puis $f(n) = 0$ puisque $f(2n) = 2f(n)$.

Finalement f est la fonction nulle.

Solution de l'exercice 65. Tout d'abord, f est injective car si l'on avait $f(n) = f(m)$, on en déduirait $3n = 3m$ et donc $n = m$. Par ailleurs $f(1) = 1$: en effet, comme $f(n) \geq 1$ pour tout n (puisque f prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^\star$), on a $f(f(f(1)) + f(f(1)) \geq 2$ et donc pour avoir $f(f(f(1)) + f(f(1)) + f(1) = 3$, il est nécessaire d'avoir $f(1) = 1$.

Prouvons par récurrence que pour tout n, on a $f(n) = n$, l'hypothèse de récurrence étant $f(k) = k$ pour tout $k \leq n$. Cette hypothèse est vérifiée pour $n = 1$. Faisons l'hérédité. Si $f(n+1) = k \leq n$, alors $f(n+1) = f(k)$ en appliquant f et en utilisant l'hypothèse de récurrence. Ceci contredit l'injectivité de f. On en déduit $f(n+1) \geq n+1$. Mais pour la même raison, $f(f(n+1))$ et $f(f(f(n+1)))$ sont supérieurs ou égaux à $n+1$. La conclusion résulte de l'égalité :

$$f(f(f(n+1))) + f(f(n+1)) + f(n+1) = 3(n+1).$$

En conclusion, la seule fonction qui convient est l'identité.

Solution de l'exercice 66. Montrons tout d'abord qu'une telle fonction devrait être bijective et vérifier $f(0) = 0$. En faisant « $x = 0$ », il vient $f(f(y)) = f(0) - y$. Ainsi si y_1 et y_2 sont deux réels tels que $f(y_1) = f(y_2)$, on obtient en composant par f, $f(0) - y_1 = f(0) - y_2$ et puis $y_1 = y_2$. Cela démontre l'injectivité de f. Alors de $f(f(0)) = f(0)$ on tire $f(0) = 0$. En outre, l'égalité $f(f(-y)) = y$ prouve que tout entier y est atteint par f. Ainsi f est surjective puis bijective.

Dès lors, tout entier z est l'image par f d'un entier y de sorte que, quels que soient les entiers x et z, on ait $f(x+z) = f(x) - y$. Or $f(z) = -y$, d'où on tire $f(x+z) = f(x) + f(z)$. On en déduit qu'il existe un entier a tel que $f(x) = ax$ pour tout x. Mais il en résulte $f(f(x)) = a^2 x$ ce qui est incompatible avec $f(f(y)) = -y$ puisqu'il n'existe aucun entier a tel que $a^2 = -1$.

Activité III

Les punitions

Certains élèves[1] ayant commis des fautes d'orthographe inadmissibles, se sont vus infliger de sévères punitions. Nous les reproduisons ci-dessous.

Orthocentre, orthocentre.

Cocycliques, cocycliques.

[1] Dont nous tairons le nom...

Parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi,
parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi, parmi.

Maintenant, il faut faire le prochaine stage à Sophia-Antipolis parmis les nombreux choix qui se proposent à nous.

Activité IV

La sentence

Trois séances de travail écrites ont ponctués ce stage. On donne dans ce document les énoncés et les solutions.

1 La bienvenue

Exercice 1. Dans une assemblée, on a remarqué les deux propriétés suivantes :

1. si A et B sont deux personnes différentes, alors A est amoureux de B, si et seulement si B n'est pas amoureux de A ;
2. si A, B et C sont trois personnes diffféntes telles que A est amoureux de B, et B est amoureux de C, alors C est amoureux de A.

Combien y a-t-il de personnes au maximum dans cette assemblée ?

Exercice 2. Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f \circ f \circ f = \mathrm{id}$ et $f(0) = 2005$?

Exercice 3. Sur un cercle de centre O, on place deux points A et B tels que l'angle $\widehat{AOB}$ soit aigu. Si P est un point de l'arc $\overset{\frown}{AB}$, on désigne par C et D les projetés orthogonaux de P respectivement sur (OA) et (OB). Montrer que la longueur du segment $[CD]$ ne dépend pas de la position de P sur l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

2 Le mi-parcours

Exercice 4. Si $A = (a_1, \ldots, a_n)$ et $B = (b_1, \ldots, b_n)$ sont deux suites de bits (*i.e.* de 0 ou de 1) de longueur n, on définit leur distance[1] notée $d(A, B)$ comme le nombre d'indices i tels que $a_i \neq b_i$.

On se donne ABC un triangle équilatéral, c'est-à-dire trois suites A, B et C de longueur n telles que $d(A, B) = d(B, C) = d(A, C)$.

a) Montrer que $d = d(A, B) = d(B, C) = d(A, C)$ est un entier pair.
b) Montrer qu'il existe une suite D telle que $d(D, A) = d(D, B) = d(D, C) = \frac{d}{2}$.

Exercice 5. Soit un triangle ABC. Sur son cercle circonscrit, on place deux point L et N sur l'arc $\overset{\frown}{BC}$ ne contenant par A. On désigne par K (resp. M) l'intersection du segment $[AL]$ (resp. $[AN]$) avec $[BC]$. On suppose que les quatre points K, L, M et N sont cocycliques.

Montrer que le triangle ABC est isocèle.

[1] Cette distance s'appelle la *distance de Hamming*.

Exercice 6. Sandrine et Xavier jouent au jeu suivant. Sur une table sont disposées 2005 allumettes. Chacun son tour, chaque joueur retire un certain nombre d'allumettes, mais au moins une et pas plus de la moitié des allumettes restantes. Celui qui gagne la partie est celui qui laisse une unique allumette sur la table. Sachant que c'est Sandrine qui commence à jouer, déterminer quel joueur possède une stratégie gagnante.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que pour tout réel $a \neq 1$, la fonction $x \mapsto f(x) + f(ax)$ est affine[2]. Montrer que f est affine.

3 Le jugement dernier

Exercice 8. On considère une fonction $f : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = n^2 f(n)$$

pour tout entier $n > 1$. Si $f(1) = 2005$, combien vaut $f(2005)$?

Exercice 9. Deux cercles se coupent en deux points distincts P et Q. Une droite qui rencontre le segment $[PQ]$ coupe les deux cercles en A, B, C et D dans cet ordre. Montrer que $\widehat{APB} = \widehat{CQD}$.

Exercice 10. Si n est un entier strictement positif, on note S_n l'ensemble des entiers de 1 à n.

a) Trouver toutes les valeurs de n pour lesquelles on peut partager S_n en deux sous-ensembles disjoints dont les sommes des éléments sont égales.

b) Trouver toutes les valeurs de n pour lesquelles on peut partager S_n en trois sous-ensembles disjoints dont les sommes des éléments sont égales.

Exercice 11. Soient $ABCD$ un quadrilatère (convexe) inscriptible et Q le milieu de $[AB]$. On note S le point d'intersection des diagonales et P et R les projetés respectifs de S sur les droites (AD) et (BC). Montrer que $PQ = QR$.

4 Les solutions

Solution de l'exercice 1. Nous allons montrer tout d'abord qu'il ne peut pas y avoir deux personnes A et B amoureuses d'un même individu X. Supposons par l'absurde que cela puisse arriver. Alors, si A était amoureux de B, par la deuxième propriété, X serait amoureux de A (puisque B est amoureux de X). Mais cela n'est pas possible puisque A est amoureux de X. De même, on montre qu'il est impossible que B soit amoureux de A. Pourtant la première propriété stipule qu'une de ces deux alternatives doit se produire. Cela forme une contradiction et montre la propriété.

Comme corollaire du résultat précédent, on déduit que si A est amoureux de B, alors B est amoureux de tous les individus à l'exception de A.

Supposons à présent que l'assemblée contienne au moins quatre personnes que nous désignerons par les lettres A, B, C et D. On peut supposer sans perte de généralité que A est amoureux de B. Mais alors, par la première propriété, B est amoureux de C et de D. Ainsi C et D sont tous les deux amoureux de toutes les personnes à l'exception de B. En particulier, ils sont tous les deux amoureux de A et on a vu que cela ne pouvait pas se produire.

[2]Une fonction affine est une fonction de la forme $x \mapsto \alpha x + \beta$ pour deux réels α et β.

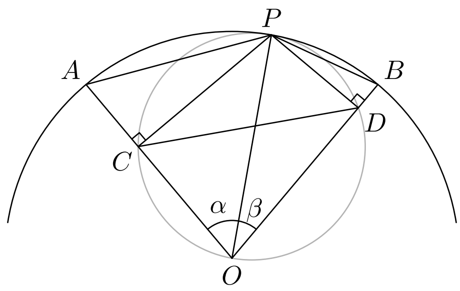
On déduit de cela que l'assemblée ne peut contenir plus de trois personnes. Or avec trois personnes, il est facile d'imaginer une situation qui fonctionne : A est amoureux de B, B est amoureux de C et C est amoureux de A.

Solution de l'exercice 2. Une telle fonction existe, mais pour la construire il est plus simple de bricoler une définition *ad hoc* plutôt que de faire la liste des fonctions usuelles connues. Une définition simple est la suivante :

$$f(0) = 2005 \quad ; \quad f(2005) = 1 \quad ; \quad f(1) = 0$$

et $f(x) = x$ pour toutes les autres valeurs du réel x. Il est immédiat de vérifier qu'elle convient bien.

Solution de l'exercice 3. Comme pour tout exercice de géométrie, on commence par tracer une figure propre :



et comme d'habitude on profite de la figure pour introduire des nouvelles notations. Appelons également R le rayon du cercle.

Première solution. Il s'agit simplement de calculer la longueur CD en fonction des données du problèmes. On calcule d'abord les longueurs OC et OD. Dans le triangle (rectangle) OCP, on exprime $OC = R\cos\alpha$. De même, on obtient $OD = R\cos\beta$, et finalement par la formule d'Al-Kashi :

$$CD^2 = R^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta).$$

Il s'agit de montrer que cette dernière expression ne dépend pas de la position de P, c'est-à-dire ni de α, ni de β mais seulement de la somme $\gamma = \alpha + \beta$. On élimine donc par exemple la variable β dans l'expression de CD^2 en remplaçant $\cos\beta$ par :

$$\cos(\gamma - \alpha) = \cos\gamma\cos\alpha + \sin\gamma\sin\alpha.$$

On obtient :

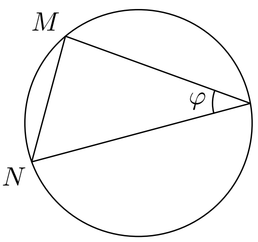
$$\begin{aligned} CD^2 &= R^2(\cos^2\alpha + \cos^2\gamma\cos^2\alpha + 2\cos\gamma\cos\alpha\sin\gamma\sin\alpha + \sin^2\gamma\sin^2\alpha \\ &\qquad -2\cos^2\alpha\cos^2\gamma - 2\cos\gamma\cos\alpha\sin\gamma\sin\alpha) \\ &= R^2(\cos^2\alpha - \cos^2\gamma\cos^2\alpha + \sin^2\gamma\sin^2\alpha) \end{aligned}$$

Or, $\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma$ et $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, d'où :

$$\sin^2\gamma\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\gamma - \cos^2\alpha + \cos^2\alpha\cos^2\gamma.$$

En réinjectant dans l'expression de CD^2, il reste finalement $CD^2 = R^2(1-\cos^2\gamma) = R^2\sin^2\gamma$, d'où $CD = R\sin\gamma$. Ceci conclut.

Deuxième solution. La seconde solution parvient à la même formule ($CD = R\sin\gamma$) mais par un raisonnement plus géométrique. Rappelons tout d'abord que dans la situation suivante :



on dit que l'angle φ intercepte l'arc $\overset{\frown}{MN}$ et on a alors la formule bien pratique $MN = 2r \sin \varphi$ où r désigne le rayon du cercle.

Revenons à l'exercice. On remarque que puisque les angles en C et en D sont droits, les points P, O et C et D sont situés sur un même cercle de diamètre $[PO]$ (et donc de rayon $r = R/2$). Dans ce cercle, l'angle $\gamma = \alpha + \beta$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{CD}$. On en déduit par la formule précédente que $CD = 2r \sin \gamma = R \sin \gamma$.

Solution de l'exercice 4. *a)* Notons $(a_1, \dots, a_n)$ la suite A, $(b_1, \dots, b_n)$ la suite B et $(c_1, \dots, c_n)$ la suite C. Si x et y sont deux éléments de $\{0, 1\}$, notons $d(x, y) = 0$ si $x = y$ et $d(x, y) = 1$ sinon. Par définition :

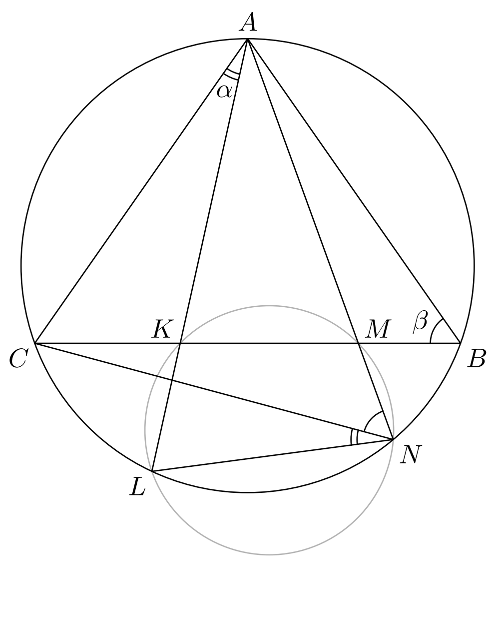
$$d(A, B) = d(a_1, b_1) + d(a_2, b_2) + \cdots + d(a_n, b_n)$$

et des formules analogues pour les autres distances.

Fixons un indice i. Parmi les trois nombres a_i, b_i et c_i, il y en a forcément deux qui sont égaux. Supposons par exemple que $a_i = b_i$ (les autres cas se traitent de meme). On a alors $d(a_i, b_i) = 0$. Si $c_i = a_i$, on a de plus $d(a_i, c_i) = d(b_i, c_i) = 0$ et sinon $d(a_i, c_i) = d(b_i, c_i) = 1$. Dans tous les cas $d(a_i, b_i) + d(b_i, c_i) + d(a_i, c_i)$ est un nombre pair (il vaut 0 ou 2). En sommant tous ces nombres, on arrive à $3d = d(A, B) + d(B, C) + d(A, C)$ est pair. Ceci entraîne que d est pair.

b) On fixe à nouveau un indice i. Si $a_i = b_i = c_i$, on définit $d_i = a_i$. Sinon, on définit d_i comme la valeur qui apparaît deux fois dans $\{a_i, b_i, c_i\}$. On vérifie que dans tous les cas $d(a_i, b_i) = d(d_i, a_i) + d(d_i, b_i)$ d'où en sommant (et en notant $D = (d_1, \dots, d_n)$) $d(D, A) + d(D, B) = d$. De même, on a $d(D, B) + d(D, C) = d(D, A) + d(D, C) = d$, et on déduit du tout que $d(D, A) = d(D, B) = d(D, C) = \frac{d}{2}$.

Solution de l'exercice 5. On commence par faire une figure :



Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ANC}$ interceptent tous les deux l'arc $\overset{\frown}{AC}$, ils sont donc égaux. De même, on a $\widehat{CAL} = \widehat{CNL}$ puisque ces angles interceptent l'arc $\overset{\frown}{CL}$. On en déduit que $\widehat{LNA} = \alpha + \beta$ (avec les notations de la figure) et donc puisque les quatre points K, L, M et N sont cocycliques, il vient :

$$\widehat{AKC} = \widehat{LKM} = \pi - \widehat{LNM} = \pi - \alpha - \beta.$$

Du fait que la somme des angles du triangle AKC vaut π, on déduit $\widehat{ACB} = \beta$, ce qui prouve que le triangle ABC est isocèle en A.

Solution de l'exercice 6. Supposons qu'il n'y ait que 2 allumettes sur la table au commencement du jeu. Alors il est clair que Sandrine a une stratégie gagnante. Par contre, si on commence avec 3 allumettes, Sandrine est obligée d'en prendre une et donc d'en laisser deux. Ainsi elle laisse Xavier dans la position favorable précédente.

Si on commence avec 4, 5 ou 6 allumettes, Sandrine peut toujours s'arranger pour en laisser 3 et ainsi Xavier perd puisqu'il se retrouve dans la position défavorable que l'on vient de voir. Pour 7 allumettes, Sandrine est contrainte d'en laisser 4, 5 ou 6 et donc perd.

On continue ainsi : pour un nombre d'allumettes compris entre 8 et 14, c'est Sandrine qui gagne ; pour 15 allumettes, c'est Xavier ; pour un nombre d'allumettes compris entre 16 et 30, c'est Sandrine ; pour 31 c'est Xavier. On montre ainsi par récurrence que les seuls nombres pour lesquels Xavier gagne sont ceux de la forme $2^n - 1$. Comme 2005 n'est pas de cette forme, c'est Sandrine qui a une stratégie gagnante[3].

Solution de l'exercice 7. Définissons les fonctions φ et ψ par les formules :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= f(x) + f(2x) \\ \psi(x) &= f(x) + f(4x). \end{aligned}$$

Ce sont des fonctions affines par hypothèse. La conclusion résulte de l'écriture :

$$f(x) = \frac{\varphi(x) + \psi(x) - \varphi(2x)}{2}.$$

Remarque. La solution précédente est « si compliquée » parce que l'énoncé original ne faisait l'hypothèse que pour $a > 1$. Ici, la conclusion est tout à fait immédiate si on pense à l'appliquer l'hypothèse avec $a = 0$.

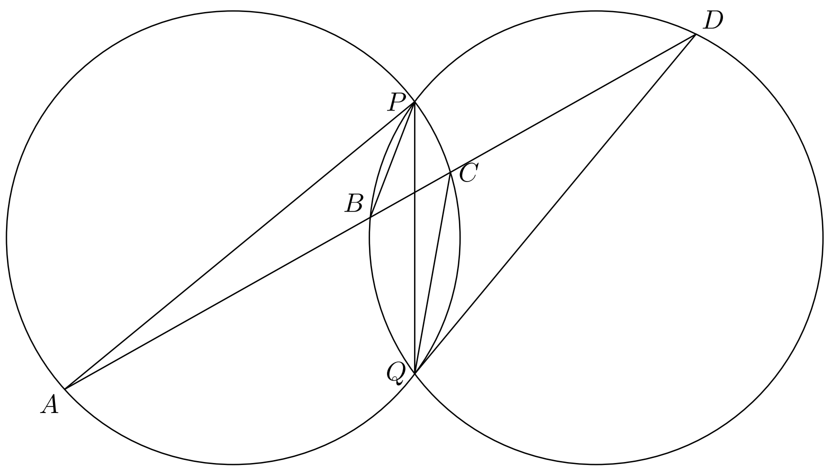
Solution de l'exercice 8. La formule permet de calculer les $f(n)$ de proche en proche. Dans un premier temps, en prenant « $n = 2$ », on obtient :

$$2005 + f(2) = 4f(2)$$

d'où on trouve $f(2) = \frac{2005}{3}$. En faisant « $n = 3$ », on calcule $f(3) = \frac{2005}{6}$. En poursuivant légèrement les calculs, on intuite la formule générale $f(n) = \frac{2 \times 2005}{n(n+1)}$ que l'on démontre sans mal par récurrence. Ainsi $f(2005) = \frac{1}{1003}$.

Solution de l'exercice 9.

[3]L'étude précédente donne même la stratégie : Sandrine doit s'arranger pour laisser un nombre d'allumettes la forme $2^n - 1$; par exemple, au premier coup, il faut qu'elle en laisse 1023 et donc qu'elle en prenne 982, ce qui est bien possible.



La conclusion provient directement d'une chasse aux angles :

$$\widehat{APB} = \widehat{APQ} - \widehat{BPQ} = \widehat{ACQ} - \widehat{BDQ} = \pi - (\widehat{QCD} + \widehat{CDQ}) = \widehat{CQD}.$$

<u>*Solution de l'exercice 10*</u>. Dans ce qui suit, si A est un ensemble de nombres entiers, on notera $\sigma(A)$ la somme des éléments de A.

a) On sait bien que $\sigma(S_n) = \frac{n(n+1)}{2}$. Si l'on peut partager S_n en deux sous-ensembles disjoints dont les sommes des éléments sont égales, alors $\frac{n(n+1)}{2}$ doit être pair, ce qui signifie que l'un des entiers n et $n+1$ est divisible par 4, c'est-à-dire que n est congru à 0 ou à 3 modulo 4.

Quelques essais nous convainquent que la réciproque est vraie, et, en effet, si n est divisible par 4, c'est-à-dire si $n = 4k$ avec $k \geq 1$, les ensembles :

$$A_n = \{1, 4, 5, 8, \ldots, 4i+1, 4i+4, \ldots, 4k-3, 4k\}$$

$$B_n = \{2, 3, 6, 7, \ldots, 4i+2, 4i+3, \ldots, 4k-2, 4k-1\}$$

sont disjoints, recouvrent S_n, et vérifient $\sigma(A_n) = \sigma(B_n)$.

Si n est congru à 3 modulo 4, c'est-à-dire si n est de la forme $4k+3$, où k est un entier positif ou nul, on prend

$$A_n = \{1, 2\} \cup \{4, 7, 8, 11, \ldots, 4i, 4i+3, \ldots, 4k, 4k+3\}$$

$$B_n = \{3\} \cup \{5, 6, 9, 10, \ldots, 4i+1, 4i+2, \ldots, 4k+1, 4k+2\},$$

ce qui comme à l'instant achève de traiter ce cas.

Finalement, on a montré que les nombres cherchés sont les entiers congrus à 0 ou à 3 modulo 4.

b) En raisonnant comme dans la question précédente, on voit qu'une condition nécessaire est que $\frac{n(n+1)}{2}$ soit divisible par 3, ce qui n'est possible que si n est congru à 0 ou à 2 modulo 3. En outre, on voit tout de suite que $n = 3$ ne convient pas.

Là encore, l'examen des petites valeurs nous amène à prouver que ces conditions nécessaires sont aussi suffisantes : les entiers cherchés sont les entiers strictement supérieurs à 3 qui sont congrus à 0 ou à 2 modulo 3. Pour le prouver, on va raisonner par récurrence forte sur n. Tout d'abord, on remarque que les écritures :

$$\begin{aligned}
S_5 &= \{5\} \cup \{1, 4\} \cup \{2, 3\} \\
S_6 &= \{1, 6\} \cup \{2, 5\} \cup \{3, 4\} \\
S_8 &= \{4, 8\} \cup \{5, 7\} \cup \{1, 2, 3, 6\} \\
S_9 &= \{6, 9\} \cup \{7, 8\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5\}
\end{aligned}$$

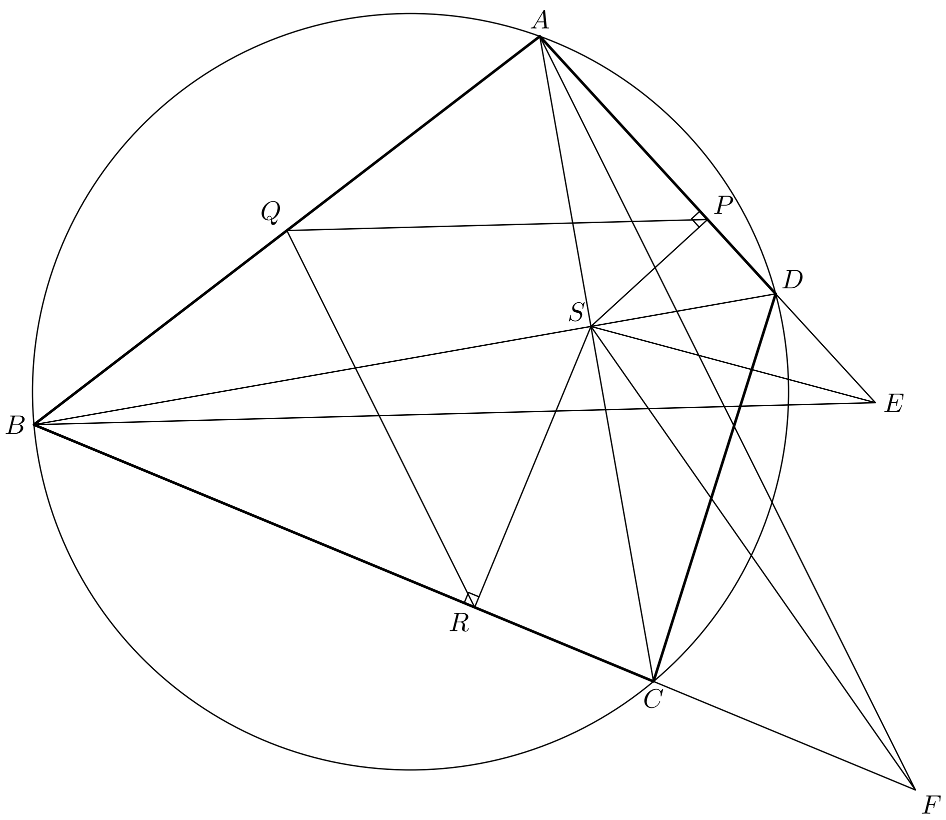
résolvent le problème si n est inférieur à 9. Supposons maintenant que le résultat est vrai jusqu'à n (non inclus), et montrons-le pour n, où n est au moins égal à 11 et congru à 0 ou à 2 modulo 3. Par hypothèse de récurrence, le résultat est vrai pour $n-6$, car $n-6$ est strictement plus grand que 3, et son reste modulo 3 est le même que celui de n. L'ensemble S_{n-6} est donc réunion disjointe de trois ensembles A, B, C tels que $\sigma(A) = \sigma(B) = \sigma(C)$. L'écriture :

$$S_n = (A \cup \{n-5, n\}) \cup (B \cup \{n-2, n-3\}) \cup (C \cup \{n-1, n-4\})$$

montre alors que S_n est bien réunion de trois sous-ensembles disjoints dont les sommes des éléments sont égales.

Les entiers recherchés sont donc les entiers strictement supérieurs à 3 congrus à 0 ou à 2 modulo 3.

Solution de l'exercice 11. On introduit les points E et F symétriques de A par rapport à P et de B par rapport à R :



On a alors $BE = 2QP$ et $AF = 2QR$, et il suffit donc de prouver que $BE = AF$ et pour cela nous allons montrer que les triangles BSE et FSA sont isométriques. On a déjà $SA = SE$ puisque E est également le symétrique de A par rapport à la droite (PS) et de même $SB = SF$. Il suffit pour conclure de montrer que les angles en S des deux triangles sont égaux. Mais on a par cocyclicité $\widehat{DBC} = \widehat{DAC}$ d'où on déduit, puisque les triangles BSF et ASE sont isocèles, $\widehat{BSF} = \widehat{ASE}$. L'égalité des angles en S s'obtient alors en ajoutant $\widehat{FSE}$ à l'égalité précédente.

Activité V

Les TPE

Pendant que leurs chers camarades subissaient les interrogations orales, de nombreux exercices (bien rangés dans des enveloppes[1]) étaient proposés aux autres élèves qui pouvaient les attaquer seul ou en groupe. Nous donnons les énoncés de tous les exercices et les solutions trouvées par les élèves.

1 Les énoncés

Exercice 1 (résolu). Soit $ABCDE$ un pentagone régulier. On suppose que l'étoile $ACEBD$ a pour aire 1. Les droites (AC) et (BE) se coupent en P et les droites (BD) et (CE) en Q. Déterminer l'aire de $APQD$.

Exercice 2. Trouver tous les couples d'entiers (x, y) tels que :

$$x^3 = y^3 + 2y^2 + 1$$

Exercice 3. Dans la fraction suivante :

$$\frac{29 \div 28 \div 27 \div \cdots \div 16}{15 \div 14 \div 13 \div \cdots \div 2}$$

on place comme l'on souhaite des parenthèses dans le numérateur et on recopie le même parenthèsage dans le dénominateur. Déterminer toutes les valeurs entières possibles de l'expression résultante ?

Exercice 4 (résolu). J'ai choisi $n \geq 5$ nombres qui ont les propriétés suivantes :

1. aucun n'est nul
2. l'un d'entre eux est 2005
3. quatre d'entre eux peuvent toujours être réarrangés pour former une progression géométrique.

Quels sont ces nombres ?

Exercice 5. Soit $n \geq 2$ un entier. Soient a, b et c des réels positifs tels que $a^n + b^n = c^n$. Pour quel entier k existe-t-il un triangle obtusangle (*i.e.* avec un angle obtus) dont les longueurs sont a^k, b^k et c^k ?

[1] D'où le nom TPE : travaux par enveloppes.

Exercice 6. On définit une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour $n \geq 1$, u_{n+1} est le plus petit entier strictement supérieur à u_n tel que l'ensemble $\{u_0, u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}\}$ ne contienne pas trois nombres en progression arithmétique. Calculer u_{100}.

Exercice 7. Une fonction $f : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$ vérifie :

1. $f(ab) = f(a)f(b)$ pour tous entiers a et b premiers entre eux
2. $f(p+q) = f(p) + f(q)$ pour tous nombres premiers p et q.

Montrer que $f(2) = 2$, $f(3) = 3$ et $f(1999) = 1999$.

Exercice 8. Prouver que pour tout entier $n \geq 3$, il existe n entiers strictement positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en progression arithmétique et n entiers strictement positifs $b_1, b_2, \ldots, b_n$ en progression géométrique tels que :

$$b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < \cdots < b_n < a_n$$

Donner un exemple explicite pour $n = 5$.

Exercice 9. Soit P un polyèdre. Existe-il forcément trois arètes de P dont les longueurs sont celles d'un triangle ?

Exercice 10. Soit k un entier. On se donne 40 verres plus ou moins remplis. Étant donné k verres, il est autorisé de transvaser du liquide de l'un à l'autre pour égaliser le volume que chacun contient.

Trouver le plus petit k pour lequel il est toujours possible d'égaliser le volume de liquide contenu dans chaque verre.

Exercice 11 (résolu). Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus. On note A_1 (resp. C_1) le symétrique de A (resp. de C) par rapport à (BC) (resp. à (AB)). On suppose que les points A_1, B et C_1 sont alignés et que $C_1B = 2A_1B$. Montrer que l'angle $\widehat{CA_1B}$ est droit.

Exercice 12. Les réels x, y et z sont strictement positifs et leur produit fait 1. Montrer que si :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq x + y + z$$

alors :

$$\frac{1}{x^k} + \frac{1}{y^k} + \frac{1}{z^k} \geq x^k + y^k + z^k$$

pour tout entier $k > 0$.

Exercice 13 (résolu). Soient ABC un triangle équilatéral et P un point intérieur à ABC dont les distances respectives aux trois côtés sont 3, 4 et 5. Calculer l'aire de ABC.

Exercice 14. On considère un parallélépipède dont l'aire de $216\,\mathrm{cm}^2$ et dont le volume est $216\,\mathrm{cm}^3$. Montrer que ce parallélépipède est un cube.

Exercice 15 (résolu). Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\backslash\{1\}$ telles que pour tout entier n, on ait :

$$f(n) + f(n+1) = f(n+2)f(n+3) - 168$$

Exercice 16. Dans un certain pays, il y a 2005 villes (dont une capitale) et chaque paire de villes est reliée par un vol direct. Les prix des billets sur chacun des vols précédents sont distincts deux à deux.

Est-il possible que tous les voyages partant de la capitale, passant au plus une fois par chaque autre ville, et revenant ensuite à la capitale aient tous des prix différents ?

Exercice 17 (résolu). Posons $f(n) = n!$. Le nombre :

$$a = 0\,,\, f(1)\, f(2)\, f(3)\, \dots$$

est-il rationnel ?

Exercice 18. Prouver qu'au moins 99% des nombres suivants sont composés :

$$10^1 + 1\,;\; 10^2 + 1\,;\; 10^3 + 1\,;\; \dots 10^{2000} + 1$$

Exercice 19 (résolu). Montrer que la fraction $\frac{21n+4}{14n+3}$ est toujours irréductible.

Exercice 20 (résolu). Soient $a_1, \dots, a_{1969}$ des entiers et $b_1, \dots, b_{1969}$ les mêmes entiers écrits dans un ordre différent. Montrer que le nombre :

$$(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \cdots (a_{1969} - b_{1969})$$

est pair.

Exercice 21 (résolu). Trouver tous les entiers solution de l'équation :

$$x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{14}^4 = 1599$$

Exercice 22 (résolu). Le nombre 31^{11} est-il plus grand ou plus petit que 17^{14} ?

Exercice 23 (résolu). Dans un carré d'aire 1, il y a 2005 figures dont la somme des aires est strictement supérieure à 2004. Montrer que toutes ces figures ont un point commun.

Exercice 24 (résolu). Le quadrilatère $ABCD$ est inscriptible dans un cercle de centre O. Les diagonales AC et BD sont perpendiculaires. Montrer que la distance de O à la droite (AD) est égale à la moitié de la longueur du segment $[BC]$.

Exercice 25 (résolu). Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels supérieurs ou égaux à 1. Montrer que :

$$x_1 + x_2 + \cdots x_n - x_1 x_2 \cdots x_n \leq n - 1$$

Exercice 26 (résolu). Montrer que pour tout entier n, on a :

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < 3$$

Exercice 27. Sur un cercle de rayon 1, on a marqué n points $A_1, \dots, A_n$. Montrer qu'au plus $\frac{n^2}{3}$ segments parmi les $[A_i A_j]$ $(1 \leq i < j \leq n)$ ont une longueur strictement supérieure à $\sqrt{2}$.

Exercice 28. Les entiers strictement positifs $a_1, \ldots, a_{2004}$ ont la propriété suivante : pour tout $i \in \{10, 20, \ldots, 2000\}$, on a $a_{i-9} + a_{i-8} + \cdots + a_i < 20$. Montrer qu'il existe deux entiers m et n tels que $a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n = 200$.

Exercice 29. Soit A l'ensemble des entiers positifs de la forme $1+4k$, k entier : $A = \{1, 5, 9, 13, 17, 21, \ldots\}$. Un élément de A est dit *premier* s'il a exactement deux diviseurs dans A.

Montrer qu'il existe un nombre dans A qui n'est pas premier, mais pour lequel on n'a pas unicité de la décomposition en facteurs premiers (dans A).

Exercice 30 (résolu). Soient A un ensemble fini de nombres réels et $f : A \to A$ une fonction vérifiant $f(x) - f(y) \geq x - y$ pour tout $x, y \in A$ avec $x > y$. Montrer que f est l'identité.

Exercice 31 (résolu). La suite d'entiers $1, 5, 6, 25, 26, 30, 31, \ldots$ est formée des nombres qui s'écrivent comme une somme de puissances de 5 (avec des exposants deux à deux distincts) rangés par ordre croissant.

Quel est le 167ème nombre de la suite ?

Exercice 32. Trouver tous les réels x vérifiant :

$$[x^2 - 2x] + 2[x] = [x]^2$$

où $[a]$ désigne la partie entière du réel a.

Exercice 33. Trouver tous les polynômes P à coefficients réels tels que :

$$1 + P(x) = \frac{P(x-1) + P(x+1)}{2}$$

pour tout réel x.

Exercice 34 (résolu). Soit un nombre fini d'intervalles fermés de longueur 1 de $\mathbb{R}$ dont la réunion est l'intervalle $[0, 50]$. Montrer qu'il existe au moins 25 intervalles parmi les précédents deux à deux disjoints.

Exercice 35 (résolu). Déterminer en fonction de n, la plus grande valeur de l'expression :

$$\sin x_1 \cos x_2 + \sin x_2 \cos x_3 + \cdots + \sin x_n \cos x_1$$

lorsque les x_i parcourent l'ensemble des nombres réels.

Exercice 36. On se donne 111 vecteurs unitaires dans le plan de somme nulle. Montrer qu'il existe 55 vecteurs parmi les précédents dont la somme a une norme inférieure ou égale à 1.

Exercice 37. Soit ABC un triangle équilatéral. Si M est un point intérieur à ABC, on note D, E et F les projetés respectifs de M sur les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

Trouver le lieu des points M pour lesquels l'angle $\widehat{FDE}$ est droit.

Exercice 38 (résolu). Trouver tous les polynômes P tels que :

$$(x - 16)P(2x) = 16(x - 1)P(x)$$

pour tout réel x.

Exercice 39 (résolu). Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe admettant un cercle inscrit. On suppose $\hat{A} = \hat{B} = \frac{2\pi}{3}$, $\hat{D} = \frac{\pi}{2}$ et $BC = 1$. Calculer AD.

Exercice 40 (résolu). Soit A un sous-ensemble de $\{0, 1, 2, \ldots, 1997\}$ contenant au moins 1000 éléments. Montrer que A contient soit une puissance de 2, soit deux entiers distincts dont la somme est une puissance de 2.

Exercice 41 (résolu). Montrer que parmi quatre points d'un disque de rayon 1, il en existe deux dont la distance est inférieure ou égale à $\sqrt{2}$.

Exercice 42. Trouver tous les entiers naturels qui sont tels que lorsque l'on déplace le premier chiffre à la fin, le nombre résultant vaut $3,5$ fois le nombre d'origine.

Exercice 43. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ telles que pour tout $x \in \mathbb{Q}^+$, on ait :

$$f(x+1) = f(x) + 1 \qquad \text{et} \qquad f(x^2) = f(x)^2$$

Exercice 44. Les points K, L, M et N sont sur les côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ d'un parallélépipède (non nécessairement rectangle) $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Montrer que les centres des sphères circonscrites aux quadrilatères A_1AKN, B_1BKL, C_1CLM et D_1DMN sont les sommets d'un parallélogramme.

Exercice 45 (résolu). Dans un triangle acutangle (*i.e.* dont tous les angles sont aigus) ABC, on note F le pied de la hauteur issue de C et M le milieu de $[AC]$. On suppose que $BM = CF$ et $\widehat{MBC} = \widehat{FCA}$. Montrer que ABC est équilatéral.

Exercice 46. Prouver qu'il n'existe pas de fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ vérifiant :

$$f(x + f(y)) = f(x) - y$$

pour tous entiers x et y.

Exercice 47. Dans une communauté d'au moins six personnes, tous les membres échangent des lettres avec exactement trois autres membres. Montrer que la communauté peut être divisée en deux sous-groupes (non vides) tels que chaque membre échange des lettres avec au moins deux personnes du groupe auquel il appartient.

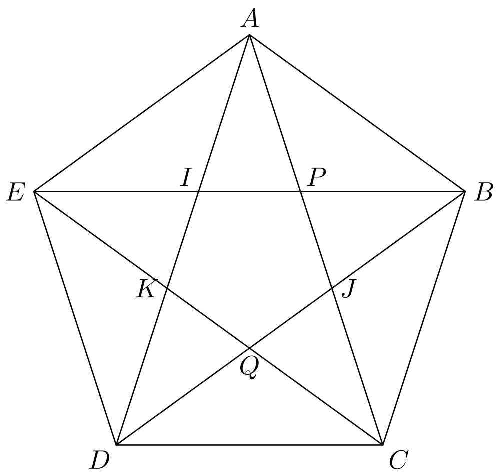
Exercice 48. Est-il possible de placer cent sphères dans l'espace de telle sorte qu'elles ne se chevauchent pas mais que chacune d'entre elles touche au moins un tiers des autres.

Exercice 49. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. On suppose qu'il existe un point P intérieur à $ABCD$ tel que les triangles ABP, BCP, CDP et DAP aient même aire. Prouver qu'une des diagonales du quadrilatère coupe l'autre en son milieu.

Exercice 50. On projette le cercle inscrit d'un triangle ABC sur chacun de ses trois côtés. Montrer que les six points délimitant les trois segments obtenus sont cocycliques.

2 Solutions des élèves

Solution de l'exercice 1 (par Sarah Diot-Girard).



Les aires des triangles EKI, AIP, PBJ, JCQ, PDK et KPQ sont égales. Notons A leur valeur commune. De même notons B la valeur commune des aires des triangles IPK et PJQ. L'étoile a pour aire $6A+2B$, et le trapèze $3A+B$, c'est-à-dire la moitié de celle de l'étoile. L'aire du trapèze est donc $\frac{1}{2}$.

Solution de l'exercice 4 (par Agathe Benoît). Soient a, ka, k^2a et k^3a quatre de ces nombres. Supposons que k est différent de 1 et -1. Si l'on considère a, ka et k^3a, et que l'on cherche un quatrième nombre formant une progression géométrique avec eux, celui-ci devra valoir k^2a. De même si l'on considère a, k^2a et k^3a, le quatrième nombre devra valoir ka. Il est donc impossible d'avoir cinq nombres distincts formant quatre à quatre des progressions géométriques.

Dans le cas où $k=-1$, les nombres valent tous a et $-a$. Mais si l'on en choisit quatre parmi ceux-ci, on n'aura pas forcément le même nombre de a et de $-a$ et donc pas de progression géométrique.

Il ne reste plus que le cas où $k=1$. Les nombres sont donc tous égaux et valent 2005.

Solution de l'exercice 11 (par Thomas Chartier, Benoît Seguin). Les hypothèses fournissent directement $BC = 2AB$ et $\widehat{ABC_1} = \widehat{ABC} = \widehat{CBA_1}$. Comme B, C_1 et A sont alignés, il vient $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$. Dans le triangle ABC, l'angle en $\hat{B}$ vaut $\frac{\pi}{3}$ et l'un des côtés adjacents à cet angle vaut le double de l'autre. Cela implique que l'angle opposé au côté le plus grand, en l'occurrence $\hat{A}$, est droit. L'angle $\hat{A}_1$ est également droit puisqu'il est obtenu comme symétrique de $\hat{A}$.

Solution de l'exercice 13 (par Robin Ngi, Jill-Jênn Vie). Soit $x = AB = BC = AC$. L'aire de ABP vaut $\frac{3x}{2}$, celle de BPC vaut $\frac{4x}{2} = 2x$, celle de CPA vaut $\frac{5x}{2}$. L'aire de ABC vaut, d'une part, $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$, et d'autre part, $\frac{3x}{2} + 2x + \frac{5x}{2} = 6x$. En résolvant l'équation, on obtient $x = 8\sqrt{3}$, et l'aire de ABC est donc $48\sqrt{3}$.

Solution de l'exercice 15 (par Benoît Seguin). Montrons tout d'abord que tout pour n, $f(n) \leq f(n+2)$. Supposons par l'absurde qu'il existe un entier n tel que $f(n) > f(n+2)$. Alors on a $f(n) + f(n+1) > f(n+1) + f(n+2)$ d'où on déduit grâce à l'équation fonctionnelle $f(n+2)f(n+3) > f(n+3)f(n+4)$, puis $f(n+2) > f(n+4)$. On en déduit que la suite des $f(n+2k)$ est strictement décroissante, ce qui est impossible.

Une reformulation de la propriété précédente stipule que les suites $f(2k)$ et $f(2k+1)$ sont croissantes. Supposons à présent que l'on ait simultanément $f(n) < f(n+2)$ et $f(n+1) < f(n+3)$. On montre alors, comme précédemment, que la suite des $f(n+2k)$ est strictement croissante. Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} f(n+3) &= f(n+4)f(n+5) - 168 - f(n+2) \\ &= f(n+5)f(n+6) - 168 - f(n+4) \end{aligned}$$

d'où on déduit :

$$f(n+2) = f(n+4) - f(n+5)[f(n+6) - f(n+4)]. \tag{V.1}$$

Comme on sait que $f(n+6) > f(n+4)$, il vient $f(n+4) > f(n+5)$. De même en utilisant l'autre hypothèse on obtient $f(n+5) > f(n+6)$, et cela contredit $f(n+4) \leq f(n+6)$. Ainsi l'une des deux éventualités $f(n) = f(n+2)$ et $f(n+1) = f(n+3)$ se produit.

L'équation (V.1) prouve alors que soit la suite $f(2k)$, soit la suite $f(2k+1)$ est constante. Supposons que ce soit la première (l'autre cas de traite pareil) et notons a cette valeur. L'équation fonctionnelle donne alors pour tout k :

$$a + f(2k+1) = af(2k+1) - 168$$

et donc $f(2k+1)$ est aussi constante. La dernière équation permet alors de trouver toutes les valeurs possibles. Au final, il y a trois fonctions solutions : la fonction constante égale à 14, la fonction qui vaut 2 sur les pairs et 170 sur les impairs et finalement la fonction qui vaut 170 sur les pairs et 2 sur les impairs.

<u>Solution de l'exercice 17</u> *(par Mathieu Finas).* Montrons que le nombre est irrationnel. Pour cela, il suffit de prouver que son écriture décimale n'est pas périodique (même à partir d'un certain rang). Or, on constate sans difficulté qu'à la fin de $(10n)!$, il y a au moins n zéros (puisque pour calculer $(10n)!$ on multiplie n fois par un multiple de 10). Ainsi s'il y avait une période, la partie qui se repète ne pourrait être constituée que de 0, et donc la partie décimale du nombre devrait être nulle à partir d'un certain rang. Mais cela n'est manifestement pas le cas. D'où la contradiction et l'irrationalité.

<u>Solution de l'exercice 19</u> *(par Bao-Anh Dang-Vu).* On a l'égalité $3(14n+3) - 2(21n+4) = 1$ qui prouve que les nombres $14n+3$ et $21n+4$ sont toujours premiers entre eux et donc que la fraction $\frac{21n+4}{14n+3}$ est toujours irréductible.

<u>Solution de l'exercice 20</u> *(par Samuel Bach, Samuel Collin).* Comme il y a un nombre impair de a_i, il ne peut pas y avoir le même nombre d'a_i pairs que d'a_i impairs. Comme les b_i sont une permutation des a_i, au moins un couple (a_i, b_i) est formé de deux nombres de même parité. Pour ce couple, la différence $a_i - b_i$ est paire. Le produit de l'énoncé est donc également pair (puisqu'un de ses facteurs est pair)

<u>Solution de l'exercice 21</u> *(par David Fourquet).* Montrons que des tels entiers n'existent pas. On raisonne par l'absurde en supposant que l'on dispose d'une égalité :

$$x_1^2 + \cdots + x_{14}^2 = 1599.$$

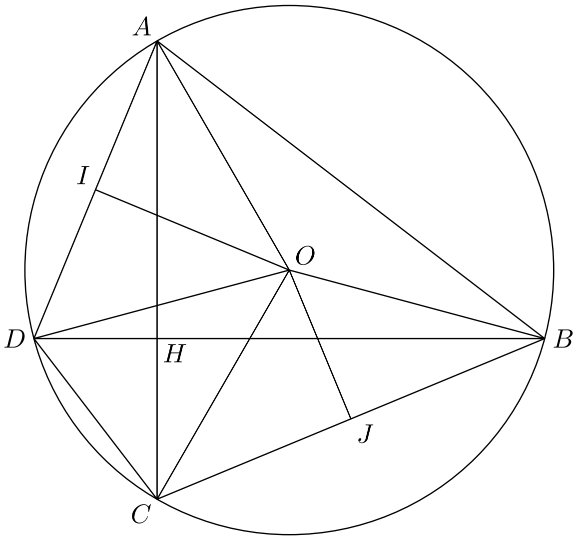
Modulo 16, on vérifie que l'on a toujours x^4 congru à 0 ou 1. L'égalité précédente impliquerait donc que 1599 est congru à un élément de l'ensemble $\{0, \ldots, 14\}$ modulo 16. Or ce n'est pas le cas puisqu'il est congru à 15.

<u>Solution de l'exercice 22</u> *(par David Fourquet, Mathieu Voland).* On a les inégalités suivantes :

$$31^{11} < 32^{11} = 2^{55} < 2^{56} = 16^{14} < 17^{14}$$

<u>Solution de l'exercice 2003</u> *(par Coline Wiatrowski, Guillaume Barraquand, Arnaud Dumas).* Appelons a_i l'aire de la i-ième figure et b_i l'aire de son complémentaire. On a évidemment $b_i = 1 - a_i$, et donc la somme des b_i est strictement inférieure à 1. Il en résulte que la réunion des complémentaires ne peut recouvrir tout le carré. Un point non recouvert est alors un point de l'intersection des figures.

<u>Solution de l'exercice 24</u> *(par Benoît Seguin).*



Par la propriété des angles inscrits, on a $\widehat{AOD} = 2\widehat{ABD}$ et donc $\widehat{IOA} = \widehat{ABD}$. De même $\widehat{COJ} = \widehat{CAB} = \frac{\pi}{2} - \widehat{ABD}$. On en déduit $\widehat{IOA} = \frac{\pi}{2} - \widehat{OJC} = \widehat{OCJ}$ puis que les triangles IOA et JCO sont semblables. Comme on a en outre $OA = OC$, ils sont isométriques et $CJ = IO$, ce qui permet de conclure.

<u>*Solution de l'exercice 25*</u> *(par Coline Wiatrowski).* Pour tout i, posons $y_i = x_i - 1 \geq 0$. On a :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n - x_1 x_2 \cdots x_n &= n + y_1 + y_2 + \cdots + y_n - (1 + y_1 + y_2 + \cdots + y_n + A) \\ &= n - 1 - A \end{aligned}$$

où A s'exprime comme une somme de produits dont les facteurs sont des y_i et donc est positif.

<u>*Solution de l'exercice 26*</u> *(par Guillaume Barraquand, Arnaud Dumas).* On montre par récurrence la propriété plus forte :

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \leq 3 - \frac{3}{2^n}.$$

On vérifie facilement que l'inégalité est vraie pour $n = 1$. Supposons le résultat vrai pour l'entier n. On a :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) &\leq \left(3 - \frac{3}{2^n}\right)\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \\ &= 3 - \frac{3}{2^{n+1}} - \frac{3}{2^{2n+1}} \leq 3 - \frac{3}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

ce qui démontre l'hérédite et conclut.

<u>*Solution de l'exercice 30*</u> *(par Samuel Collin, Benoit Seguin).* Soient $x > y$. On a donc $f(x) - f(y) \geq x - y > 0$. La fonction f est donc strictement croissante. Le plus petit élément de A ne peut alors s'envoyer que sur lui-même : en effet, si tel n'était pas le cas, on n'aurait plus assez de place pour attribuer une image au plus grand élément. On détermine ensuite de la même façon l'image du deuxième plus petit élément de A et ainsi de suite. Au final, f est bien l'identité.

<u>*Solution de l'exercice 31*</u> *(par Guillaume Barraquand, Agathe Benoît).* Les entiers de la suite qui font intervenir 5^n comme plus grande puissance de 5 sont au nombre de 2^n : en effet, ces entiers sont naturellement en bijection avec les parties de $\{0, \ldots, n-1\}$. On déduit de ce qui précède qu'il y a $127 = 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^6$ entiers dans la suite qui ne font intervenir que des puissances

inférieures à 5^6. Comme $127 + 2^7 > 167$, la plus grande puissance qui intervient dans le nombre recherché est 5^7.

De même, il existe $31 = 2^0 + \cdots + 2^4$ nombre commençant par 5^7 et ne faisant pas intervenir les puissances 5^6 et 5^5. On en déduit que la deuxième puissance qui intervient dans le nombre recherché est 5^5. En poursuivant le raisonnement, on trouve au final le nombre recherché : c'est $5^7 + 5^5 + 5^3 = 81375$.

Remarque. On peut remarquer (sans doute plus simplement) que le n-ième nombre de la suite s'obtient en écrivant n en base 2 et en lisant la suite de chiffres obtenue en base 5...

Solution de l'exercice 34 (par Mathieu Finas). Considérons les vingt-cinq nombres : $a_1 = 0$, $a_2 = 2,01$, $a_3 = 4,02$, $\ldots$, $a_{25} = 48,24$. L'écart entre chacun de ces nombres est strictement supérieur à la longueur d'un intervalle. Ils se trouvent donc chacun dans un intervalle qui ne rencontre aucun des vingt-quatre autres.

Solution de l'exercice 35 (par Samuel Bach, Thomas Chartier). On rappelle l'inégalité $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$. Pour cet exercice, elle donne :

$$\sin x_1 \cos x_2 + \cdots + \sin x_n \cos x_1 \leq \frac{\sin^2 x_1 + \cos^2 x_2}{2} + \cdots + \frac{\sin^2 x_n + \cos^2 x_1}{2} = \frac{n}{2}.$$

D'autre part, on vérifie sans mal que cette dernière valeur est atteinte lorsque tous les x_i valent $\pi/4$.

Solution de l'exercice 38 (par David Fourquet). En faisant « $x = 1$ », on obtient directement $P(2) = 0$. De même en remplaçant x par 16, il vient $P(16) = 0$. Par suite, en donnant les valeurs 2 et 4 à x, on obtient $P(4) = P(8) = 0$. Ainsi le polynôme P s'écrit sous la forme :

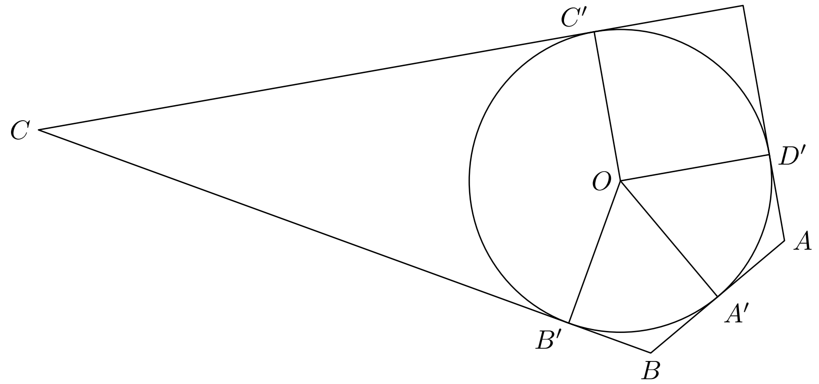
$$P(x) = (x-2)(x-4)(x-8)(x-16)Q(x)$$

pour un certain polynôme Q. Mais par ailleurs, en comparant les termes de plus haut degré de P, il n'est pas difficile de voir que s'il n'est pas nul, P est forcément de degré 4. Finalement les solutions sont les polynômes de la forme :

$$P(x) = \lambda(x-2)(x-4)(x-8)(x-16)$$

où λ est un nombre réel. (On vérifie aisément que ces polynômes conviennent.)

Solution de l'exercice 39 (par Thomas Chartier). Notons A', B', C' et D' les projetés respectifs de O sur AB, BC, CD et DA.



Les points O, D', A et A' sont situés sur le cercle de diamètre $[OA]$ et donc par la propriété des angles inscrits, on a $\widehat{A'OD'} = \frac{\pi}{3}$ puis $\widehat{AOD'} = \frac{\pi}{6}$. La trigonométrie dans le triangle rectangle OAD' fournit alors $AD' = r \tan \frac{\pi}{6}$ où r désigne le rayon du cercle inscrit. De même, on détermine tous les angles en O et toutes les longueurs des segments tangents au cercle. Écrivons simplement celles qui nous intéressent :

$$\begin{aligned} AD &= AD' + DD' = r\left(\tan\frac{\pi}{6} + \tan\frac{\pi}{4}\right) = r\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 1\right) \\ BC &= BB' + CB' = r\left(\tan\frac{\pi}{6} + \tan\frac{5\pi}{12}\right) = r\left(\frac{4\sqrt{3}}{3} + 2\right). \end{aligned}$$

Finalement :

$$AD = \frac{AD}{BC} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

<u>*Solution de l'exercice 40*</u> *(par Samuel Bach, Samuel Collin).* On considère les sous-ensembles suivants de $\{0, 1, \ldots, 1997\}$:

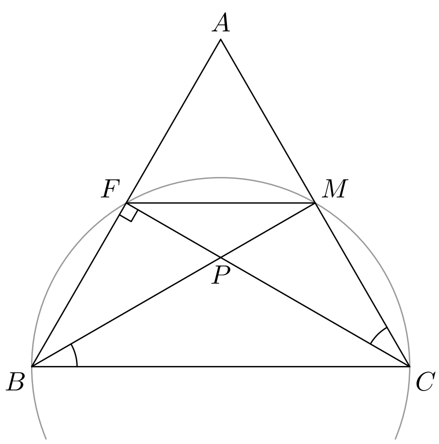
$$\{1024\}, \{1023, 1025\}, \{1022, 1026\}, \ldots, \{52, 1996\},$$

$$\{32\}, \{31, 33\}, \{30, 34\}, \ldots \{13, 51\}, \{12, 4\}, \{11, 5\}, \{10, 6\}, \{9, 7\}, \{8\}, \{2\}.$$

Ils sont au nombre de 999 et donc nécessairement l'un d'entre eux est totalement inclus dans A. Il ne reste qu'à constater que chacun de ces sous-ensembles est soit un singleton formé d'une puissance de 2, soit un doubleton dont la somme de deux éléments fait une puissance de 2.

<u>*Solution de l'exercice 41*</u> *(par Thomas Chartier).* On découpe de disque en quatre secteurs égaux. Si deux points sont dans le même secteur, leur distance est forcément inférieure à $\sqrt{2}$. Supposons maintenant que chaque secteur contient un des quatre points. On trace alors le diamètre passant par l'un de ces points, que l'on note A. On appelle C le point du secteur opposé. Si C est sur ce diamètre, le point d'un troisième secteur est à une distance inférieure à $\sqrt{2}$ de A ou de C. Sinon, l'un des deux points restants est à une distance inférieure à $\sqrt{2}$ de C.

<u>*Solution de l'exercice 45*</u> *(par Jill-Jênn Vie).* Voici la figure :



Le triangle AFC est rectangle en F donc $FM = MA = MC$ et FMC est isocèle en M. On en déduit $\widehat{MFC} = \widehat{MCF} = \widehat{MBC}$. Donc les points M, F, B et C sont cocycliques. On en déduit que l'angle $\widehat{BMC}$ est droit. Dans le triangle ABM, la droite (BM) est à la fois hauteur et médiane, donc ce triangle est isocèle en B. Par ailleurs, la cocyclicité nous donne aussi $\widehat{FBM} = \widehat{FCM}$. Comme par hypothèse, $BM = CF$, les triqngles ABM et ACF. Donc $AB = AC$, d'où le résultat.

Dès que Rome a cessé de respecter les règles qui l'ont vue naître, elle a péri.

Montesquieu

Activité VI

Les vacances : or et tournesol

Un exposé culturel et éducatif, donnée par Sandrine HENRI[1] est venu ponctuer ce stage. Ci-joint un compte rendu retrançant de façon très fidèle les grandes lignes de l'intervention.

Avez-vous déjà observé de près une belle fleur de tournesol ? Vous êtes vous déjà émerveillé devant l'harmonie parfaite de son organisation, devant la disposition admirable de ses graines ? Ne vous-êtes vous pas demandé comment la nature pouvait créer une structure aussi idéale ?

Les graines de tournesol sont organisées sous forme de spirales, dans les deux sens. Cette disposition n'est pas due au hasard. Elle dépend en effet d'un nombre particulier, le nombre d'or, qui intervient dans de nombreuses autres espèces de la nature, animales ou végétales.

Ce nombre a également été beaucoup utilisé dans l'art et l'architecture. Les Grecs anciens considéraient ce nombre comme la proportion idéale.

Dans une première partie, on étudiera quelques-unes des nombreuses propriétés mathématiques du nombre d'or.

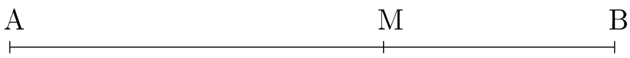
Puis on verra comment ce nombre peut intervenir dans la disposition des graines de tournesol.

1 Nombre d'Or, suite de Fibonacci : propriétés mathématiques

1.1 Nombre d'Or

Définition

Historiquement, le nombre d'or est défini comme le rapport qui divise un segment en « moyenne extrême raison ». C'est à dire que, si on a un segment $[AB]$, on cherche à placer le point M tel que $\frac{AB}{AM} = \frac{AM}{BM}$:



Le rapport $\frac{AB}{AM} = \frac{AM}{MB}$ a pour valeur $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ce nombre est appelé *nombre d'or* et est noté φ

Démonstration : Par hypothèse $\frac{AB}{AM} = \frac{AM}{MB}$, ou encore $AM^2 = AB \times MB$. De $AB = AM + MB$, on tire $AM^2 = (AM + MB)MB = AM \times MB + MB^2$ puis en divisant par MB^2 :

$$\frac{AM^2}{MB^2} = \frac{AM}{MB} + 1.$$

[1] Élève entrant en math spé. Cet exposé était son sujet de TPE de terminale.

Posons $x = \frac{AM}{MB}$. Il est solution de l'équation $x^2 = x+1$ qui présente les deux solutions suivantes :

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

La solution $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ est négative, il ne reste donc que $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Rectangle d'Or

Le *rectangle d'or* est un rectangle dont les proportions sont celles du nombre d'or : $\frac{\text{longueur}}{\text{largeur}} = \varphi$. Ce rectangle a le propriété suivante : si on en retire un carré, le rectangle restant est également un rectangle d'or (Figure 1).

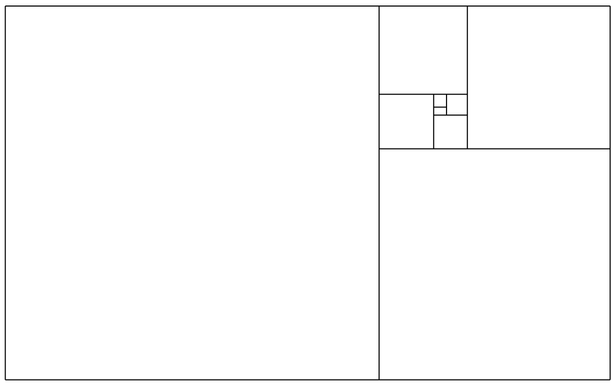


FIG. 1 – Rectangle d'Or

Cette propriété peut être retrouvée directement avec la définition du nombre d'or (voir 1.1 page précédente). En effet, on peut considérer que la longueur du rectangle est égale à AB, et sa largeur à AM. Le rectangle restant après avoir enlevé un carré a alors pour longueur AM et pour largueur $AB - AM = BM$. On retrouve bien $\frac{AB}{AM} = \frac{AM}{MB} = \varphi$

Spirale d'or

La *spirale d'or* est une spirale logarithmique. Elle est inscrite dans le rectangle d'or (figure 2 page ci-contre). On peut en obtenir une approximation en traçant des quarts de cercles dans chaque carré.

1.2 Suite de Fibonacci

Formule de la suite de Fibonacci

La *suite de Fibonacci* a pour formule récurrente :

$$\begin{cases} f_0 = 0\,;\ f_1 = 1 \\ f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \end{cases}$$

Les premiers termes de cette suite sont donc : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, *etc.*

Cette suite peut également s'écrire sous la forme :

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

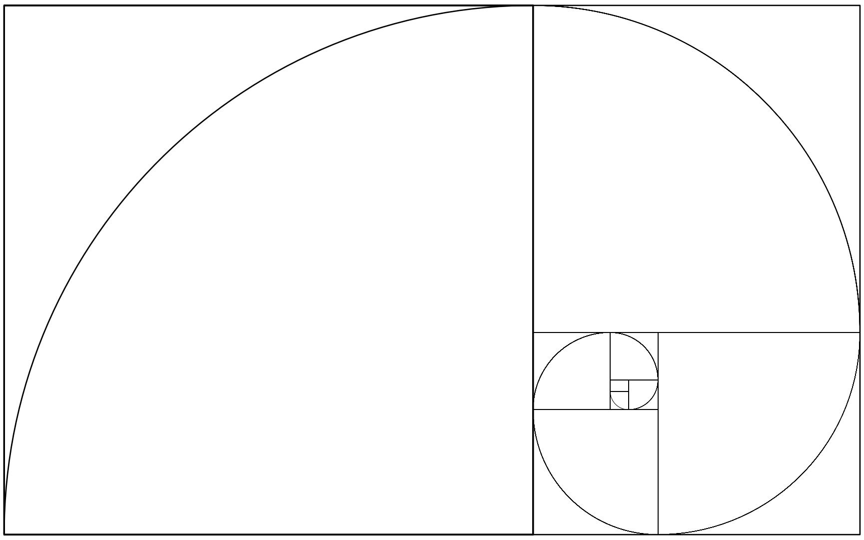


FIG. 2 – Spirale d'Or

Nous allons le démontrer par récurrence. On pose $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\bar{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Ce sont les solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$, et donc $\bar{\varphi} \times \varphi = -1$ et $\bar{\varphi} + \varphi = 1$. On vérifie que la propriété est vraie pour les rangs $n = 0$ et $n = 1$. Supposons qu'elle le soit aux rangs n et $n-1$, et montrons qu'elle est alors vraie au rang $n+1$. On a :

$$f_n = \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} - \frac{\bar{\varphi}^n}{\sqrt{5}} \qquad \text{et} \qquad f_{n-1} = \frac{\varphi^{n-1}}{\sqrt{5}} - \frac{\bar{\varphi}^{n-1}}{\sqrt{5}}$$

et donc comme φ et $\bar{\varphi}$ sont les solutions de l'équation $x^2 = x+1$, et par suite vérifient $\varphi + 1 = \varphi^2$ et $\bar{\varphi} + 1 = \bar{\varphi}^2$, il vient :

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= f_n + f_{n-1} \\ &= \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} - \frac{\bar{\varphi}^n}{\sqrt{5}} + \frac{\varphi^{n-1}}{\sqrt{5}} - \frac{\bar{\varphi}^{n-1}}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^{n-1}(\varphi+1)}{\sqrt{5}} - \frac{\bar{\varphi}^{n-1}(\bar{\varphi}+1)}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\varphi^{n-1} \times \varphi^2}{\sqrt{5}} - \frac{\bar{\varphi}^{n-1} \times \bar{\varphi}^2}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^{n+1}}{\sqrt{5}} - \frac{\bar{\varphi}^{n+1}}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

On a donc démontré que, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$f_n = \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} - \frac{\bar{\varphi}^n}{\sqrt{5}}.$$

Lien entre suite de Fibonacci et Nombre d'Or

Le rapport de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci tend vers φ. En effet,

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\varphi^{n+1} - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^{n+1}\right]}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\varphi^n - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n\right]} = \frac{\varphi^{n+1} - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^{n+1}}{\varphi^n - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n} = \frac{\varphi - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^{2n+1}}{1 - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^{2n}}$$

On a $\left|\frac{-1}{\varphi}\right| < 1$ donc $\left(\frac{-1}{\varphi}\right)^{2n}$ et $\left(\frac{-1}{\varphi}\right)^{2n+1}$ tendent vers 0. Finalement :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \varphi.$$

Fractions continues

Tout nombre peut s'écrire sous la forme d'une fraction continue. Le principe est le suivant : on note $[x]$ la partie entière d'un nombre x et $\{x\}$ sa partie décimale. On a donc $x = [x] + \{x\}$ On peut considérer $[x]$ comme une première approximation de x, $\{x\}$ étant plus petit que 1. On essaie ensuite d'approcher $\{x\}$. On considère son inverse, $x_1 = \frac{1}{\{x\}}$. Comme pour x, on a $x_1 = [x_1] + \{x_1\}$. On a alors :

$$x \approx [x] + \frac{1}{[x_1]}$$

On continue ensuite sur le même principe...

Par exemple pour le nombre π :

$$\pi \approx 3 + 0,1459265...$$

On a $\frac{1}{0,1459265...} \approx 7,06251...$. On a donc une première approximation de π :

$$\pi \approx 3 + \frac{1}{7} \text{ soit } \pi \approx \frac{22}{7}$$

Cette approximation est d'ailleurs bien connue. En continuant ainsi, on obtient :

$$\pi \approx 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15}} \approx \frac{333}{106}$$

On peut continuer autant que l'on veut, pour obtenir des approximation de plus en plus précises. Les approximations successives que l'on obtient ainsi s'appellent les *réduites.*

Voici quelques propriétés des fractions continues. On ne démontrera pas ces propriétés qui sont en dehors du cadre de cet exposé, mais elles sont intéressantes à signaler :

1. Un nombre est rationnel si et seulement si son développement en fraction continue est fini.
2. Un nombre est solution d'une équation du second degré si et seulement si son développement est périodique.

Développons le nombre φ en fraction continue. D'après la définition du nombre d'or, on a $\varphi^2 = \varphi + 1$ donc $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$. Le développement en fraction continue est alors tout simple :

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+...}}}$$

On peut constater que ce développement vérifie bien la propriété 2 : en effet il est périodique, or on sait que φ est solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

Il est ensuite intéressant de calculer les premières réduites. Ainsi on a :

$$1 = \frac{1}{1} \quad ; \quad 1 + 1 = \frac{2}{1} \quad ; \quad 1 + \frac{1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}} = \frac{5}{3} \quad ; \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}} = \frac{8}{5}$$

Les différents quotients trouvés ont pour dénominateur et numérateur deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci. Montrons par récurrence que c'est toujours le cas. Appellons φ_n la n-ième réduite. On chercher donc à démontrer que $\varphi_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$. On a vérifié ci-dessus la propriété au rang $n = 1$. Supposons la vraie au rang n, et montrons-là au rang $n + 1$. On a :

$$\varphi_{n+1} = 1 + \frac{1}{\varphi_n} = 1 + \frac{1}{\frac{f_{n+1}}{f_n}} = 1 + \frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{f_{n+1} + f_n}{f_{n+1}} = \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}}$$

ce qui conclut.

Ce résultat peut donner une idée peut-être plus instinctive du résultat trouvé au 1.2 page 81, dans lequel on démontre que le rapport de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci tend vers φ.

Rectangle de Fibonacci

Voici une manière géométrique de constater encore ce résultat. Le rectangle de Fibonacci (figure 3) ressemble en effet beaucoup au rectangle d'or. Le principe de construction est pourtant différent : on commence par tracer côte à côte deux petits carrés de côté 1. Puis on trace le long de ces carrés, un carré qui sera de côté $1 + 1 = 2$... Ensuite on continue sur le même principe en traçant le carré de côté 3, puis de côté 5... La longueur du côté de chaque carré sera un terme de la suite de Fibonacci, puisque elle sera égale à la somme des longueurs des côtés des deux carrés précédents.

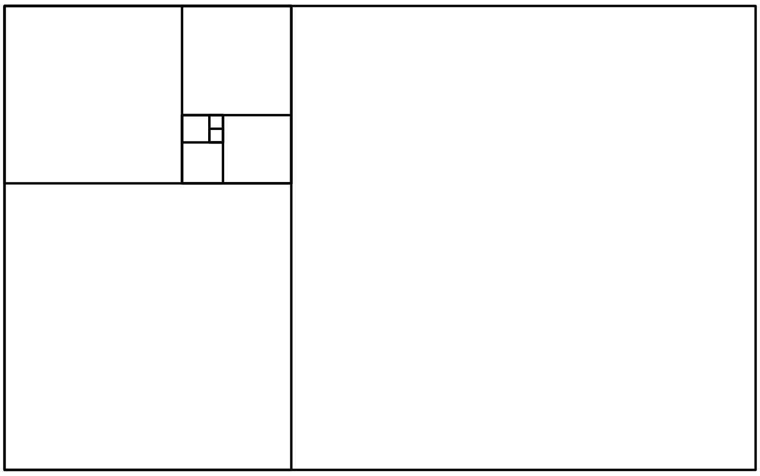


FIG. 3 – Rectangle de Fibonacci

Plus on ajoute de carrés, et plus ce rectangle sera proche d'un rectangle d'or. De la même façon, on peut aussi tracer un demi-cercle dans chaque carré, pour obtenir une spirale appellée tout naturellement spirale de Fibonacci ! Là encore, cette spirale est d'autant plus proche de la spirale d'or que l'on construit de carrés. (figure 4)

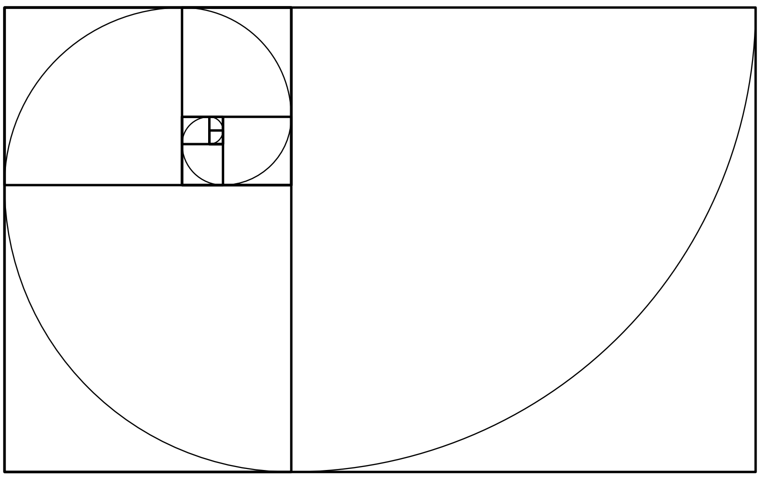


FIG. 4 – Spirale de Fibonacci

2 Le tournesol : une structure organisée

2.1 Intervention du nombre d'or dans la nature

Le nombre d'or intervient dans de nombreuses espèces, animales et végétales. Ainsi, chez la plupart des végétaux, l'organisation des feuilles autour de la tige dépend de la suite de Fibonacci. En effet, si on observe, le long d'une tige, le nombre de feuilles rencontrées avant d'en trouver une alignée verticalement avec la première, on retrouve toujours les mêmes nombres : 2, 3, 5, 8, *etc.* Ce sont des termes de la suite de Fibonacci !

Ce n'est pas tout. Si on compte le nombre de tours réalisés autour de la tige, c'est aussi un terme de la suite de Fibonacci.

La figure 5 montre l'organisation d'une plante ayant un cycle de 5 feuilles, les feuilles étant numérotées par ordre d'apparition (la première est la plus vieille). On constate que 2 tours sont réalisés autour de la tige avant de retrouver une feuille dans l'axe de la première.

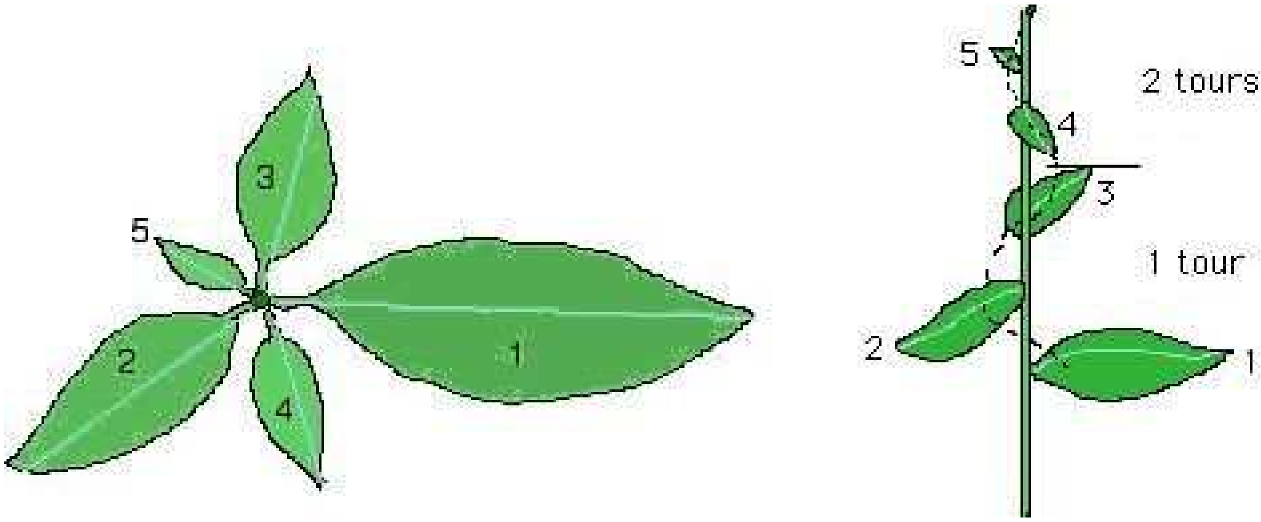


FIG. 5 – Organisation des feuilles d'un végétal

Par exemple, l'orme et le tilleul ont un cycle de 2 feuilles, pour 1 tour autour de la tige. Pour le noisetier, le hêtre et le mûrier, on trouve un cycle de 3 feuilles. D'autres arbres comme le chêne, le pommier ou le prunier sont organisés comme l'exemple de la figure 5, avec 5 feuilles pour 2 tours. On a 8 feuilles et 3 tours pour le peuplier, le rosier, le poirier ou le saule. On arrive même à 13 feuilles et 5 tours pour l'amandier. On retrouve bien à chaque fois les termes de la suite de Fibonacci.

En ce qui concerne l'organisation des graines, comme le problème qui nous intéresse chez le tournesol, il est important de signaler que d'autres végétaux réagissent de la même façon. C'est le cas de la pomme de pin, de l'ananas et de la marguerite, notamment.

Mais on retrouve aussi le nombre d'or dans le monde animal. Il existe par exemple des coquillages, comme le Nautile, dont la coquille a la forme d'une spirale d'or.

Certains voient également le nombre d'or chez l'être humain : ainsi le nombril diviserait le corps humain selon le nombre d'or (c'est à dire que le rapport de la hauteur totale de l'être humain sur la hauteur du nombril serait égal au nombre d'or)... Ou bien encore que les rapports de la première phalange à la deuxième et de la deuxième à la troisième seraient aussi égaux au nombre d'or.

Cependant ces interprétations sont peut-être plutôt le fruit de l'imagination de ceux qui voudraient trouver le nombre d'or partout. En effet, quand on observe la nature, il suffit bien souvent de chercher un rapport pour le trouver.

En ce qui concerne la disposition des graines de tournesol, par contre, l'intervention du nombre d'or et de la suite de Fibonacci est bien réelle... Mais elle est plutôt la conséquence de l'organisation bien particulière de ces graines que la cause...

2.2 L'organisation des graines du tournesol

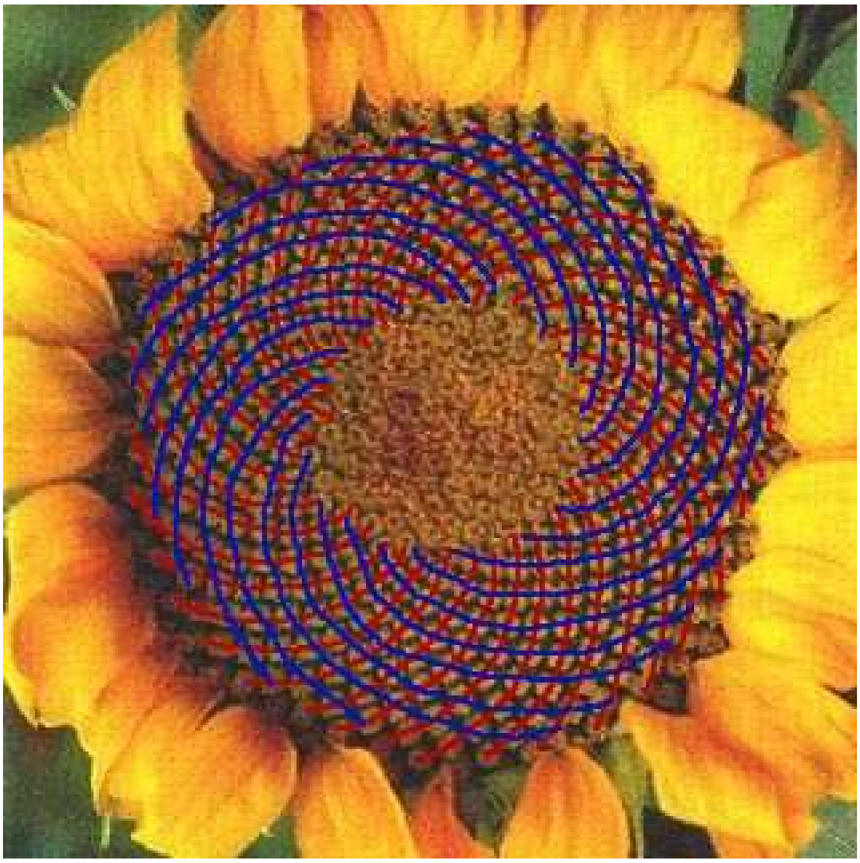


FIG. 6 – Parastiches du tournesol

Lorsque l'on regarde une fleur de tournesol, on remarque tout de suite la disposition régulière de ses graines. On observe en effet une organisation en spirales tournant dans un sens et dans l'autre.

L'étude de ces spirales végétales, appelées *parastiches* a pour nom la *phyllotaxie*.

Si l'on compte, chez un certain nombre de tournesols différents, le nombre de parastiches dans un sens et dans l'autre, le résultat est assez surprenant : on obtient parfois 34 parastiches dans un sens, et 55 dans l'autre, d'autres fois 55 spirales dans un sens et 89 dans l'autre. Parfois, plus rarement, 89 dans un sens et 144 dans l'autre. Mais, de toute façon, dans la grande majorité des cas, le nombre de parastiches dans un sens et dans l'autre seront deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci !

Ainsi, sur la photo 6, on compte 34 parastiches dans un sens et 21 dans l'autre.

Deux scientifiques français, Stéphane Douady et Yves Couder, se sont intéressés à cette question et ont conçu une simulation, permettant de reconstituer la croissance d'un tournesol.

Lors de l'apparition des graines, celles-ci se positionnent de manière à être le plus éloigné possible des graines déjà en place. Les graines apparaissent à la périphérie de l'apex, une zone située au bout de la tige de la fleur. Un première graine fera son apparition, puis la deuxième graine se placera ainsi diamétralement opposée à la première par rapport à l'apex. Parallèlement à cette apparition des graines au niveau de l'apex, il existe une croissance des graines déjà en place qui s'éloignent radialement de l'apex. La troisième graine trouvera une position d'équilibre entre les deux premières, avec un angle dépendant du déplacement de chacune des deux graines, donc plus généralement de la vitesse de croissance des graines. (voir figure 7)

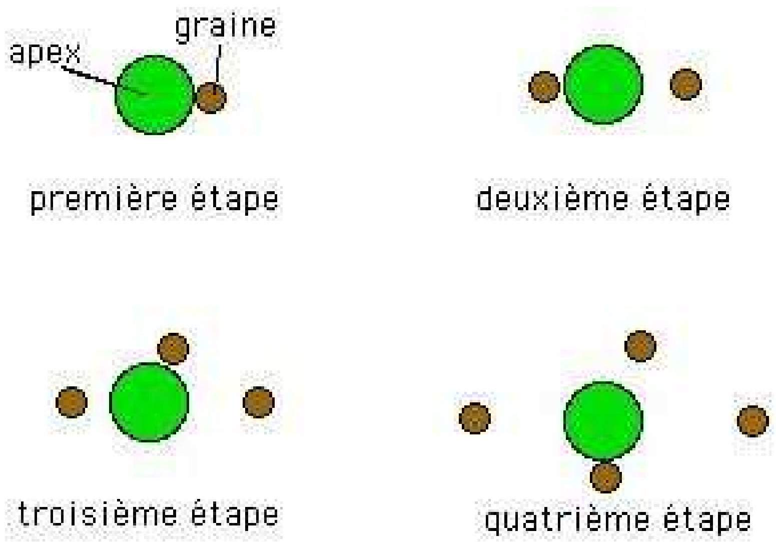


FIG. 7 – Apparition des premières graines

C'est cette vitesse de croissance qui intervient aussi dans la disposition des feuilles autour de la tige, et qui est la cause des différentes dispositions selon les espèces.

En ce qui concerne les graines du tournesol, la vitesse est telle que les graines ont besoin chacune de la place maximale. Les graines poussent donc de manière à s'éloigner des autres et plus il y a de graines, plus l'angle qu'une graine forme avec la précédente sera proche de l'angle d'or (voir ci-dessous), qui représente la disposition optimale.

La simulation de Douady et Couder repose sur un principe de magnétisme. Elle consiste à déposer régulièrement des gouttes de liquide ferro-magnétique, au milieu d'une plaque soumise à un champ magnétique. Les gouttes aimantées se repoussent ainsi les unes des autres comme le font les graines du tournesol. En même temps, elles s'éloignent radialement, le champ magnétique dans lequel est placé la plaque étant d'autant plus important que l'on s'éloigne du centre.

Au cours de cette simulation, les gouttes se sont placées tout naturellement à la manière des graines de tournesol, en formant des spirales dans les deux sens. Le nombre de spirales étaient également deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci.

Cette expérience montre que c'est bien la répulsion des graines entre elles qui est à l'origine de leur disposition bien particulière.

L'angle d'or se définit d'une manière proche de celle du nombre d'or (voir 1.1 page 79). Lorsqu'on partage un cercle selon le rapport du nombre d'or, le cercle est divisé en deux angles d'environ $222,49^\circ$ et $137,51^\circ$. On a $\frac{360}{222,49} = \frac{222,49}{137,51} = \varphi$. L'angle d'or est le plus petit de ces deux angles, égal à $\frac{360}{\varphi^2} \approx 137,51^\circ$ (figure 8 page suivante)

Plus on aura de graines, plus l'angle entre deux graines consécutives sera proche de l'angle d'or.

Le fait que le nombre de spirales dans un sens et dans l'autre soient deux termes de la suite de Fibonacci est lié à la présence de cet angle d'or. Plus précisément, ceci est lié au fait que le rapport d'un terme sur le précédent est proche du rapport d'or (voir 1.2 page 81).

Pour se convaincre que l'angle entre deux graines consécutives par rapport à l'apex est bien l'angle d'or, on peut réaliser la figure suivante : dessiner, en partant de l'apex, des points représentant les graines, en plaçant chaque point par rapport au précédent :

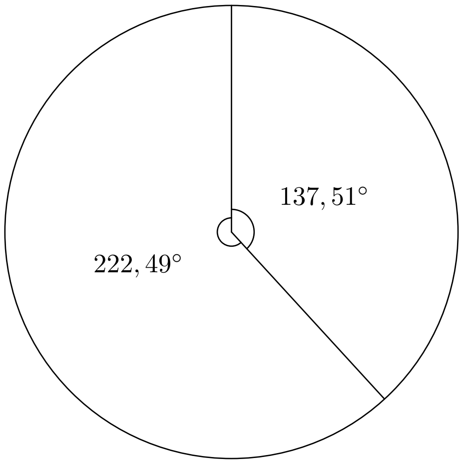


FIG. 8 – Angle d'or

– avec un angle égal à l'angle d'or par rapport au précédent
– légèrement plus éloigné de l'apex

La figure 9 page suivante est obtenue de cette manière. On constate que les points sont bien disposés comme les graines d'un tournesol, des spirales apparaissent nettement. La spirale représentée en gras représenterait une parastiche du tournesol complet, tandis que la spirale « fine » représente une parastiche d'un tournesol moins développé, s'arrêtant à l'agrandissement. C'est la raison pour laquelle un tournesol plus petit semble avoir moins de parastiches qu'un tournesol plus grand.

Ainsi les spirales sont une sorte d'effet d'optique dû à la disposition des graines.

Mais cette modélisation ne reflète pas les réalités biologiques, puisque, comme nous l'avons dit, l'angle d'or est une conséquence de la disposition des graines et non une cause. Par contre elle donne effectivement l'impression que les graines essaient d'occuper le maximum de place possible.

3 Conclusion

Le nombre d'or, par l'intermédiaire de la suite de Fibonacci et de l'angle d'or, a donc bien son rôle à jouer dans la disposition des graines de tournesol, et plus généralement dans de nombreuses fleurs et plantes. Ainsi, les mathématiques, qu'on accuse souvent d'être trop abstraites, sont en fait directement liées à beaucoup d'événements naturels, comme l'a remarqué le physicien Eugene Wigner, dans un article intitulé *La déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences de la nature*. En effet, les mathématiques interviennent dans la nature à toutes les échelles ; elles permettent aussi bien de prévoir les mouvements des planètes, que de fonder des théories sur l'infiniment petit. Les mathématiques sont un outil créé par l'homme pour expliquer le monde extérieur, et elles se révèlent très utiles.

C'est pourquoi il est très important de savoir les apprivoiser et les utiliser.

4 Bibliographie

[1] Marius CLEYET-MICHAUD. *Le nombre d'or.* Que sais-je ? Presses Universitaires de France, Paris, 6e edition, 1973.

[2] J.M. KANTOR. Les nombres de Fibonacci. *Cosinus*, (numéro 5), Avril 2000.

[3] Olivier VOIZEUX. Un nombre plaqué or. *Sciences et Vie Junior*, (hors série), 1996.

[4] `http://tpe.tournesol.free.fr/`.

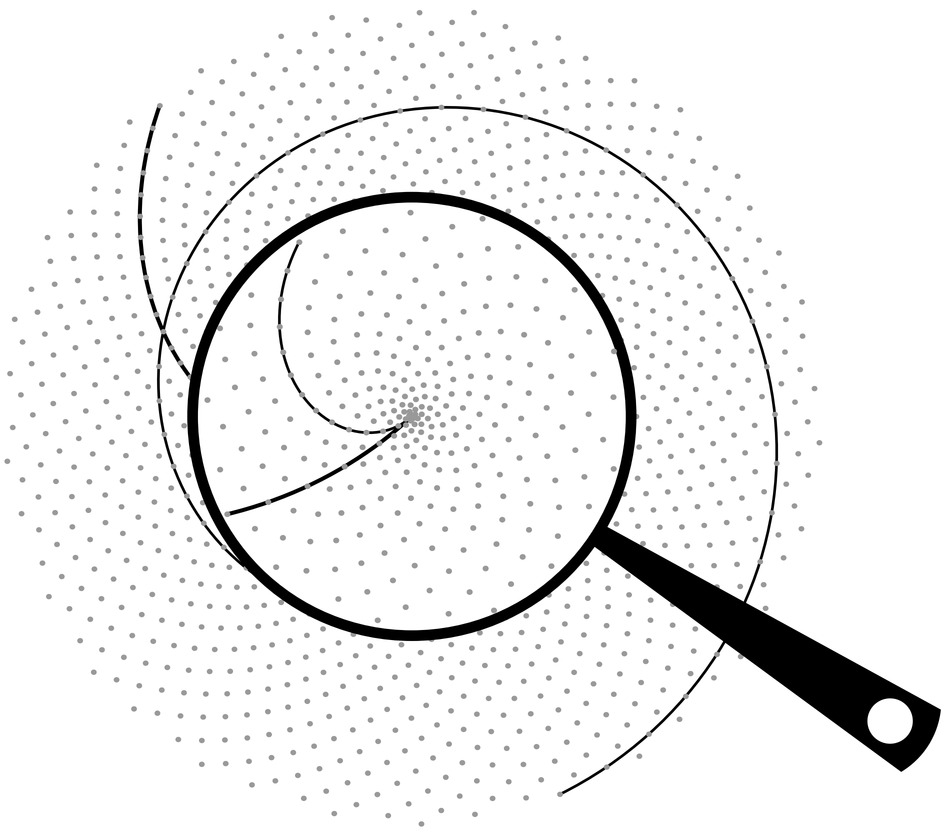


FIG. 9 – Répartition des graines à différentes échelles

[5] http://www.mathcurve.com/courbes2d/logarithmic/spiraledor.shtml.

[6] http://co-creation.net/weid/forme/formes.htm.

[7] http://www.lenombredor.free.fr/nature.htm.