Stage olympique junior de Cachan 2010

Du 25 au 29 octobre 2010

Stage olympique junior de Cachan, octobre 2010

Avant-propos

Le stage de Cachan a été organisé par Animath.

Son objet a été de rassembler des collégiens et lycéens passionnés par les mathématiques et de les faire travailler sur des exercices en vue de les préparer aux Olympiades internationales de mathématiques.

Nous tenons à remercier le foyer de Cachan pour son excellent accueil.

Table des matières

A. Le trombinoscope

Les profs


Pierre Bornsztein


Sandrine Caruso


Igor Kortchemski


François Lo Jacomo


Ambroise Marigot

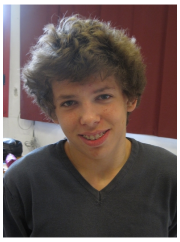

Jean-François Martin


Remi Varloot

Les élèves


Augustin Bariant


Arthur Blanc-Renaudie

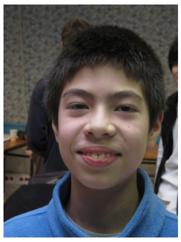

Jean Charloux


Raphaël Chédru


Jérôme Chevallier

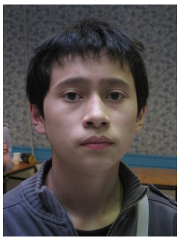

Victor Chiorean


Urvan Christen


Antoine Dupuis


Léonard Fleutot


Victor Gallois-Wong


Louis Garcia-Fernandez


Charles Gassot


Élise Habare


Maxime Lenormand


Cyril Letrouit


Lilia Martin


Arthur Nebout


Constance Olivier


Lucas Perotin


Auriane Perrin


Hélène Quach


Liyang Sun


Antoine Taliercio


Yiren Wang

B. Déroulement du stage

Le programme de la semaine est donné dans le tableau ci-dessous.

Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi
		Petit-déjeuner		
Accueil, exercices d'échauffement	Cours/TD de géométrie	Cours/TD de géométrie	Cours/TD d'algèbre	Test d'algèbre
		Déjeuner		
Cours/TD de géométrie	Cours/TD de géométrie	Test de géométrie	Cours/TD d'algèbre	Correction du test
		Goûter		
Temps libre	Temps libre	Temps libre	Visite de l'ENS de Cachan	
		Dîner		
Présentation d'Animath et des OIM	Exposé : qui a découvert le théorème de Pythagore ?	Correction du test	Temps libre	

En outre, lundi, mardi et mercredi, des exercices du jours étaient soumis à la sagacité des élèves.

C. Lundi 25 octobre (géométrie)

1 Exercices d'échauffement

1.1 Énoncés

Exercice 1. Un triangle a pour longueurs des côtés : 3, 4, 5. Calculer le rayon du cercle inscrit (cercle intérieur au triangle et tangent aux trois côtés du triangle).

Exercice 2. Soit $ABCD$ un trapèze, où (AB) et (CD) sont parallèles. On note Δ la droite passant par les milieux de $[AB]$ et $[CD]$. Montrer que les droites Δ, (AD) et (BC) sont concourantes ou parallèles.

Exercice 3. Soit $ABCD$ un rectangle, E et F les milieux des côtés $[AD]$ et $[DC]$. On appelle G l'intersection des droites (AF) et (EC). Montrer que les angles $\widehat{CGF}$ et $\widehat{FBE}$ sont égaux.

Exercice 4. Soient cinq nombres $a < b < c < d < e$.

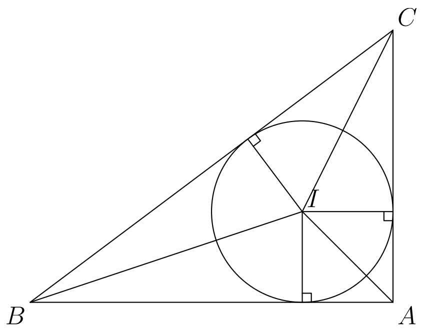
a) Combien de sommes deux à deux peut-on former ?

b) Ces dix sommes sont $21, 26, 35, 40, 49, 51, 54, 60, 65, 79$. Trouver a, b, c, d, e.

Exercice 5. Soit a, b, c, d des nombres positifs tels que $a + b + c + d = 4$. Montrer que $ab + bc + cd + da \leqslant 4$.

1.2 Solutions

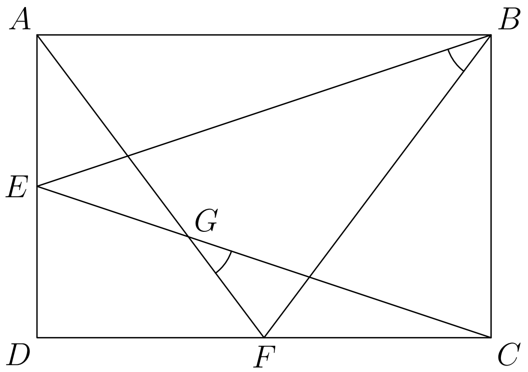
Solution de l'exercice 1. Soit r le rayon du cercle inscrit. On commence par faire une figure.



Le triangle ABC de côtés de longueurs $3, 4, 5$ est un triangle rectangle. On peut calculer sa surface S de deux manières différentes : d'une part, $S = \frac{4\times 3}{2} = 6$, d'autre part, S est la somme des surfaces des triangles IAB, IAC et IBC. L'aire du triangle IAB est $\frac{r\times AB}{2} = 2r$, celle du triangle IAC est $\frac{r\times AC}{2} = \frac{3}{2}r$, et celle du triangle IBC est $\frac{rAC}{2} = \frac{5}{2}r$. On en déduit que $6 = S = r \times (2 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2}) = 6r$ et donc que $r = 1$.

Solution de l'exercice 2. On raisonne dans le cas où les droites (AD) et (BC) ne sont pas parallèles. Le cas où elles sont parallèles se traite de la même façon. Soit I le point d'intersection de (AD) et (BC). Soit Δ' la droite passant par I et par le milieu de $[AB]$. D'après le théorème de Thalès, Δ' passe également par le milieu de $[DC]$. Ainsi, Δ et Δ' ont deux points communs et sont donc confondues. Donc Δ passe par I.

Solution de l'exercice 3. Faisons une figure.



L'angle $\widehat{FGC}$ est égal à $180° - \widehat{AFC} - \widehat{ECD}$, et on a $\widehat{AFC} = \widehat{AFB} + \widehat{BFC}$. Comme (AB) et (DC) sont parallèles, $\widehat{BFC} = \widehat{ABF}$. Par symétrie de la figure, on a, d'une part, $\widehat{ABE} = \widehat{ECD}$, et d'autre part, le triangle ABF est isocèle en F, ce qui entraîne que $\widehat{AFB} = 180° - 2 \times \widehat{ABF}$. Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}\widehat{FGC} &= 180° - \widehat{AFC} - \widehat{ECD} = 180° - \widehat{AFB} - \widehat{BFC} - \widehat{ECD} \\ &= 180° - 180° + 2 \times \widehat{ABF} - \widehat{ABF} - \widehat{ABE} = \widehat{ABF} - \widehat{ABE} = \widehat{EBF}.\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4. a) Le nombre de sommes que l'on peut former est égal au nombre de façons de choisir 2 éléments parmi 5, c'est-à-dire à $\frac{5\times4}{2} = 10$.

b) On a nécessairement $a + b = 21$, $a + c = 26$, $c + e = 65$ et $d + e = 79$. De plus, la somme de tous les nombres $21+26+35+40+49+51+54+60+65+79 = 480$ est égale à $4(a+b+c+d+e)$, d'où $a + b + c + d + e = 120$. On a $c = 120 - (a + b) - (d + e) = 120 - 21 - 79 = 20$. On en déduit que $a = 6$, $b = 15$, $e = 45$ et $d = 34$.

Solution de l'exercice 5. Remarquons que $ab + bc + cd + da = (a + c)(b + d)$. Notons $x = a + c$. Il s'agit maintenant de montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $x(4 - x) \leqslant 4$. Or, $x(4 - x) - 4 = 4x - x^2 - 4 = -(x - 2)^2 \leqslant 0$ pour tout x, d'où le résultat.

2 Cours et exercices

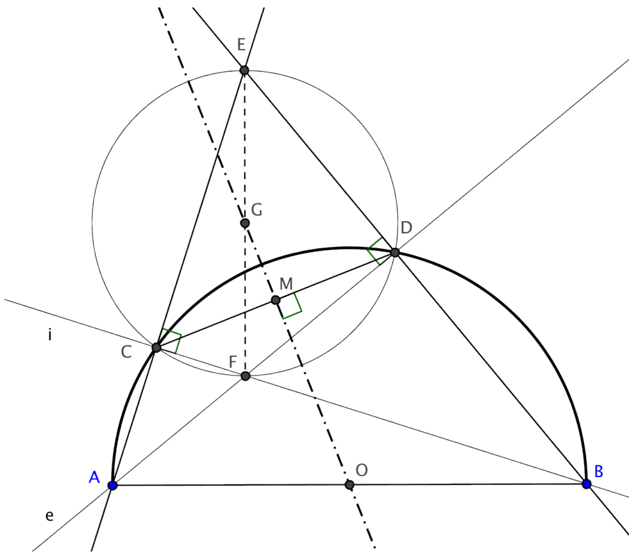
2.1 Rappels

La somme des trois angles d'un triangle est égale à 180°. On peut aussi énoncer ce résultat sous cette forme : si D est sur la droite (AB), avec D et A de part et d'autre de B, $\widehat{DBC} = \widehat{BAC}+\widehat{ACB}$.

Si un triangle ABC a deux côtés égaux, $AB = AC$, les deux angles opposés aux côtés égaux sont égaux : $\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$. Si un triangle ABC a deux angles égaux, $\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$, les deux cotés opposés aux angles égaux sont égaux : $AB = AC$. Un tel triangle est dit *isocèle*. Dans un triangle isocèle ABC tel que $AB = AC$, la même droite (l'axe de symétrie du triangle) est en même temps bissectrice intérieure, médiane et hauteur du triangle, donc médiatrice de $[BC]$.

On a $\widehat{ABC} = 90°$ si et seulement si le point B est sur le cercle de diamètre $[AC]$.

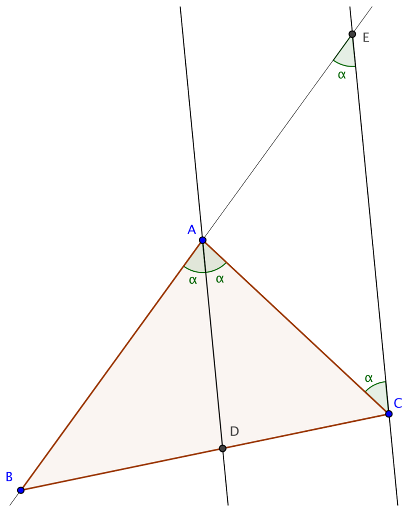
Exercice 1. Soient C et D deux points distincts d'un demi-cercle de diamètre $[AB]$. Les droites (AC) et (BD) se coupent en E, les droites (AD) et (BC) se coupent en F. Montrer que les milieux de $[AB]$, $[CD]$ et $[EF]$ sont alignés.



Solution de l'exercice 1. Une manière simple de montrer que trois points sont alignés consiste à prouver que la droite passant par deux d'entre eux passe par le troisième. Or le milieu du diamètre $[AB]$ est le centre O du demi-cercle contenant également C et D. Comme $OC = OD$, O est sur la médiatrice de $[CD]$, qui passe par le milieu M de $[CD]$, et les trois points sont alignés si et seulement si le milieu N de $[EF]$ est lui aussi sur la médiatrice de $[CD]$, donc si et seulement si $NC = ND$. Or C et D étant sur le demi-cercle de diamètre $[AB]$, $\widehat{ACB} = 90° = \widehat{ADC}$, tout comme $\widehat{ECF} = 90° = \widehat{EDF}$. Il en résulte que C et D sont également sur le demi-cercle de diamètre $[EF]$, donc de centre M, d'où $NC = ND$: c'est précisément ce qui restait à démontrer.

2.2 Bissectrice

Une bissectrice d'un angle $\widehat{BAC}$ est une droite qui partage l'angle $\widehat{BAC}$ en deux angles égaux. C'est également un axe de symétrie transformant l'un des côtés de l'angle (AB) en l'autre (AC). Les points de la bissectrice sont donc à égale distance des deux droites (AB) et (AC). On notera que la notion d'*angle* est très difficile à définir de manière rigoureuse, mais nous n'approfondirons pas cette question. Signalons seulement qu'il existe deux droites perpendiculaires dont tous les points sont à égales distance des deux droites (AB) et (AC), toutes deux sont bissectrices de l'angle $\widehat{BAC}$. Mais dans le triangle ABC, si une bissectrice de $\widehat{BAC}$ coupe le côté opposé (BC) en D, cette bissectrice sera dite *intérieure* si D est intérieur au segment $[BC]$, *extérieure* si D est extérieur au segment $[BC]$.

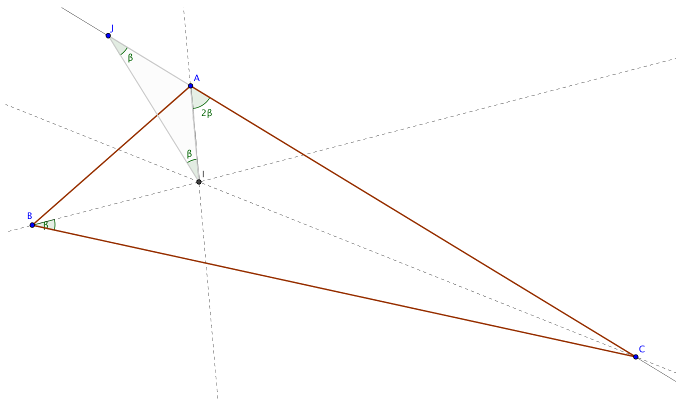


Dans les deux cas, le point D vérifie la même propriété : $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$. Une des démonstrations de ce théorème classique utilise le théorème de Thalès : si la parallèle à (AD) passant par C coupe (AB) en E, le parallélisme entraîne deux égalités d'angles : $\widehat{DAC} = \widehat{ACE}$ d'une part, et $\widehat{BAD} = \widehat{AEC}$. Comme (AD) est bissectrice, tous ces angles sont égaux et le triangle ACE est isocèle : $AC = AE$. Or le théorème de Thalès permet d'affirmer : $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AE}$.

Les trois bissectrices intérieures d'un triangle se coupent en un point équidistant des trois cotés du triangle, donc centre d'un cercle tangent aux trois côtés, appelé *cercle inscrit* dans le triangle. Les cercles exinscrits sont eux aussi tangents aux trois côtés du triangle, mais leurs centres sont extérieurs au triangle, intersection d'une bissectrice intérieure et deux bissectrices extérieures.

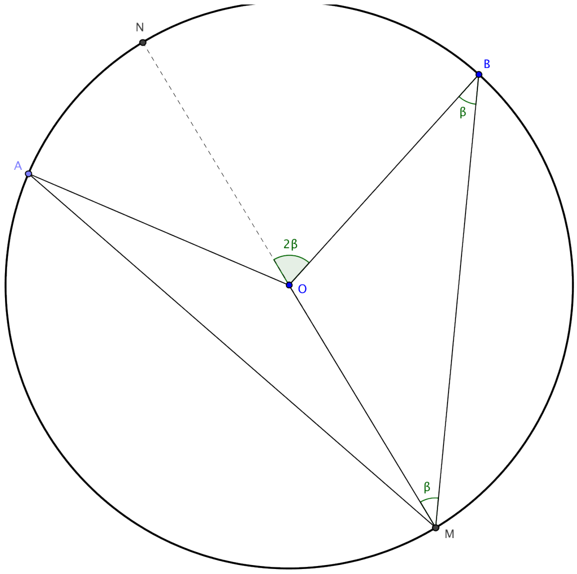
Exercice 2. Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. On suppose que $CA+AI = BC$ (relation entre les longueurs). Déterminer la valeur du rapport d'angles : $\frac{\widehat{BAC}}{\widehat{CBA}}$.

Solution de l'exercice 2. On rappelle que I est le point d'intersection des trois bissectrices intérieures du triangle ABC.



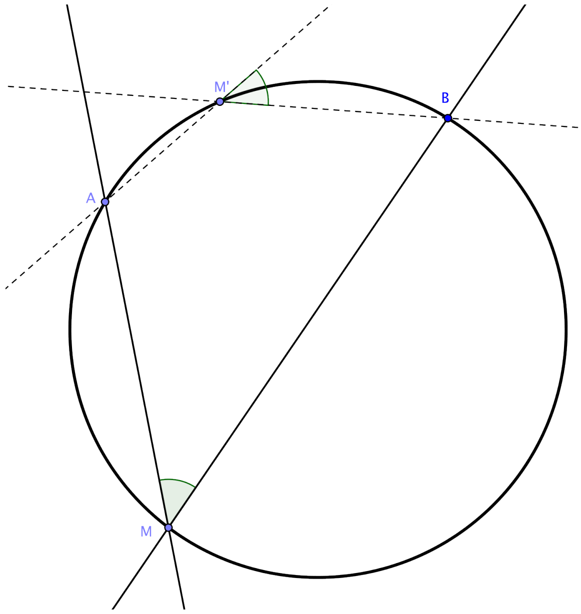
La relation de longueurs $CA + AI = BC$ est difficile à exploiter dans la mesure où CA, AI et BC sont sur trois droites non parallèles ; il faudrait calculer la longueur de ces trois segments, ce qui n'est pas immédiat. En revanche, si l'on prolonge la droite (CA) au delà de A pour y placer un point J tel que $AI = AJ$, on voit apparaître beaucoup de choses : d'abord un triangle isocèle AIJ, qui prouve que $\widehat{AIJ} = \widehat{AJI}$, donc $\widehat{CAI} = 2 \times \widehat{AJI}$, en outre l'égalité de longueurs : $CJ = CA + AJ = CA + AI = CB$. Donc la symétrie par rapport à la bissectrice (CI), qui envoie la droite (CB) sur (CA), envoie plus précisément le point B en J. Il transforme donc l'angle $\widehat{CBI}$, que nous appellerons β, en $\widehat{CJI}$. Il en résulte que $\widehat{CAI} = 2\beta$. Or (AI) et (BI) sont bissectrices de $\widehat{BAC}$ et $\widehat{CBA}$ respectivement, d'où $\widehat{BAC} = 4\beta$ et $\widehat{CBA} = 2\beta$, soit $\frac{\widehat{BAC}}{\widehat{CBA}} = 2$.

2.3 Angle inscrit et angle au centre

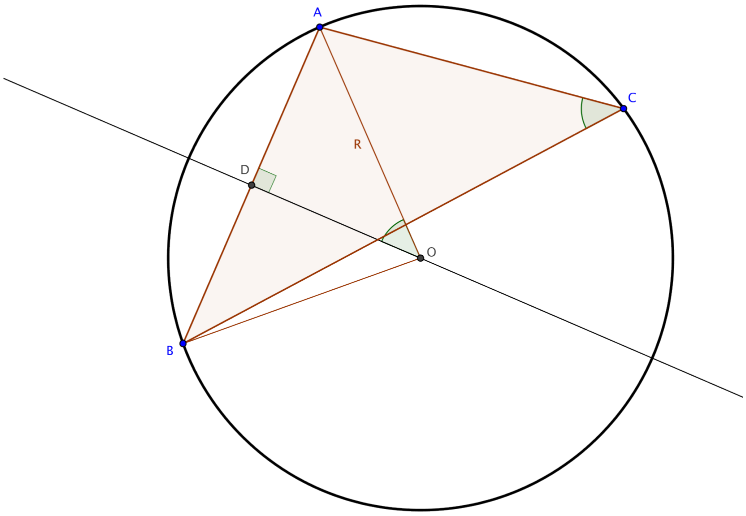


Considérons un cercle de centre O, A, B et M trois points du cercle. La droite (MO) recoupe le cercle en N. Il y aurait en principe trois ou quatre cas de figure à envisager, mais comme il s'agit de démonstrations quasiment identiques d'un résultat classique, nous nous limiterons à un cas. Sur cette figure, les triangles AMO étant isocèle, $\widehat{AON} = 2\widehat{AMO}$ et $\widehat{NOB} = 2\widehat{OMB}$. Il en résulte que $\widehat{AOB} = \widehat{AON} + \widehat{NOB} = 2(\widehat{AMO} + \widehat{OMB}) = 2\widehat{AMB}$. Ce qui peut s'énoncer : l'angle inscrit (en l'occurrence $\widehat{AMB}$) est égal à la moitié de l'angle au centre (en l'occurrence $\widehat{AOB}$). Et comme l'angle au centre est indépendant de M, l'angle inscrit est lui aussi indépendant de M.

Mais manipuler des angles et, plus encore, des « demi-angles », n'est pas si simple que cela. Si M est sur le « petit arc » $\widehat{AB}$, l'angle au centre à considérer est l'angle rentrant $\widehat{AOB}$. Ce qui explique que si M et M' sont de part et d'autre de la droite (AB), les angles inscrits $\widehat{AMB}$ et $\widehat{AM'B}$ soient non pas égaux mais supplémentaires. Il y a deux manières de contourner cette difficulté : soit en comparant l'angle inscrit non pas à l'angle au centre, mais à l'arc intercepté (si M est sur le petit arc $\widehat{AB}$, il intercepte le grand arc, et inversement). L'angle inscrit est alors toujours égal à la moitié de l'arc intercepté. Soit en considérant non pas des angles au sens habituel du terme, mais des *angles de droites* : l'angle de droite (AM, BM) est l'angle orienté dont il faut faire tourner la droite (AM) pour la faire coïncider avec (BM). Cet angle est totalement indépendant du point M, dès lors que M est sur le cercle. Si M n'est pas sur le cercle, la droite (AM) recoupe le cercle en P, et on ne peut pas avoir $(AM, BM) = (AP, BP)$. On en déduit le résultat fondamental : *quatre points* A, B, M, M' *sont* cocycliques*, c'est-à-dire appartiennent à un même cercle, si et seulement si les angles de droites* (AM, BM) *et* (AM', BM') *sont égaux.*



Dernière remarque : soit Δ la tangente au cercle en A. L'angle formé par Δ et la corde $[AB]$ est un cas limite d'angle inscrit interceptant le même arc $\widehat{AB}$, il est égal aux autres angles inscrits interceptant $\widehat{AB}$, mais la démonstration peut se faire différemment, en utilisant seulement le fait que le triangle AOB est isocèle et que Δ est perpendiculaire à (AB).



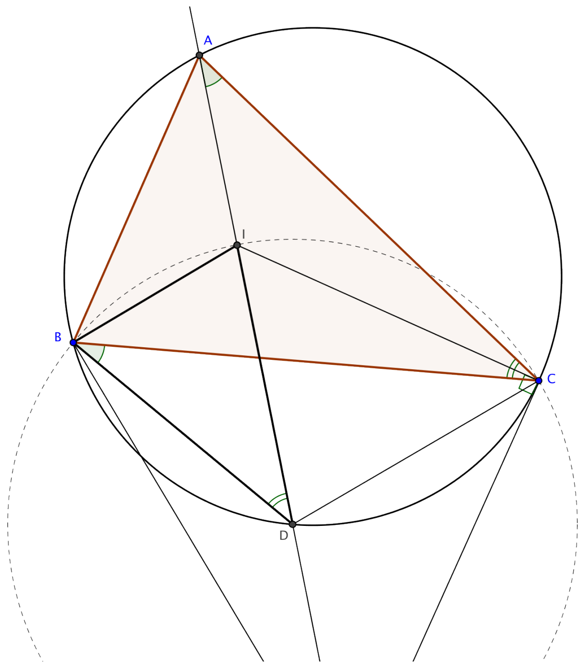
Loi des sinus : Soit A et B deux points d'un cercle de centre O, D le milieu de $[AB]$. Le triangle AOB étant isocèle, (OD) est en même temps médiane, hauteur, médiatrice et bissectrice du triangle. Or si l'on appelle R le rayon du cercle, $OA = R$ donc $AB = 2AD = 2R\sin\widehat{AOD}$. Comme $\widehat{AOD}$ et l'angle inscrit $\widehat{AMB}$, pour tout point M du cercle, valent tous deux la moitié de $\widehat{AOB}$, $AB = 2R\sin\widehat{AMB}$. En d'autres termes, si ABC est un triangle et R le rayon de son cercle circonscrit, $BC = 2R\sin\widehat{A}$, $CA = 2R\sin\widehat{B}$, $AB = 2R\sin\widehat{C}$. Ou encore, en posant (notation habituelle) $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$,

$$\frac{\sin\widehat{A}}{a} = \frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c}.$$

C'est habituellement sous cette forme que cette relation s'appelle *loi des sinus*.

Exercice 3. Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. La bissectrice (AI) recoupe le cercle circonscrit en D. Montrer que le cercle de centre D passant par I passe par B et C. Ce cercle recoupe (AI) en J. Montrer que J est centre d'un cercle exinscrit.

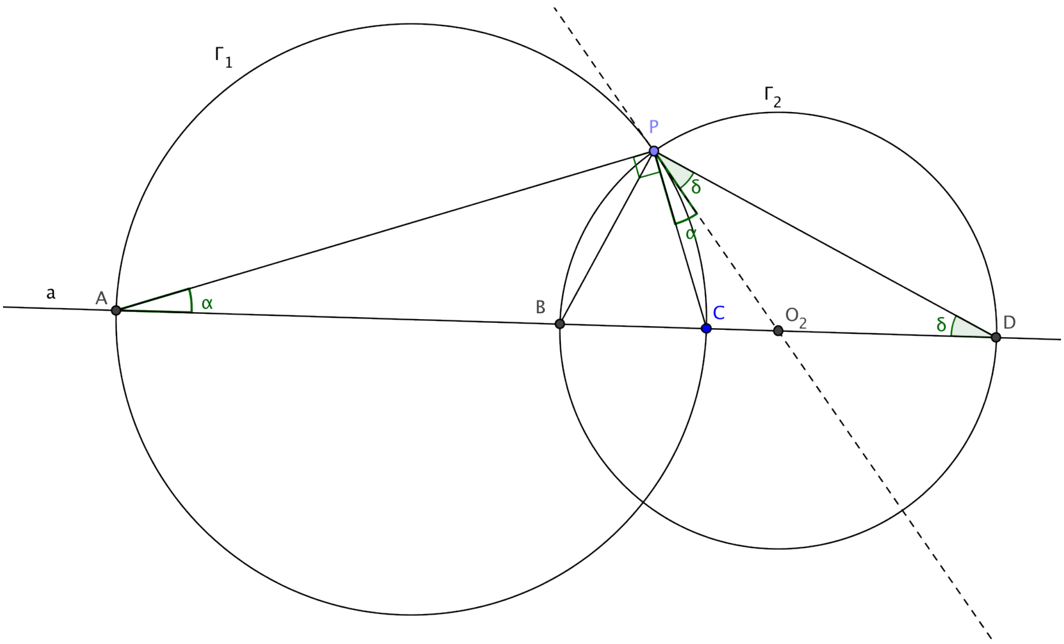
Solution de l'exercice 3. Rappelons que I est l'intersection des trois bissectrices intérieures du triangle. Il suffit de démontrer que les triangles DBI et DCI sont isocèles, en prouvant qu'ils ont chacun deux angles égaux.



On a $\widehat{IBD} = \widehat{IBC} + \widehat{CBD}$, or $\widehat{IBC}$ est la moitié de l'angle $\widehat{B}$, en appelant $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ les trois angles du triangle ABC. L'angle inscrit $\widehat{CBD} = \widehat{CAD} = \frac{\widehat{A}}{2}$, d'où $\widehat{IBD} = \frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}$, alors que $\widehat{BDI} = \widehat{BDA} = \widehat{BCA} = \widehat{C}$. Dès lors, comme $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$, le troisième angle $\widehat{BID}$ vaut lui aussi $\frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}$, ce qui prouve bien que DBI est isocèle. On démontrerait pareillement que DCI est lui aussi isocèle, donc le cercle de centre D passant par I passe aussi par B et C.

Pour la seconde question, comme les angles $\widehat{IBJ}$ et $\widehat{ICJ}$ interceptent chacun un demi-cercle (en d'autres termes : $[IJ]$ est diamètre d'un cercle passant par B et C), ce sont deux angles droits. (BJ), perpendiculaire à (BI), est bissectrice extérieure de $\widehat{B}$, tout comme (CJ) est bissectrice extérieure de $\widehat{C}$. Donc J, intersection d'une bissectrice intérieure et de deux bissectrices extérieures, est centre d'un cercle exinscrit.

Exercice 4. Soient A, B, C et D quatre points distincts, alignés dans cet ordre, sur une droite Δ, Γ_1 et Γ_2 les cercles de diamètres $[AC]$ et $[BD]$ et P un de leurs points d'intersection. On suppose que la tangente en P à Γ_1 passe par le centre O_2 de Γ_2. Montrer que (PB) et (PD) sont les bissectrices de l'angle $\widehat{APC}$.

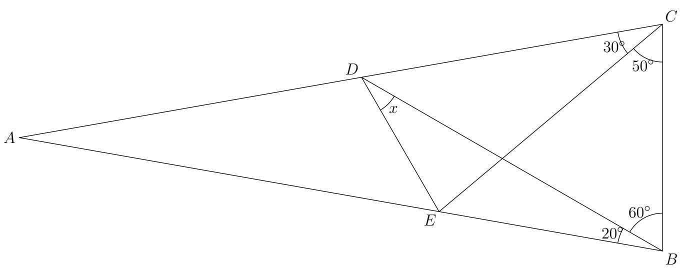


Solution de l'exercice 4. Appelons α et δ les angles $\widehat{CAP}$ et $\widehat{PDB}$. Comme $[AC]$ est un diamètre de Γ_1, et $[BD]$ un diamètre de Γ_2, $\widehat{APC}$ et $\widehat{BPD}$ sont droits. Il en résulte que $\widehat{PCA} = 90° - \alpha$ et $\widehat{DBP} = 90° - \delta$, donc que $\widehat{BPC} = \alpha + \delta$. Par ailleurs, O_2 étant le centre du cercle Γ_2, le triangle O_2PD est isocèle, donc $\widehat{O_2PD} = \delta$. Mais comme (PO_2) est tangente à Γ_1, $\widehat{CPO_2}$ est un angle inscrit de Γ_1 interceptant le même arc $\widehat{PC}$ que $\widehat{CAP}$, donc $\widehat{CPO_2} = \alpha$. On en déduit que $\widehat{CPD} = \alpha + \delta = \widehat{BPC}$. (PC) est donc bissectrice de $\widehat{BPD}$. N'oublions pas que $\widehat{BPD}$ est droit, d'où $\widehat{BPD} = 45°$; $\widehat{APC}$ est lui aussi droit, donc $\widehat{APB}$ est lui aussi égal à $45°$, ce qui implique que (PB) bissectrice de $\widehat{APC}$. Quant à (PD), elle est perpendiculaire à (PB), ce qui prouve qu'elle est elle aussi bissectrice de $\widehat{APC}$, car les deux bissectrices d'un angle sont perpendiculaires.

3 Exercice du jour

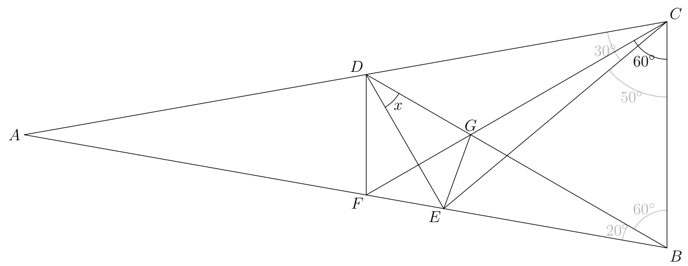
3.1 Énoncé

On donne la figure suivante. Calculer l'angle x.



3.2 Solution

On introduit les points F et G comme sur la figure suivante :



L'angle $\widehat{BEC}$ est égal à $\widehat{BEC} = 180° - 50° - (60° + 20°) = 50° = \widehat{BCE}$, de sorte que BEC est isocèle en B. Ainsi $BE = BC$. De plus, BGC a deux angles de 60° et est donc équilatéral. D'où $BG = BC = BE$ et donc BEG est isocèle en B. On en déduit que $\widehat{EGB} = \frac{180°-20°}{2} = 80°$, puis que $\widehat{EGF} = 180° - 80° - 60° = 40°$. D'autre part, $\widehat{GFE} = \widehat{CFB} = 180° - 60° - (60° + 20°) = 40°$. Par conséquent, le triangle EFG est isocèle en E. Par ailleurs, le triangle GFD est isocèle en G par symétrie de la figure, et l'angle $\widehat{DGF}$ est égal à l'angle $\widehat{CGB}$ qui vaut 60°, donc GFD est équilatéral. Donc (ED) est la médiatrice de $[FG]$, qui est aussi la bissectrice de $\widehat{GDF}$. Finalement,

$$x = \frac{\widehat{GDF}}{2} = 30°.$$

D. Mardi 26 octobre (géométrie)

1 Cours et exercices du matin

Exercice 1. Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles sécants en A et B. Soit C un point de Γ_1. On note D (respectivement E) l'intersection entre (BC) (respectivement (AC)) et Γ_2. Enfin, on note F l'intersection entre la tangente à Γ_1 en B et la droite (DE).

Montrer que le triangle BDF est isocèle.

Exercice 2. Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle Γ. Soit M un point du plan et P_A, P_B et P_C les projetés respectifs de M sur (BC), (AC) et (AB). On a alors l'équivalence suivante : P_A, P_B et P_C sont alignés si et seulement si M appartient à Γ.

On appelle alors *droite de Simson* la droite passant par ces trois points.

Exercice 3. Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle Γ. Soit D la bissectrice intérieure issue de A et Δ la médiatrice de $[BC]$. Alors D et Δ se coupent sur Γ en un point K.

De plus, I, B et C sont équidistants de K (I étant le centre du cercle inscrit dans ABC).

Exercice 4. Soit ABC un triangle et Δ une droite passant par A. On note I le point d'intersection (s'il existe) entre Δ et (BC). On a alors que Δ est la bissectrice intérieure issue de A si et seulement si :

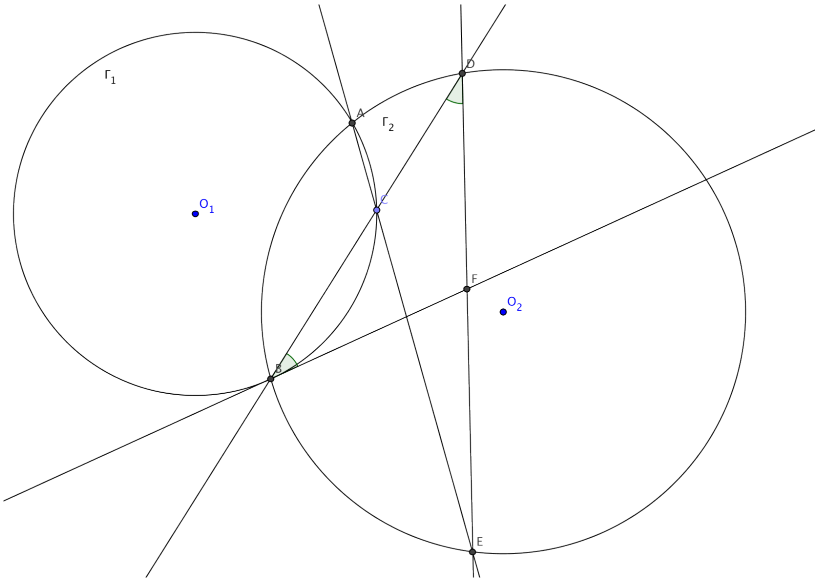
$$\frac{AB}{AC} = \frac{IB}{IC}.$$

Exercice 5. Soit ABC un triangle, D l'intersection entre la la bissectrice intérieure issue de A et la droite (BC), et M le milieu de $[AB]$. On suppose que $(MD)\perp(AD)$. Montrer que :

$$DB = 3 \cdot DC$$

Exercice 6. Soit ABC un triangle et H_A et H_B les pieds des hauteurs issues de A et B. Montrer que CH_AH_B et CAB sont semblables.

Solution de l'exercice 1. Il s'agit d'une simple chasse aux angles.



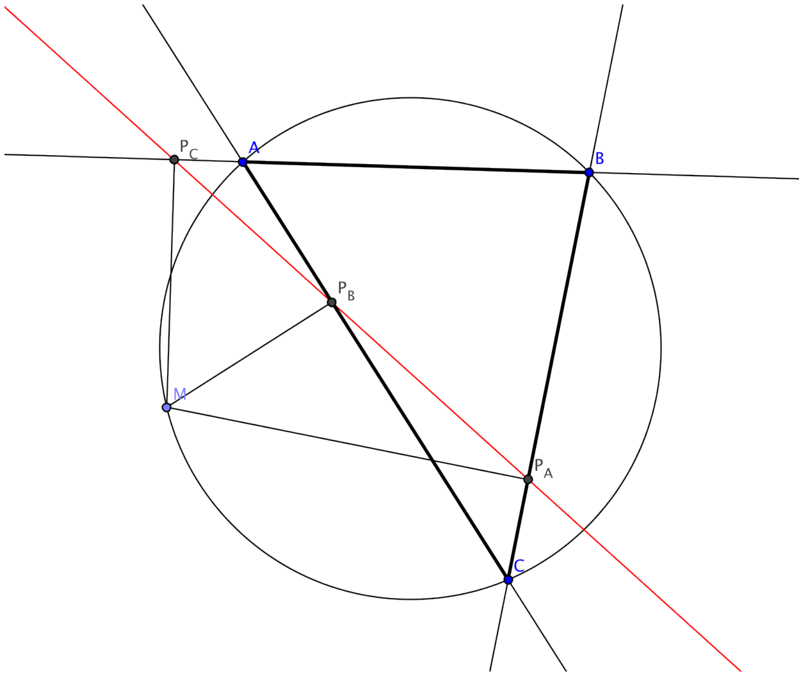
Tout d'abord, en se plaçant dans le cercle Γ_1, on remarque que les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{FBC}$ interceptent le même arc de cercle ((FB) étant tangente à Γ_1 en B) et sont donc égaux. Ensuite, en se plaçant dans le cercle Γ_2, on obtient de même que les angles $\widehat{BAE}$ et $\widehat{BDE}$ sont égaux. Il en résulte :

$$\widehat{FBD} = \widehat{FBC} = \widehat{BAC} = \widehat{BAE} = \widehat{BDE} = \widehat{BDF}$$

d'où la conclusion.

Solution de l'exercice 2. On veut montrer que :

$$\widehat{MP_CP_B} = \widehat{MP_CP_A}$$

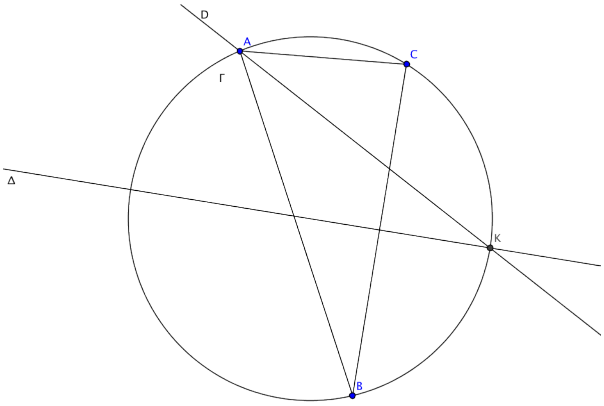


On commence par remarquer que les points M, P_C, A, P_B sont cocyliques sur le cercle de diamètre $[AM]$ (à cause des angles droits). Il en est de même pour les points M, P_A, B, P_C. On a alors les égalités d'angle :

$$\widehat{MP_CP_B} = \widehat{MAP_B} = \widehat{MAC} \qquad \widehat{MP_CP_A} = \widehat{MBP_A} = \widehat{MBC}.$$

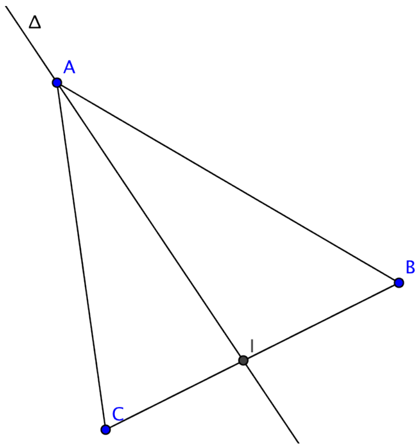
En se plaçant dans Γ, on trouve que les angles $\widehat{MAC}$ et $\widehat{MBC}$ interceptent le même arc de cercle, et sont donc de même valeur, ce qui achève la démonstration.

Solution de l'exercice 3. Soit J le point d'intersection entre D et Γ. Les angles $\widehat{BAJ}$ et $\widehat{JAC}$ sont égaux (car D est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$), donc les arcs de cercle $[BK]$ et $[KC]$ (et *a fortiori* les segments $[BK]$ et $[KC]$) sont de même longueur.



Soit L le point d'intersection entre Δ et Γ. On veut montrer que J et L sont confondus. Or, Δ étant un axe de symétrie pour le segment $[BC]$ et L appartenant à Δ, on a que L est équidistant de B et de C, ce qui achève la démonstration.

Solution de l'exercice 4. On considère la droite D passant par B et coupant Δ en J de telle sorte à ce que le triangle IJB soit isocèle en B.



On veut tout d'abord montrer que les triangles AIC et AJB sont semblables. Pour cela, il suffit qu'ils aient deux angles sur trois qui soient de même mesure. Or :

$$\widehat{CAI} = \widehat{BAJ} \qquad (\Delta \text{ bissectrice})$$

et d'autre part

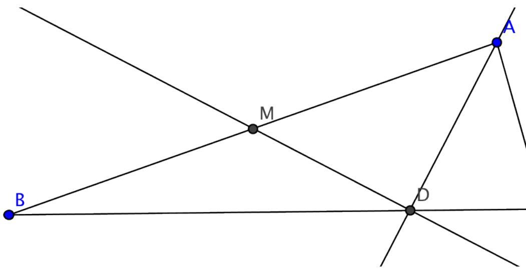
$$\widehat{AIC} = \widehat{BIJ} = \widehat{AJB} \qquad (IBJ \text{ isocèle}).$$

Les triangles AIC et AJB étant donc semblables, on a alors l'égalité :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{JB}{IC}$$

Comme IBJ est isocèle en B, on a $IB = JB$, ce qui donne le résultat attendu.

Solution de l'exercice 5. La situation est représentée sur la figure ci-dessous.



On considère K le milieu de $[MA]$. Le triangle MDA étant rectangle en A, on a :

$$AK = DK = MK.$$

Il en résulte tout d'abord que le triangle DKA est isocèle en K, ce qui donne l'égalité d'angles :

$$\widehat{ADK} = \widehat{DAK}.$$

Comme on a par ailleurs que $\widehat{DAK} = \widehat{DAC}$ (car (AD) est la bissectrice de $\widehat{BAC}$), on en déduit que les droites (AC) et (KD) sont parallèles (angles alternes internes égaux).

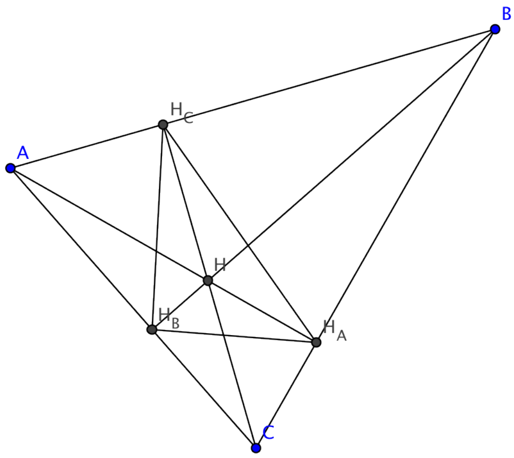
Le théorème de Thalès appliqué au triangle BAC donne alors :

$$\frac{BK}{BA} = \frac{BD}{BC}$$

Comme $\frac{BK}{BA} = \frac{3}{4}$, on en déduit facilement que :

$$DB = 3 \cdot DC.$$

Solution de l'exercice 6. On construit de même le point H_C et le point H, orthocentre du triangle.



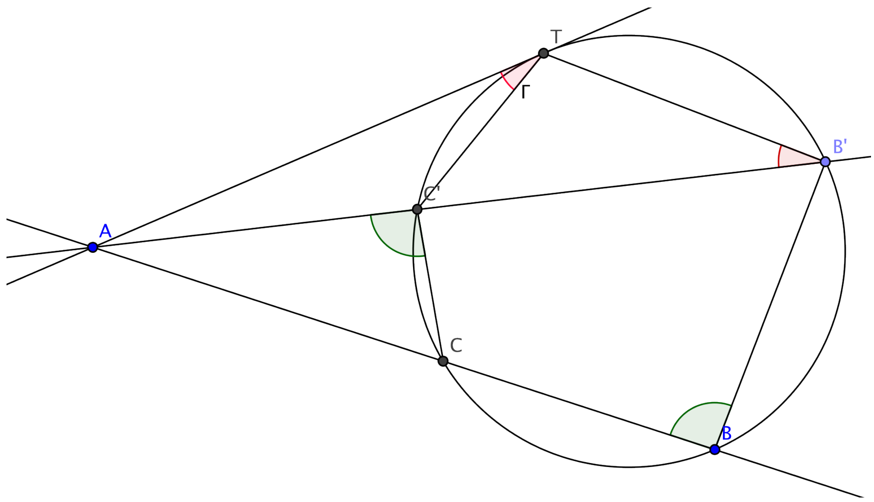
En remarquant que les points A, H_C, H et H_B sont cocycliques car sur un même cercle de diamètre $[AH]$ (de même pour les points B, H_A, H, H_C et C, H_B, H, H_A), on est rapidement capable d'exprimer tous les angles de la figure à l'aide des trois angles du triangle. On trouve alors que $\widehat{AH_BH_C} = \widehat{ACB}$ et $\widehat{AH_CH_B} = \widehat{ABC}$, d'où la conclusion.

2 Cours et exercices de l'après-midi

2.1 Puissance d'un point par rapport à un cercle

Définition et expression

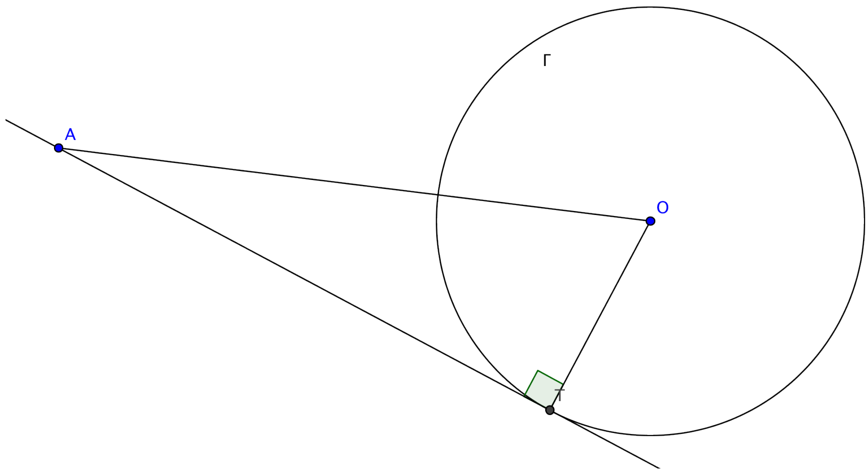
Soit Γ un cercle, A un point et Δ, Δ' deux droites passant par A et coupant Γ en B et C pour Δ, et en B' et C' pour Δ'.



Une chasse aux angles rapide montre que les triangles ABB' et $AC'C$ sont semblables. On a donc $\frac{AB}{AC'} = \frac{AB'}{AC}$, ce qui nous donne $AB \cdot AC = AB' \cdot AC'$. On observe que si B et C sont confondus, *i.e.* si Δ est une tangente à Γ, le résultat est toujours vrai en utilisant le cas tangentiel du théorème de l'angle inscrit. On peut aussi remarquer que B et C sont de part et d'autre de A si et seulement si A est intérieur à Γ, ce qui justifie la définition suivante :

Définition. On appelle puissance du point A par rapport au cercle Γ, et on note $P(A,\Gamma)$ la quantité $AB \cdot AC$, le produit étant algébrique, c'est-à-dire qu'il est négatif si AB et AC ne sont pas dans le même sens.

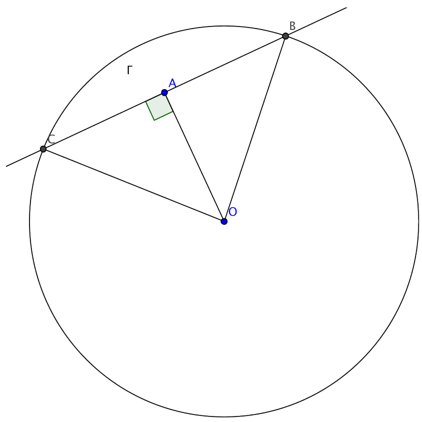
On note maintenant O et r respectivement le centre et le rayon de Γ. Si A est extérieur à Γ, on peut considérer le cas où $B = C$ et on a alors $P(A,\Gamma) = AB \cdot AC = AB^2$.



Or, comme (AB) et (OB) sont orthogonales, on a d'après Pythagore $OA^2 = AB^2 + OB^2 = AB^2 + r^2$, soit $AB^2 = OA^2 - r^2$. On a donc

$$P(A,\Gamma) = OA^2 - r^2. \tag{D.1}$$

Notons que si A est intérieur au cercle, la formule (D.1) reste valable, pour la montrer on considère cette fois non pas la tangente menée par A en Γ mais la droite orthogonale à (AO) passant par A, et on a $AB = AC$, ainsi que $r^2 = AB^2 + OA^2$, donc $P(A,\Gamma) = -AB \cdot AC = -AB^2 = OA^2 - r^2$.



Remarquons aussi que si A, B, C ainsi que A, B', C' sont alignés, $AB \cdot AC = AB' \cdot AC'$ est une condition nécessaire, mais aussi suffisante pour que $BCB'C'$ soit inscriptible. En effet, l'intersection du cercle circonscrit à BCB' et de la droite (AB') est un point C^* vérifiant $AB' \cdot AC^* = AB \cdot AC = AB' \cdot AC'$, donc $C^* = C'$. Retenons deux remarques importantes pour la suite :

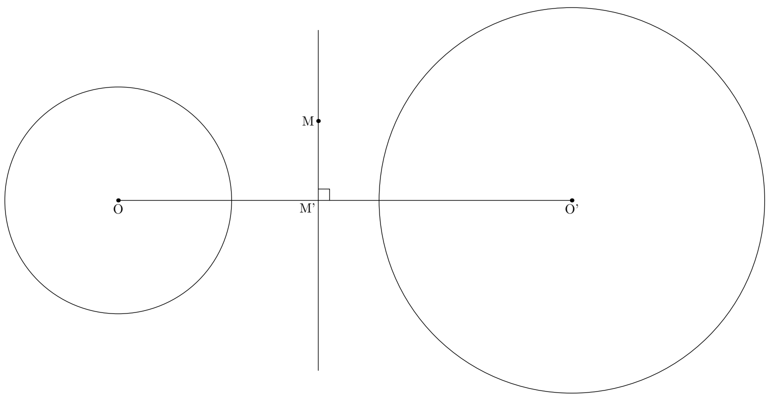
1. $P(A, \Gamma) = 0$ ssi $A \in \Gamma$.
2. Si une tangente à Γ menée depuis A rencontre Γ en T, alors $P(A, \Gamma) = AT^2$.

Axe radical

Soient Γ et Γ' deux cercles non concentriques, de centres respectifs O et O', et de rayons respectifs r et r'. On s'intéresse au lieu géométrique D des points M vérifiant

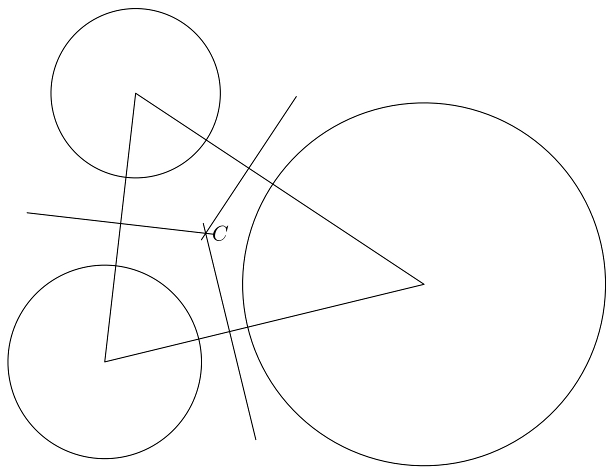
$$P(M, \Gamma) = P(M, \Gamma') \tag{D.2}$$

Nous allons prouver que D est une droite. La relation (D.2) se réécrit $MO^2 - r^2 = MO'^2 - r'^2$, soit $MO^2 - MO'^2 = K$, où on a défini $K = r^2 - r'^2$. On définit M' le projeté orthogonal de M sur (OO'). On a d'après Pythagore $M'O^2 = MO^2 - MM'^2$, et $M'O'^2 = MO'^2 - MM'^2$, donc $M'O^2 - M'O'^2 = MO^2 - MO'^2 = K$, donc $M \in D$ si et seulement si $M' \in D$. D'autre part, comme K est fixé, on peut remarquer qu'il existe un unique point A de (OO') vérifiant $AO^2 - AO'^2 = K$ (exercice), et donc on a finalement : $M \in D$ si et seulement si (MA) est orthogonale à (OO'), *i.e.* D est la droite orthogonale à (OO') passant par A. On l'appelle l'axe radical de Γ et Γ'.



Il découle de la définition de l'axe radical que si Γ_1, Γ_2 et Γ_3 sont trois cercles non deux à deux concentriques, alors on a : *D_3 de Γ_1 et Γ_2, D_1 de Γ_2 et Γ_3, et D_2 de Γ_3 et Γ_1 sont concourants, parallèles ou confondus.*

En effet, si D_1 et D_2 sont sécants en A, alors $P(A, \Gamma_2) = P(A, \Gamma_3)$ et $P(A, \Gamma_3) = P(A, \Gamma_1)$, donc A a la même puissance par rapport aux trois cercles, donc $A \in D_3$, ce qui prouve l'assertion. De plus, il est facile de voir que comme D_3 est orthogonal à (O_1O_2) et ainsi de suite, les axes radicaux sont concourants si et seulement si les centres des trois cercles ne sont pas alignés. Dans ce cas, on appelle A le centre radical des trois cercles.

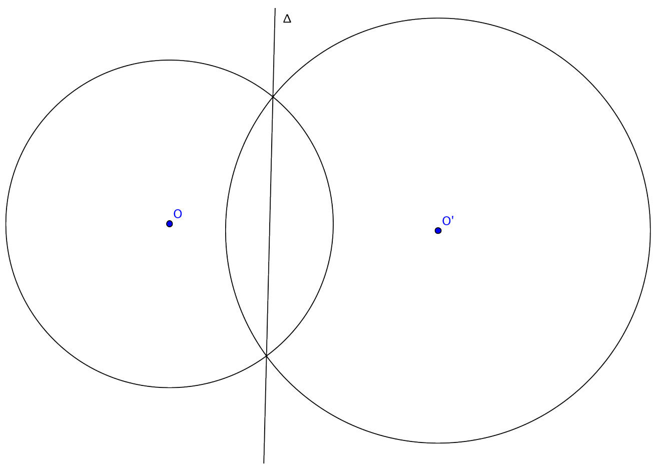


Il est intéressant de voir des constructions géométriques possibles de l'axe radical de deux cercles :

Cas 1 : Γ et Γ' sont sécants en A et B distincts. C'est le cas le plus facile : on a

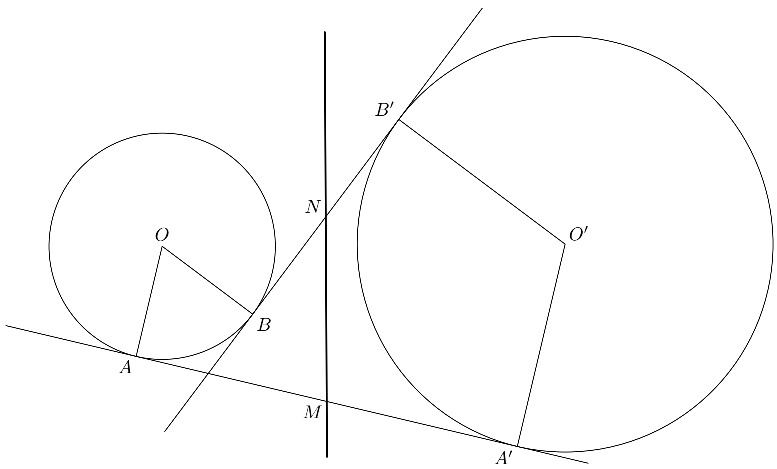
$$P(A,\Gamma) = P(B,\Gamma) = P(A,\Gamma') = P(B,\Gamma') = 0,$$

donc $D = (AB)$.



Cas 2 : Γ et Γ' sont tangents en A. Alors O, O' et A sont alignés, et $P(A,\Gamma) = P(A,\Gamma') = 0$, donc D est la droite orthogonale à (OO') passant par A, *i.e.* D est la tangente commune à Γ et Γ' passant par A.

Cas 3 : Γ et Γ' sont disjoints et extérieurs l'un à l'autre. On considère alors deux tangentes communes Δ et Δ' aux deux cercles. Si Δ rencontre Γ en A et Γ' en A', alors le milieu M de $[AA']$ vérifie $P(M,\Gamma) = MA^2 = MA'^2 = P(M,\Gamma')$, donc $M \in D$. De même, si Δ' rencontre Γ en B et Γ' en B', le milieu N de $[BB']$ appartient à D. Donc $D = (MN)$.

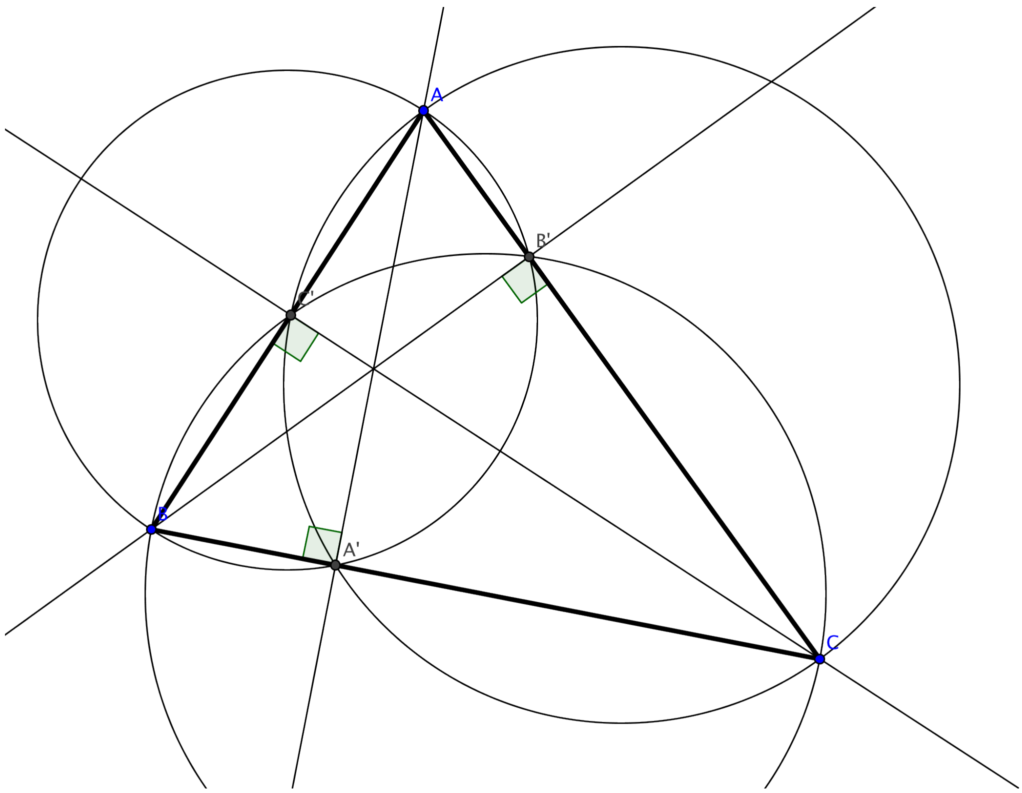


Cas 4 : Γ et Γ' sont disjoints, et l'un est intérieur à l'autre. Dans ce cas, il n'existe pas de construction géométrique élémentaire de l'axe radical des deux cercles.

Applications

Exercice 1. Montrer que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

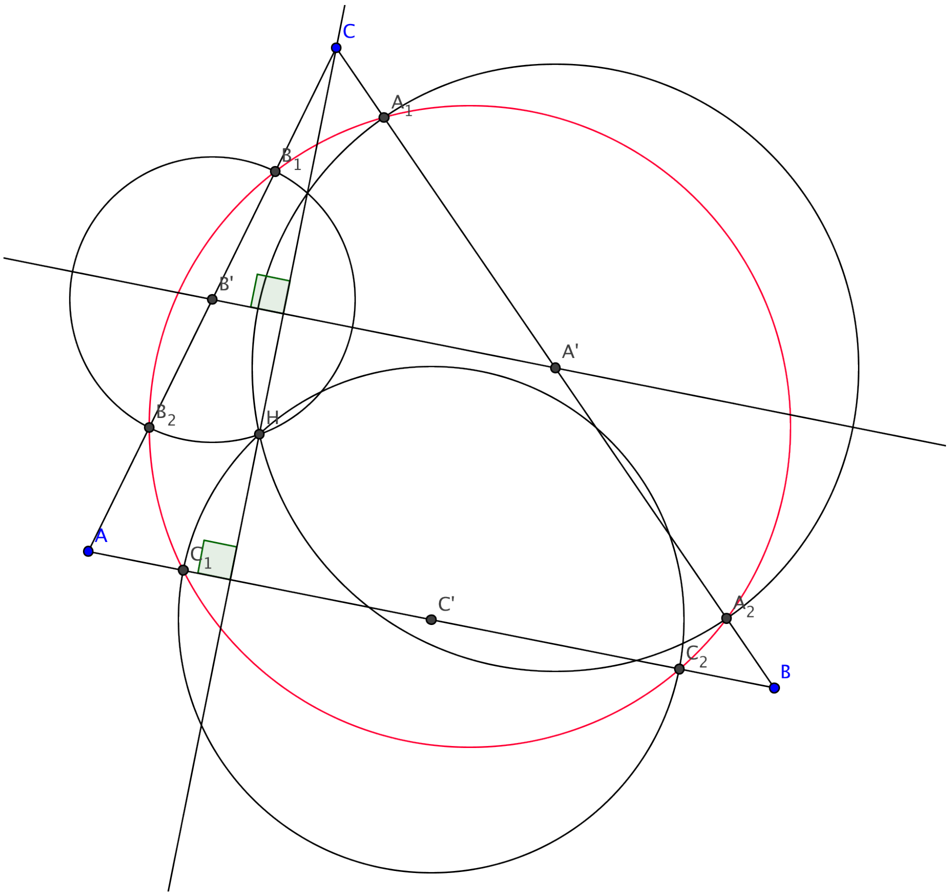
Solution de l'exercice 1. Soit ABC un triangle. On prend $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$ et $C' \in (AB)$ tels que (AA'), (BB') et (CC') soient les hauteurs du triangle ABC.



Le théorème de l'angle inscrit (dans ce cas, de l'équerre) montre que $ABA'B'$, $ACA'C'$ et $BCB'C'$ sont cocycliques, et les axes radicaux de leurs cercles circonscrits deux à deux sont les hauteurs (AA'), (BB') et (CC'), donc ces dernières sont concourantes.

Exercice 2 (IMO 2008, 1)**.** Soit ABC un triangle, H son orthocentre, et A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. On note A_1 et A_2 les points de (BC) tels que $A'A_1 = A'A_2 = A'H$. On définit de même B_1, B_2, C_1 et C_2. Montrer que $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ est inscriptible.

Solution de l'exercice 2. Montrons que $A_1A_2B_1B_2$ est inscriptible. On nomme Γ_A et Γ_B les cercles de centres respectifs A' et B', et de rayons respectifs $A'H$ et $B'H$. L'axe radical de Γ_A et Γ_B est orthogonal à $(A'B')$, donc à (AB), et passe par H (car H appartient aux deux cercles) : c'est donc la hauteur issue de C. Donc $P(C, \Gamma_A) = P(C, \Gamma_B)$.

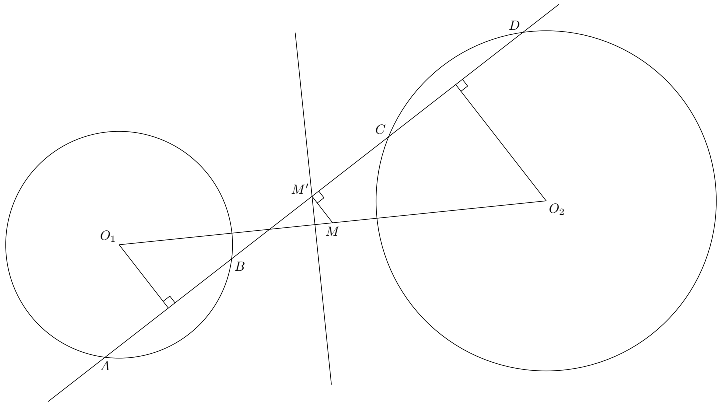


Entre autres, cela implique $CA_1 \cdot CA_2 = CB_1 \cdot CB_2$, *i.e.* $A_1A_2B_1B_2$ inscriptible sur un cercle Γ_1. De même, on montre que $A_1A_2C_1C_2$ est inscriptible sur un cercle Γ_2, ainsi que $C_1C_2B_1B_2$ sur un cercle Γ_3. Cependant, si ces cercles n'étaient pas les mêmes, leurs axes radicaux seraient les côtés du triangle, donc ne seraient ni concourants ni parallèles, ce qui est absurde. Donc $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3$, et on a le résultat demandé.

Exercice 3 (Tournoi des villes)**.** Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles extérieurs l'un à l'autre. On dit qu'une droite d coupant les deux cercles est équitable si les cordes définies par d sur Γ_1 et Γ_2 ont même longueur. On note O_1 et O_2 les centres respectifs de Γ_1 et Γ_2, et M le milieu de $[O_1O_2]$. Montrer que quelles que soient a, b et c trois droites équitables quelconques, le cercle circonscrit du triangle défini par a, b et c passe par M.

Rappel : *Théorème de la droite de Simson. Soit ABC un triangle, Γ son cercle circonscrit, et P un point du plan. On appelle P_A, P_B et P_C les projetés orthogonaux de P respectivement sur (BC), (CA) et (AB). Alors P_A, P_B et P_C sont alignés si et seulement si $P \in \Gamma$.*

Solution de l'exercice 3. D'après le théorème, il suffit de montrer que les projetés orthogonaux de M sur a, b et c sont alignés sur une droite Δ. Comme on peut fixer a et b (ce qui définit Δ) et faire varier c, on intuite que Δ est indépendante du choix de a, b et c. Il suffit donc de montrer qu'il existe une droite Δ telle que pour toute droite équitable d, le projeté orthogonal de M sur d appartienne à Δ. Nous allons montrer que l'axe radical de Γ_1 et Γ_2 convient comme choix pour Δ. En effet, soit d une droite équitable, et M' le projeté orthogonal de M sur d. On note O_1' et O_2' les projetés orthogonaux respectifs de O_1 et O_2 sur d.



Si $[AB]$ et $[CD]$ sont les cordes définies par d respectivement sur Γ_1 et Γ_2, on a :

$$\begin{aligned} M'O_1' &= M'O_2' \\ O_1'A &= O_1'B \text{ (resp. } O_2'C = O_2'D) \\ AB &= CD \end{aligned}$$

De ces égalités, on conclut facilement que $M'A \cdot M'B = M'C \cdot M'D$, donc $M' \in \Delta$.

2.2 Isométries directes

On ne travaillera dans cette partie qu'avec des angles orientés. Si on n'a pas orienté deux droites a et b au préalable, l'angle (a, b) sera pris modulo 180°, c'est-à-dire qu'on considèrera comme identiques un angle α et $\alpha + 180°$.

Composition de deux réflexions

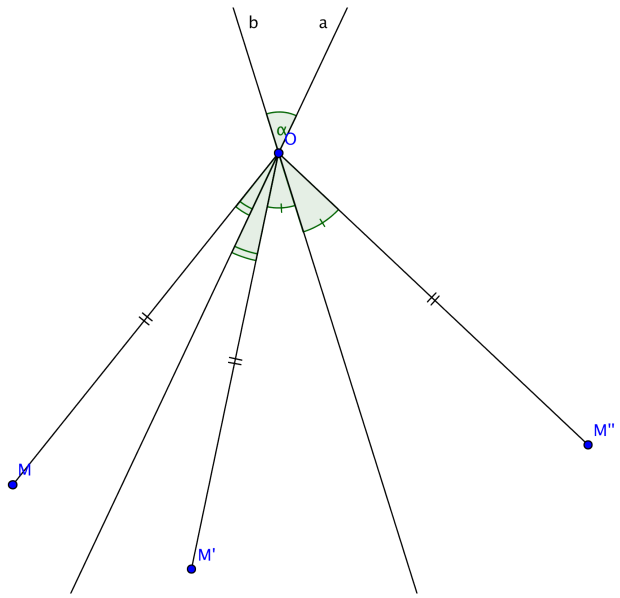
Droites sécantes Soient a et b des droites sécantes en O. On note s_a et s_b les réflexions de droites respectives a et b. On aimerait exprimer simplement la transformation r composée de s_a par s_b (on applique s_a, puis s_b). Pour cela, orientons les droites a et b, prenons un point M du plan, et notons $M' = s_a(M)$, $M'' = s_b(M')$, de telle sorte que $M'' = r(M)$. Puisque $O \in a$ et $O \in b$, on a $OM = OM' = OM''$. Notons que si $\alpha = (a, b)$ (l'angle orienté entre les droites a et b), on a pour tout point A du plan la relation de Chasles pour les angles : $(OA, b) = (OA, a) + (a, b) = (OA, a) + \alpha$. On a alors $(OM', a) = -(OM, a)$, et $(OM'', b) = -(OM', b)$. Or, $(OM', b) = (OM', a) + \alpha$, donc

$$(b, OM'') = -(OM'', b) = (OM', b) = (OM', a) + \alpha = -(OM, a) + \alpha.$$

Donc, en utilisant deux fois la relation de Chasles, on a :

$$(OM, OM'') = (OM, a) + (a, b) + (b, OM'') = (OM, a) + \alpha + (-(OM, a) + \alpha) = 2\alpha.$$

Donc M'' est l'unique point du plan qui vérifie $OM = OM''$ et $(OM, OM'') = 2\alpha$. Cela montre que r est la rotation de centre O et d'angle 2α.



Remarque 1 : Si l'orientation de a et b avait été choisie différemment, on aurait pu se retrouver avec un angle $(a, b) = \beta$ différent de α. Heureusement, on aurait alors eu $\beta = \alpha + 180°$, et donc $2\beta = 2\alpha$ (on raisonne en matière d'angles). Donc la définition de r n'est pas modifiée par le choix d'orientation de a et de b, ce dont on pouvait se douter...

Remarque 2 : En appliquant le raisonnement inverse, on peut toujours décomposer une rotation de centre O et d'angle θ en la composée de deux réflexions de droites a et b passant par O et formant un angle $\frac{\theta}{2}$ entre elles. Comme ceci est suffisant, si d est une droite fixée passant par O, on peut de plus faire en sorte que $a = d$, ou bien que $b = d$ dans la décomposition. Cela nous donne un corollaire qui sera important par la suite, pour exprimer la composée de deux réflexions : *Soit r une rotation de centre O et d'angle θ, et d une droite passant par O. Alors il existe deux uniques droites a et b passant par O telles que r soit la composition de r_a par r_d, et aussi la composition de r_d par r_b. Ces droites vérifient $(a, d) = (d, b) = \frac{\theta}{2}$.*

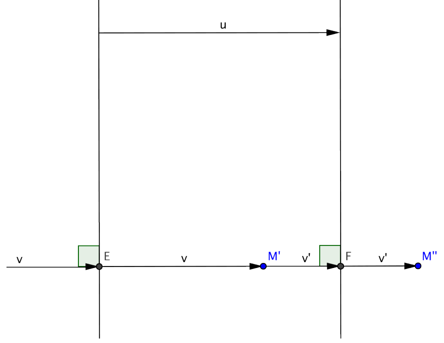
Droites parallèles Si a et b sont parallèles, on peut aussi exprimer la composée t de s_a par s_b. Soit $\vec{u}$ l'unique vecteur orthogonal à a et b tel que la translation de vecteur $\vec{u}$ envoie a sur b. Soit M un point du plan, $M' = s_a(M)$, et $M'' = s_b(M')$, de telle sorte que $M'' = t(M)$. On note de plus A et B les projetés orthogonaux de M respectivement sur a et b. On a alors $\overrightarrow{M'A} = -\overrightarrow{MA}$, et $\overrightarrow{M''B} = -\overrightarrow{M'B}$. Or, $\overrightarrow{M'B} = \overrightarrow{M'A} + \vec{u}$, donc

$$\overrightarrow{BM''} = -\overrightarrow{M''B} = \overrightarrow{M'B} = \overrightarrow{M'A} + \ \vec{u} = -\overrightarrow{MA} + \vec{u}.$$

Donc

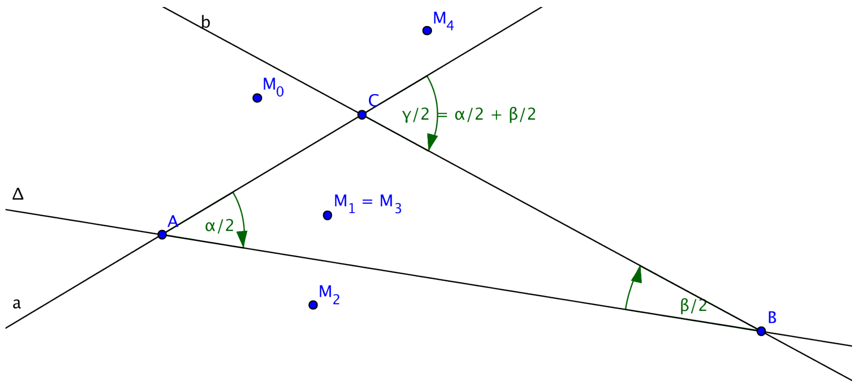
$$\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM''} = \overrightarrow{MA} + \vec{u} - \overrightarrow{MA} + \vec{u} = 2\vec{u}.$$

Cela montre que t est la translation de vecteur $2\vec{u}$.



Composition de deux rotations

Nous sommes maintenant en mesure d'exprimer « simplement » la composée r de deux rotations r_A et r_B, de centres respectifs A et B, et d'angles respectifs α et β. Notons Δ la droite (AB). Le corollaire ci-dessus montre que si a est la droite passant par A et vérifiant $(a, \Delta) = \frac{\alpha}{2}$, et b la droite passant par B et vérifiant $(\Delta, b) = \frac{\beta}{2}$, alors r_A est la composée de s_a par s_Δ, et r_B est la composée de s_Δ par s_b. La composition de r_A par r_B est donc la composée (dans cet ordre) de s_a, s_Δ, s_Δ et s_b. Or, la composée de s_Δ par s_Δ est l'identité, et donc r est la composée de s_a par s_b. C'est donc la rotation de centre C point d'intersection de a et b, et d'angle $\gamma = \alpha + \beta$.



3 Exercices du jour

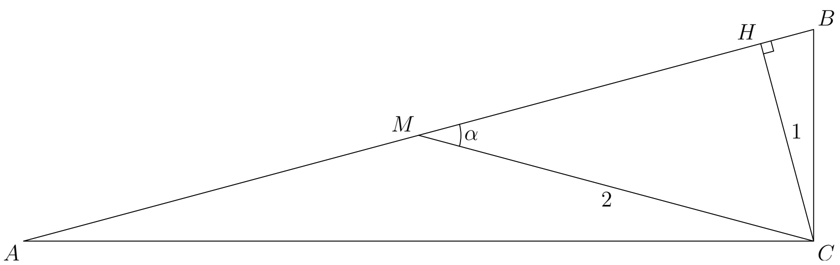
3.1 Énoncés

Exercice 1. Soit ABC un triangle rectangle en C. On désigne par M le milieu de $[AB]$ et par H le pied de la hauteur issue de C. Sachant que $CH = 1$ et $CM = 2$, déterminer l'angle $\widehat{CAB}$.

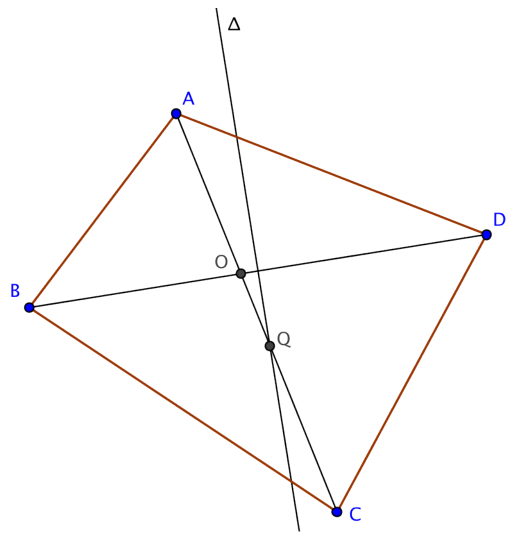
Exercice 2. Les diagonales d'un quadrilatère convexe $ABCD$ se coupent en O. On suppose que les triangles ABO, BCO, CDO, DAO ont même périmètre. Montrer que $ABCD$ est un losange.

3.2 Solutions

Solution de l'exercice 1. Soit $\alpha = \widehat{BMC}$. On a $\sin \alpha = \frac{HC}{MC} = \frac{1}{2}$ donc $\alpha = 30°$ ou bien $\alpha = 150°$. Le triangle MBC est isocèle en M donc $\widehat{MBC} = \frac{180° - \alpha}{2}$, et $\widehat{BAC} = 90° - \widehat{MBC} = \frac{\alpha}{2}$. On a donc deux possibilités : soit $\widehat{MBC} = 15°$, soit $\widehat{MBC} = 75°$. (Remarquons que l'on passe d'une possibilité à l'autre en intervertissant A et B).



Solution de l'exercice 2. Dire que le polygone est convexe revient en pratique à dire que l'intersection O des diagonales est intérieure au polygone. On commence par un raisonnement par l'absurde, c'est-à-dire qu'on suppose que le quadrilatère n'est pas un losange, donc que les côtés n'ont pas tous la même longueur, et on va prouver que l'hypothèse (que les quatre triangles ABO, BCO, CDO, DAO ont même périmètre) ne peut pas être vérifiée. Supposons par exemple que $AD < AB$ - quitte à changer le nom des quatre sommets, on peut toujours se ramener à ce cas-là. Cela signifie que A n'est pas sur la médiatrice Δ de $[BD]$. Plus précisément, Δ partage le plan en deux demi-plans, tout point M de l'un vérifie $MB < MD$, tout point N de l'autre vérifie $NB > ND$.



Dès lors, soit Δ est parallèle à (AC) auquel cas A et O sont dans le même demi-plan : puisque $AD < AB$, $OD < OB$ donc le périmètre de AOD est strictement inférieur au périmètre e AOB. Soit Δ coupe (AC) en Q, et là, de deux choses l'une : si Q n'est pas situé entre O et A, alors O et A sont à nouveau dans le même demi-plan, et le raisonnement ci-dessus prouve que AOD a un périmètre plus petit que AOB. Si Q appartient à $]OA]$, c'est O et C qui sont dans le même demi-plan, $OB \leqslant OD$ (car il faut envisager le cas où $O = Q$), $CB < CD$, donc c'est BCO qui a un périmètre inférieur à celui de CDO. Ce qui achève la démonstration.

4 Exposé : qui a découvert le théorème de Pythagore ?

La réponse semble évidente : Pythagore. Mais ce n'est pas si sûr que cela. On ne sait pas grand-chose de Pythagore, dans la mesure où il n'a lui-même rien écrit et les textes qui parlent de lui sont très tardifs. On sait toutefois qu'il a existé, a vécu de l'an -580 à l'an -497 environ, que c'est avant tout un penseur religieux qui a « élevé l'arithmétique au dessus des besoins des marchands » (Aristoxène). Le nombre a, pour Pythagore, un caractère divin, et les *triplets pythagoriciens* (trois entiers a, b, c tels que $a^2 + b^2 = c^2$) jouent un rôle sans doute plus important en arithmétique qu'en géométrie. Le triangle rectangle de côtés $3, 4, 5$, qu'il connaissait certainement, ne sert pas seulement en mathématiques : la « corde à 13 noeuds » (13 noeuds équidistants, donc 12 intervalles égaux) était utilisée, encore au moyen-âge, notamment pour déterminer des angles droits (triangle $3, 4, 5$) et des angles de $60°$ (triangle $4, 4, 4$). Mais cela ne prouve pas que Pythagore ait effectivement su démontrer son théorème, car on n'a retrouvé aucune trace d'une telle démonstration, même si cela demeure possible avec les outils mathématiques qu'il possédait.

La première preuve rédigée de manière indiscutable se trouve dans les Eléments d'Euclide. Euclide a vécu bien après Pythagore (environ -325 à -265), et cet ouvrage est un des principaux fondements des mathématiques. On y trouve les bases de l'arithmétique, avec notamment la *division euclidienne*, mais également de la géométrie, qu'il construit de manière rigoureuse à partir de cinq axiomes. Ceux-ci doivent être considérés en quelque sorte comme les « règles du jeu », que l'on ne conteste pas et qu'on ne cherche pas à prouver. L'un deux, le *cinquième postulat d'Euclide*, a longtemps intrigué les mathématiciens, car il semblait plus compliqué que les autres, surtout dans sa formulation originelle. En langage moderne, il s'énonce ainsi : *« par un point extérieur à une droite on peut mener une et une seule parallèle à cette droite »* et beaucoup pensaient qu'on devait pouvoir le déduire des quatre autres, que ce n'était pas un véritable axiome. Vers 1733, Saccheri tenta de le démontrer par l'absurde : supposons qu'il soit faux, donc construisons une géométrie reposant sur les quatre premiers axiomes et la négation du cinquième, par exemple : *« par un point extérieur à une droite on ne peut pas mener de parallèle à cette droite »* ou bien *« on peut mener plusieurs parallèles à cette droite »*. Si ce postulat d'Euclide découle effectivement des quatre autres, une telle supposition doit conduire à une contradiction prouvant qu'elle est absurde. Or il n'en est rien : Saccheri a cru que sa démonstration n'aboutissait pas et est tombé dans l'oubli, mais un siècle plus tard, l'idée a été reprise par Lobatchevski et plusieurs autres mathématiciens. Ainsi naquirent les géométries non-euclidiennes qui non seulement n'ont rien d'absurde, mais peuvent être utiles par exemple en physique. Au début du XXième siècle, on a voulu reconstruire l'ensemble des mathématiques à partir d'un nombre limité d'axiomes, mais on a vite découvert que ce n'est pas si simple que cela.

Mais revenons à notre théorème de Pythagore. La démonstration qui figure dans les Eléments d'Euclide (où le théorème n'est pas attribué à Pythagore : parmi un certain nombre de propositions numérotées et démontrées dans l'ordre, celle-ci est la proposition 47) mérite d'être présentée en détails.

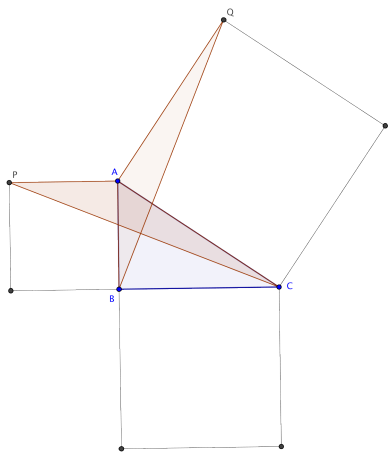


FIGURE 1 – Démonstration d'Euclide

Le carré de l'hypoténuse, c'est en fait l'aire d'un carré construit sur l'hypoténuse. Il s'agit donc de prouver que l'aire du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des carrés construits sur les côtés de l'angle droit. Et pour ce faire, on trace la figure 1 où l'on remarque que les triangles ABQ et APC sont égaux, ou plutôt : isométriques. Ils ont deux côtés égaux : $AB = AP$ et $AQ = AC$ et l'angle construit entre les côtés vaut $90° + \widehat{BAC}$. D'ailleurs, ces triangles se déduisent l'un de l'autre par une rotation de 90° autour de A. Or, sur la seconde figure, on trace la hauteur AH du triangle rectangle, qui recoupe le carré de l'hypoténuse en K. On remarque que les triangles ABQ et AHQ ont même aire, en utilisant un théorème qu'Euclide avait démontré précédemment dans les mêmes Eléments, à savoir : si H et B sont sur une même parallèle à la base AQ, les triangles ABQ et AHQ ont même aire. Cela revient à dire qu'ils ont même base AQ et même hauteur, la distance des deux droites parallèles, donc $AH = QK$. Euclide savait aussi que l'aire d'un tel triangle est la moitié de l'aire du rectangle $AHKQ$, donc la moitié du produit base $\times$ hauteur.

Pour la même raison, sur la figure 3, le triangle APC a même aire que le triangle APB, égale à la moitié de l'aire du carré $ABNP$. On en déduit que le carré $ABNP$ d'un côté AB de l'angle droit, a même aire que le rectangle $AHKQ$.

De la même manière (mais Euclide refait deux fois la démonstration), on prouverait que le triangle BCL a même aire que le triangle HCS (cf figure 4), donc le carré $BCLM$ de l'autre côté BC de l'angle droit a même aire que le rectangle $HCSK$. Comme manifestement, la somme des

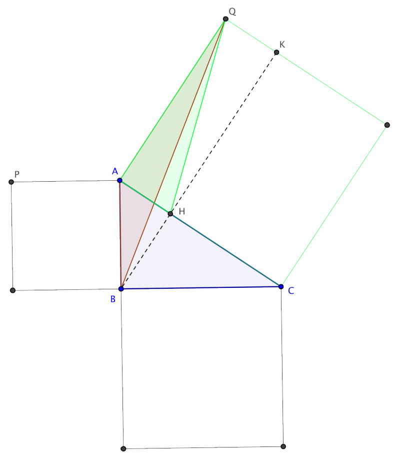


FIGURE 2 – Démonstration d'Euclide

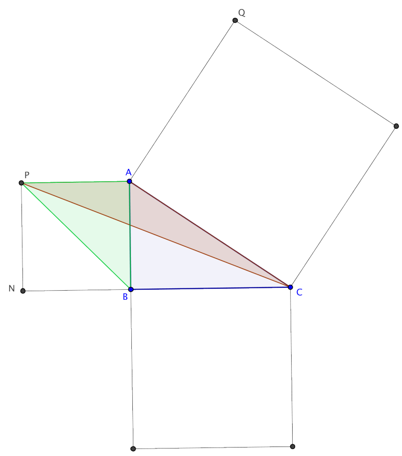


FIGURE 3 – Démonstration d'Euclide

aires des rectangles $AHKQ$ et $HCSK$ est égale à l'aire du carré $ACSQ$, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés.

Mais il existe d'autres démonstrations de ce même théorème, et en règle générale, rares sont les théorèmes qui ne peuvent se démontrer que d'une seule manière. En géométrie notamment, on trouve souvent un grand nombre de solutions différentes d'un même problème, et il n'en existe pas nécessairement une qui soit « la meilleure ». L'ouvrage fondamental des mathématiques chinoises, les neuf chapitres sur l'art mathématique, qui date environ du premier siècle de notre ère, présente le théorème de Pythagore (ou théorème de Gougu) de manière moins théorique qu'Euclide. La démonstration chinoise s'apparente au Tangram, et on s'attarde davantage sur les applications pratiques. Il s'agissait là encore de dessiner le carré de l'hypoténuse, puis de le découper de sorte qu'en déplaçant les trois morceaux grisés (cf figure 5), on puisse reconstituer les carrés des côtés. Cette technique des découpages soulève des problèmes très intéressants en mathématiques. Il existe, notamment, deux théorèmes importants qui s'y rapportent : d'une part, si deux polygones ont même aire, il est toujours possible de découper l'un d'eux en un nombre fini de morceaux qui, assemblés différemment, donnent l'autre polygone. On peut par exemple découper un triangle en morceaux permettant de reconstruire un pentagone, quels que soient le triangle et le pentagone, pour peu que l'aire soit la même. L'autre théorème, c'est que cela ne se généralise pas en dimension 3 : Hilbert avait inclus ce problème, en 1900, dans sa fameuse liste de 23 problèmes dont certains ne sont toujours pas résolus, mais celui-ci fut résolu très vite par Max Dehn, qui a défini un *invariant* qui ne peut pas changer par découpage et recollement. En 1965, le théorème de Sydler prouve que

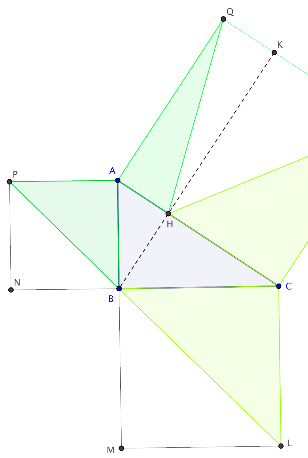


FIGURE 4 – Démonstration d'Euclide

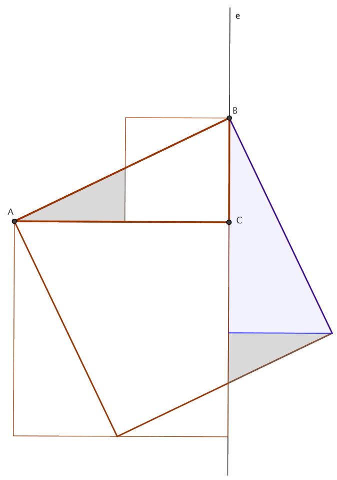


FIGURE 5 – Démonstration de Gougu

si deux polyèdres ont même volume et même invariant de Dehn, on peut les transformer l'un en l'autre par découpage et recollement. Mais un tétraèdre et un cube n'ayant pas même invariant de Dehn, on ne transforme jamais l'un en l'autre par découpage et recollement.

Une démonstration élégante mais plus moderne du théorème de Pythagore ne nécessite aucun découpage. Et guère plus de commentaires. Il suffit de déplacer quatre exemplaires de notre triangle rectangle à l'intérieur d'un carré de côté la somme des côtés de l'angle droit pour que l'aire non recouverte (nécessairement la même dans les deux cas) soit tantôt un carré, le carré de l'hypoténuse (on doit vérifier que c'est bien un carré : les quatre côtés sont manifestement égaux et les quatre angles sont droits, puisque la somme $\alpha + \beta = 90°$), tantôt la somme des carrés des côtés de l'angle droit.

Citons une dernière démonstration qui aurait pu être trouvée par Pythagore. Traçons la hauteur AH du triangle ABC rectangle en A. Elle découpe le triangle en deux triangles HBA et HAC qui chacun sont semblables à ABC. En effet, ils ont chacun un angle droit et un angle commun avec ABC. D'où $\frac{HB}{AB} = \frac{AB}{BC}$, et $\frac{HC}{AC} = \frac{AC}{BC}$. D'où l'on déduit :

$$BC = HB + HC = \frac{AB^2}{BC} + \frac{AC^2}{BC}$$

ou encore : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Pour conclure, je signalerai que Pythagore n'est pas le seul à qui on attribue un théorème sans être sûr qu'il l'ait démontré. Thalès, qui était d'un demi-siècle plus ancien que Pythagore (né vers

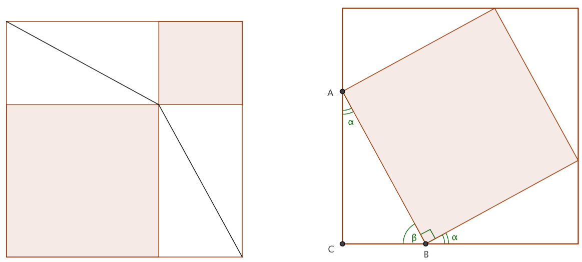


FIGURE 6 – Démonstration plus moderne

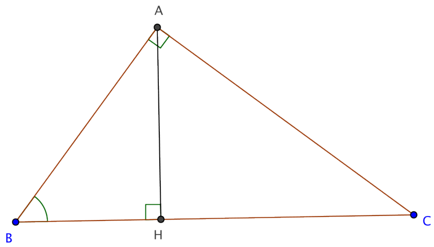


FIGURE 7 – Dernière démonstration

-625, mort vers -547), a démontré plusieurs théorèmes, comme le fait qu'un triangle ayant deux côtés égaux a deux angles égaux. Il est célèbre notamment pour avoir prédit une éclipse de soleil vers -585, avant la naissance de Pythagore. Mais parmi la demi-douzaine de théorèmes qu'il a démontrés ne figure pas celui qui porte son nom. D'ailleurs, les Français l'appellent théorème de Thalès, mais dans beaucoup de pays il porte des noms différents.

E. Mercredi 27 octobre (géométrie)

1 Cours et exercices du matin

1.1 Énoncés

Exercice 1. Soit ABC un triangle. Montrer que l'intersection de la bissectrice issue de $\widehat{B}$ et de la médiatrice de $[AC]$ appartient au cercle circonscrit de ABC.

Exercice 2. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$, $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$ et $\widehat{CBA} = \widehat{C'B'A'}$. Montrer que $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$.

Exercice 3. Soit ABC un triangle. Sur la droite (AC), on place les deux points E et E' tels que les longueurs AE' , AE, AB soient égales et telles que E' soit du côté de C. Montrer qu'alors :

1. les droites (BE) et (BE') sont respectivement parallèles à la bissectrice intérieure et à la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{A}$,
2. le triangle EBE' est un triangle rectangle.

Exercice 4. Soit ABC un triangle aux angles aigus d'orthocentre H. Montrer que les symétriques de H par rapport aux côtés du triangle appartiennent à son cercle circonscrit.

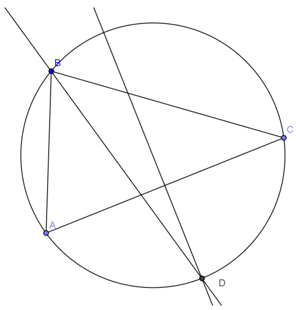
Exercice 5. On considère deux cercles tangents intérieurement en un point C et une corde $[AB]$ du grand cercle tangente au petit cercle en E. Montrer que la droite (CE) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$.

Exercice 6. Soient A_0, B, C trois points non alignés du plan. On note A_1 le centre du cercle inscrit de A_0BC, A_2 celui de A_1BC et ainsi de suite pour construire les points $A_2, A_3, \ldots$. Pour un entier n, calculer le rayon du cercle inscrit de A_nBC.

Exercice 7. Une droite passant par le sommet A d'un triangle équilatéral ABC coupe le côté $[BC]$ en Q et le cercle circonscrit au triangle en P. Montrer que $\frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} = \frac{1}{PQ}$.

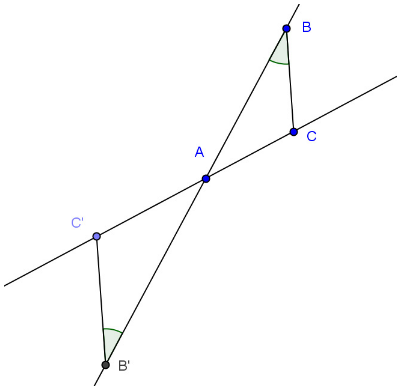
1.2 Solutions

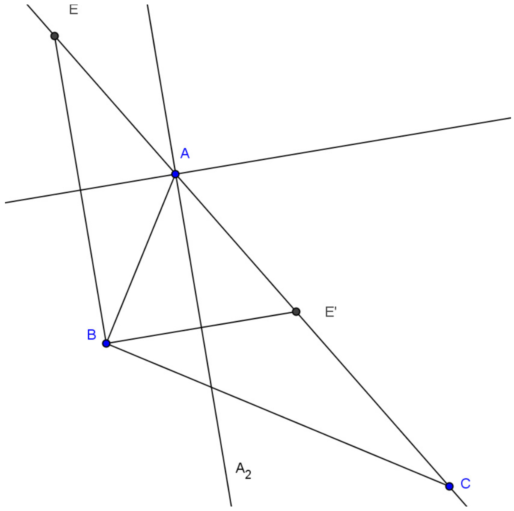
Solution de l'exercice 1. Notons D l'intersection de la bissectrice issue de l'angle $\widehat{B}$ et du cercle circonscrit de ABC. Il faut et il suffit de montrer que D appartient à la médiatrice de $[AC]$. Comme les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{DBC}$ sont égaux, ceci implique les longueurs des arcs $\widehat{AD}$ et $\widehat{DC}$ sont égales, et donc que D appartient à la médiatrice de $[AC]$.



Solution de l'exercice 2. Superposons les deux triangles de sorte que $A = A'$ et que les points B, A, B' et C, A, C' soient respectivement alignés, comme sur la figure ci-dessous.

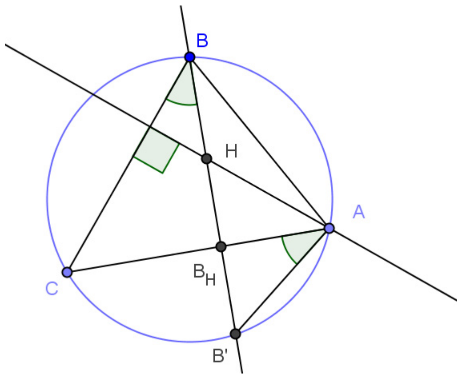
Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{A'B'C'}$ étant égaux, les droites (BC) et $(B'C')$ sont parallèles. On en déduit le résultat par application du théorème de Thalès.





Solution de l'exercice 3. Notons AA_1 et AA_2 respectivement les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle $\widehat{A}$. Les triangles EAB et $E'AB$ sont isocèles, et (AA_1) (resp. (AA_2)) est perpendiculaire à (BE') (resp. à (BE)). Comme (AA_1) et (AA_2) sont perpendiculaires, les droites (BE) et (AA_1), respectivement (BE') et (AA_2) sont parallèles.

Solution de l'exercice 4. Notons B_H le pied de la hauteur issue de B et B' son intersection avec le cercle circonscrit à ABC.



Il suffit de montrer que les angles $\widehat{HAB_H}$ et $\widehat{B_HAB'}$ sont égaux. En effet, dans ce cas, les triangles rectangles HAB_H et B_HAB' auraient trois angles identiques et un angle en commun et seraient alors égaux. Ceci implique $B'B_H = B_HH$ et donc que B' est le symétrique de H par rapport au côté (AC).

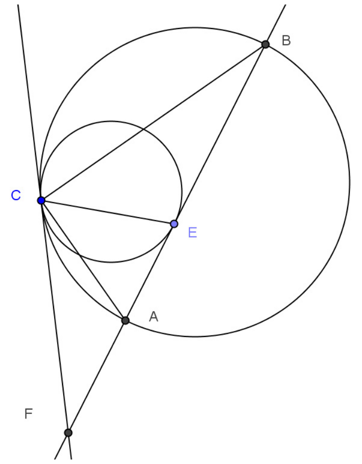
Montrons donc que $\widehat{HAB_H} = \widehat{B_HAB'}$. Notons $\alpha = \widehat{HAB_H}$. Comme les angles $\widehat{HAB_H}$ et $\widehat{CBB'}$ interceptent le même arc, ils sont égaux. On en déduit que $\widehat{CBB'} = \beta$, puis $\widehat{BCA} = 90° - \beta$ car CBB_H est rectangle en B_H. Mais alors $\widehat{CAH} = 90° - \widehat{BCA} = \beta$, ce qu'on voulait montrer.

On démontre de même que les symétriques de H par rapport aux autres côtés appartiennent au cercle circonscrit.

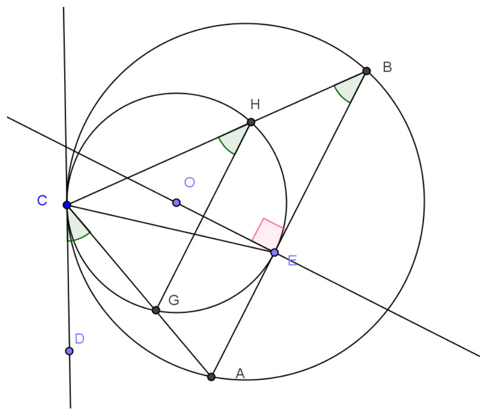
Solution de l'exercice 5. (Première solution) Soit F le point d'intersection de la corde (AB) avec la tangente commune. Les triangles FAC et FCB sont semblables et $FC = FE$. Par suite :

$$\frac{CA}{CB} = \frac{FE}{FB} = \frac{FA}{FE} = \frac{FE - FA}{FB - FE} = \frac{AE}{EB},$$

et la droite (CE) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$.



(Deuxième solution, d'après des idées d'élèves)



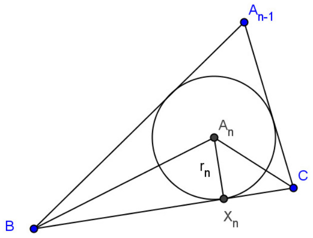
Notons O le centre du petit cercle et soient G, H les points d'intersection de respectivement (CB) et (CA) avec le petit cercle. On introduit le point D comme sur la figure ci-dessus. On commence par faire une petite chasse aux angles pour montrer que (AB) et (GH) sont parallèles. On a $\widehat{ABC} = \widehat{ACD} = \widehat{GHC}$. Donc (AB) et (GH) sont parallèles. Or (OE) et (AB) sont perpendiculaires. Donc (OE) et (GH) sont perpendiculaires. Donc (OE) est la médiatrice de $[GH]$. Donc, d'après le premier exercice, (CE) est la bissectrice de $\widehat{ACB}$.

Solution de l'exercice 6. Notons r_n le rayon cherché et X_n le point de tangence entre le cercle inscrit de A_nBC et $[BC]$. Remarquons qu'en notant $\beta = \widehat{B}$ et $\gamma = \widehat{C}$, on a $\widehat{A_nBC} = \beta/2^n$ et $\widehat{A_nCB} = \gamma/2^n$. On en déduit que $\widehat{BA_nC} = 180° - (\beta+\gamma)/2^n$.D'après la loi des sinus appliquée dans A_nCB :

$$BA_n = BC\frac{\sin\left(\frac{\gamma}{2^n}\right)}{\sin\left(180° - \frac{\beta+\gamma}{2^n}\right)}.$$

Donc $BA_n = BC\sin(\gamma/2^n)/\sin((\beta+\gamma)/2^n)$. Comme BA_nX_n est rectangle, on en déduit que :

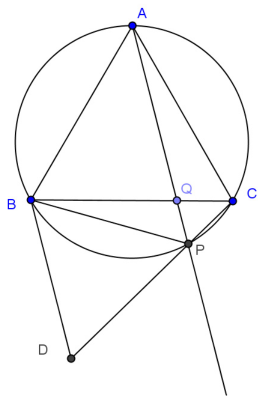
$$r_n = BC\frac{\sin\left(\frac{\gamma}{2^n}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2^n}\right)}{\sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2^n}\right)}.$$



Solution de l'exercice 7. L'angle $\widehat{BPC}$ valant $120°$, on peut prolonger la demi-droite (CP) jusqu'à un point D tel que le triangle BDP soit équilatéral. Alors les droites (AP) et (BD) sont parallèles, et les triangles BCD et QCP sont semblables. On en déduit que :

$$\frac{BD}{QP} = \frac{CD}{CP} = 1 + \frac{PD}{CP}.$$

En divisant cette égalité par $BD = PB = PD$, on obtient l'égalité demandée.



2 Test de géométrie

2.1 Énoncés

Exercice 1. Soit ABC un triangle dont les trois angles sont aigus. On note D le pied de la hauteur issue de A. On construit quatre points H, E, F, G tels que :

1. $DCGF$ et $BDEH$ soient des carrés,
2. E et F appartiennent à (AD),
3. H et A ne sont pas du même côté de (BC),
4. G et A ne sont pas du même côté de (BC).

Montrer que les droites (AD), (BG) et (HC) se coupent en un même point.

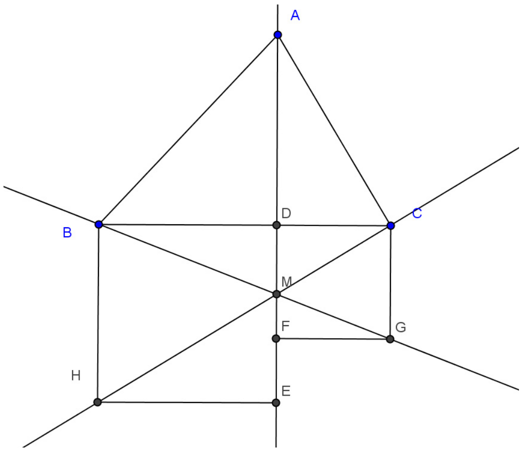
Exercice 2. On considère deux cercles Γ_1 et Γ_2 qui se coupent en M et N. Soit (AB) la droite tangente aux deux cercles avec $A \in \Gamma_1, B \in \Gamma_2$ et telle que M est plus proche que N de (AB). Soit (CD) la droite passant par M et parallèle à (AB) avec $C \in \Gamma_1, D \in \Gamma_2$. Les droites (AC) et (BD) se coupent en E, les droites (AN) et (CD) en P, les droites (BN) et (CD) en Q. *Les questions 1. et 2. sont indépendantes.*

1. Montrer que les triangles AMB et AEB sont semblables.
2. Soit K l'intersection de (MN) et (AB). Montrer que $KA = KB$ et en déduire que $PM = QM$.

3. En déduire que $EP = EQ$.

Exercice 3. Soient MNP un triangle, I un point de $[MN]$ tel que (PI) soit la bissectrice de l'angle $\widehat{P}$, et E et F les intersections de la médiatrice de $[MN]$ avec le cercle circonscrit au triangle MNP. On suppose que E et P sont de part et d'autre de (MN). Montrer que $EN^2 = EI \cdot EP$.

2.2 Solution



Solution de l'exercice 1.

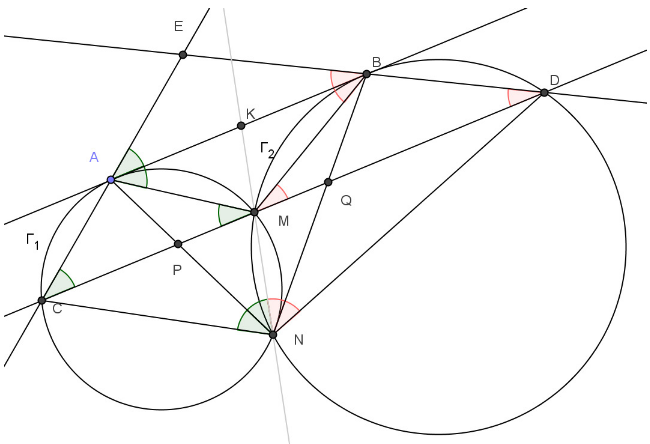
Les trois droites $(BH), (DF)$ et (CG), perpendiculaires à la même droite (BC),sont parallèles. Notons M l'intersection de (BG) et de (DF), M' l'intersection de (CH) avec DF. On va montrer que $M = M'$. D'après le théorème de Thalès, $DM/CG = BD/BC$. Donc, comme $CG = DC$, on a :

$$DM = \frac{BD \cdot DC}{BD + DC}.$$

De même, d'après le théorème de Thalès, $DM'/BH = CD/CB$. Donc, comme $BH = BD$, on a :

$$DM' = \frac{BD \cdot DC}{BD + DC}.$$

Donc $DM = DM'$. Comme M et M' ne sont pas de part et d'autre de D, il vient $M = M'$ et le résultat en découle.

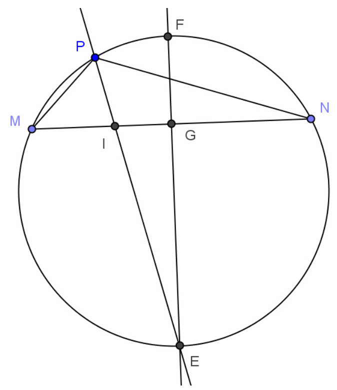


Solution de l'exercice 2.

1. Soit K le point d'intersection de (MN) et de (AB). Alors en calculant la puissance de K par rapport aux deux cercles, il vient : $KA^2 = KM \cdot KN = KB^2$. Donc $KA = KB$, ce qui implique, grâce au théorème de Thalès que $PM = QM$.
2. On fait une chasse aux angles : $\widehat{EAB} = \widehat{ACD} = \widehat{BAM}$ et de même $\widehat{EBA} = \widehat{BDM} = \widehat{ABM}$. Ainsi, les triangles AEB et ABM sont semblables.

3. Le raisonnement de la question précédente montre que les triangles AEB et ABM sont « égaux », au sens qu'il suffit de faire une symétrie d'axe (AB) pour envoyer AEB sur AMB. En particulier, (EM) et (AB) sont orthogonales. Or M est le milieu de $[PQ]$. Donc (EM) est la médiatrice de $[PQ]$ ce qui implique $EP = EQ$.

Solution de l'exercice 3. Soit G le milieu de $[MN]$. Alors les triangles rectangles EIG et EFP sont semblables, d'où $EI \cdot EP = EG \cdot EF$. Comme les triangles rectangles EGN et EFN sont semblables, on a $EG \cdot EF = EN^2$. Il en découle que $EI \cdot EP = EN^2$.



3 Exercice du jour

3.1 Énoncé

On considère deux cercles Γ_1 et Γ_2 qui se coupent en M et N. Soit (AB) la droite tangente aux deux cercles avec $A \in \Gamma_1, B \in \Gamma_2$ et telle que M est plus proche que N de (AB). Soit (CD) la droite passant par M et parallèle à (AB) avec $C \in \Gamma_1, D \in \Gamma_2$. Les droites (AC) et (BD) se coupent en E, les droites (AN) et (CD) en P, les droites (BN) et (CD) en Q. Montrer que (EN) est la bissectrice de $\widehat{CND}$.

3.2 Solution

Solution de l'exercice 1. Notons $\alpha = \widehat{EAB} = \widehat{ACM}$ (en vert sur la figure de l'exercice 2 du test de géométrie). Grâce aux propriétés des angles inscrits, on voit que $\widehat{ANN} = \alpha$. Grâce à des angles alternes-internes, on voit que $\widehat{AMC} = \alpha$, ce qui implique $\widehat{ANC} = \alpha$. De même, en notant $\beta = \widehat{EBA}$, on voit que $\beta = \widehat{BDM} = \widehat{BMD} = \widehat{BNM} = \widehat{BND}$ (en rouge sur la figure).

Or, le triangle AEB a deux angles égaux respectivement α et β. Donc $\widehat{AEB} = 180° - \alpha - \beta$. Or $\widehat{ANB} = \alpha + \beta$. Donc A, E, B, N sont cocycliques. Donc $\widehat{ANE} = \widehat{ABE} = \beta$ et $\widehat{ENB} = \widehat{EAB} = \alpha$. Ainsi, $\widehat{CNE} = \alpha + \beta = \widehat{END}$. La droite (EN) est donc bien la bissectrice de $\widehat{CND}$.

F. Jeudi 28 octobre (algèbre)

1 Cours et exercices du matin

Exercice 1. Soient a et b deux nombres positifs tels que $\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}=1$. Montrer que $\frac{a}{1+b^2}-\frac{b}{1+a^2}=a-b$.

Solution de l'exercice 1. Simplifions l'hypothèse en faisant tout passer dans le membre de gauche et en réduisant au même dénominateur :

$$\frac{a(1+b)}{(1+a)(1+b)}+\frac{b(1+a)}{(1+a)(1+b)}-\frac{(1+a)(1+b)}{(1+a)(1+b)}=\frac{ab-1}{(1+a)(1+b)}=0$$

donc $ab=1$. Dans la seconde expression, en multipliant numérateur et dénominateur par le même a, $\frac{a}{1+b^2}=\frac{a^2}{a+ab^2}=\frac{a^2}{a+b}$ car $ab=1$, donc $ab^2=b$. Pour la même raison, $\frac{b}{1+a^2}=\frac{b^2}{b+a}$. D'où : $\frac{a}{1+b^2}-\frac{b}{1+a^2}=\frac{a^2-b^2}{a+b}=a-b$

1.1 Rappel des identités remarquables

Pour tous a, b :

$$\begin{aligned}(a+b)^2&=a^2+2ab+b^2\\ a^2-b^2&=(a-b)(a+b)\\ (a+b)^3&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\ a^3-b^3&=(a-b)(a^2+ab+b^2)\end{aligned}$$

ce qui se généralise...

1.2 Factorisation de Sophie Germain

Exercice 2. Pour n entier au moins égal à 2, n^4+4 n'est jamais un nombre premier.

Solution de l'exercice 2. En effet, $n^4+4=\left(n^2+2\right)^2-(2n)^2=\left(n^2-2n+1\right)(n2+2n+1)$. Or chacun des facteurs est un entier strictement supérieur à 1, si $n>1$, car $n^2-2n+2=(n-1)^2+1$.

Exercice 3. Soient u et v deux réels. On pose $s=u+v$, $p=uv$. Calculer u^3+v^3 en fonction de s et p.

Solution de l'exercice 3. On a

$$s^3=(u+v)^3=u^3+3u^2v+3uv^2+v^3=u^3+v^3+3uv(u+v)=u^3+v^3+3sp$$

donc $u^3+v^3=s^3-3sp$.

1.3 Formule de Cardan

Cette méthode de résolution de l'équation du troisième degré, découverte au XVIième siècle, a joué un rôle important dans l'histoire des mathématiques. Nous nous limiterons à un exemple numérique.

On cherche pour quelle valeur de x on a $x^3 + 3x + 6 = 0$. Pour cela, on utilise l'exercice précédent en recherchant deux nombres u et v tels que $uv = -1$ et tels que $x = u + v$ soit solution de cette équation. On a $x^3 = (u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = u^3 + v^3 - 3x$ car par hypothèse $uv = -1$. Donc $x^3 + 3x + 6 = u^3 + v^3 + 6 = u^3 + \left(\frac{-1}{u}\right)^3 + 6$, soit en multipliant par u^3 :

$$\left(u^3\right)^2 + 6u^3 - 1 = 0.$$

Donc u^3 est solution d'une équation du second degré, et on sait résoudre les équations du second degré :

$$\left(u^3 + 3\right)^2 - 10 = 0$$

donc $u^3 = -3 + \sqrt{10}$ ou $u^3 = -3 - \sqrt{10}$.

Mais pour tout réel y, il existe un réel z tel que $z^3 = y$, et on le note : $z = \sqrt[3]{y}$. En outre, comme $\left(-3 + \sqrt{10}\right)\left(-3 - \sqrt{10}\right) = -1$ si $u^3 = -3 + \sqrt{10}$, alors $v^3 = -3 - \sqrt{10}$ et inversement (car par hypothèse $uv = -1$). En définitive, cette méthode donne une solution de l'équation

$$x = u + v = \sqrt[3]{-3 + \sqrt{10}} + \sqrt[3]{-3 - \sqrt{10}}$$

et on peut vérifier numériquement que ce nombre est bien la seule solution réelle de l'équation. Le problème que cela posait, c'est que pour certaines équations du troisième degré, notamment celles qui admettent trois racines, l'équation intermédiaire du second degré n'admet pas de racines réelles, et l'idée vint à Cardan de dire qu'elle avait quand même des racines, mais « imaginaires », et qu'en passant par ces racines imaginaires on pouvait trouver les racines réelles de l'équation de départ. C'est donc à partir de là que l'on a créé les nombres complexes, mais il a fallu plus de deux siècles pour les définir de manière satisfaisante.

Exercice 4. Montrer que $(a-b)(b-c)(c-a) = a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2) = a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a) = ab(b-a) + bc(c-b) + ca(a-b)$.

Solution de l'exercice 4. Il suffit de développer : $(a-b)(b-c)(c-a) = \left(ab - ac - b^2 + bc\right)(c-a) = abc - a^2b - ac^2 + a^2c + bc^2 - bca$. Les termes en abc s'annulent et en regroupant les autres deux par deux de trois manières différentes, on obtient les trois égalités demandées.

Exercice 5. Pour quelle valeur de k a-t-on l'identité (vraie quels que soient a, b, c) :

$$(a + b)(b + c)(c + a) = (a + b + c)(ab + bc + ca) + kabc \ ?$$

Solution de l'exercice 5. Il suffit de développer chacun des deux membres. Tous les termes sont identiques sauf les termes en abc qui apparaissent deux fois à gauche et $3 + k$ fois à droite. Donc $k = -1$. On remarquera que pour $a = b = c = 1$, on obtient : $8 = 9 + k$, donc la seule valeur possible de k est -1, mais cela ne dispense pas de faire le calcul pour prouver l'identité lorsque $k = -1$.

Exercice 6. a) Montrer que si $a^2 + b^2 = a + b = 1$, alors $ab = 0$. b) Montrer que si $a^3 + b^3 + c^3 = a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c = 1$, alors $abc = 0$.

Solution de l'exercice 6. Le a) résulte immédiatement de $(a + b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab$. Pour le b), l'identité ci-dessus se généralise : $(a+b+c)^2 = \left(a^2 + b^2 + c^2\right) + 2(ab+bc+ca)$, d'où $ab+bc+ca = 0$. Or un calcul analogue donne $\left(a^2 + b^2 + c^2\right)(a+b+c) = \left(a^3 + b^3 + c^3\right) + (ab+bc+ca)(a+b+c) - 3abc$. Si $a^3 + b^3 + c^3 = a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c = 1$, comme $ab + bc + ca = 0$, on doit avoir également $abc = 0$.

2 Cours et exercices de l'après-midi

2.1 Exercices

Exercice 1. 1) Prouver que, pour tous réels a et b, on a

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab \text{ et } (a+b)^2 \geqslant 4ab.$$

2) Prouver que, pour tous réels positifs x et y, on a

$$x + y \geqslant 2\sqrt{xy}.$$

3) Prouver que, pour tout réel $x > 0$, on a

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2.$$

4) Prouver que, pour tout réel a, on a

$$a(1-a) \leqslant \frac{1}{4}.$$

Exercice 2. Prouver que, pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tous réels $a, b > 0$, on a

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geqslant 2^{n+1}.$$

Exercice 3 (Test entrée OFM 2010)**.** Prouver que, pour tout réel $x \geqslant 0$, on a

$$1 + x^{2006} \geqslant \frac{(2x)^{2005}}{(1+x)^{2004}}.$$

Exercice 4. Prouver que, pour tous réels a, b, c, d tels que $a + b + c + d = 1$, on a

$$ab + bc + cd + da \leqslant \frac{1}{4}.$$

Exercice 5. Prouver que, pour tous réels a, b, c, on a

$$a^2 + 4b^2 + 8c^2 \geqslant 3ab + 4bc + 2ca.$$

Exercice 6 (d'après OIM 2008)**.** Soient x, y, z des réels, tous différents de 1, et tels que $xyz = 1$. Prouver que

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geqslant 1.$$

Exercice 7 (Test OFM 2008)**.** Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ un polynôme à coefficients réels positifs ou nuls.

Prouver que, pour tout réel x non nul, on a

$$P(x)P\left(\frac{1}{x}\right) \geqslant [P(1)]^2.$$

Exercice 8. Soit x, y, z des réels tels que

$$\begin{cases} x^3 = 2y - 1 \\ y^3 = 2z - 1 \\ z^3 = 2x - 1 \end{cases}$$

Prouver que $x = y = z$.

Exercice 9 (Inégalité de Schur)**.** 1) Prouver que, pour tous réels $a, b, c > 0$, on a

$$a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) \geqslant 0.$$

2) Prouver que, pour tout réel t et tous réels $a, b, c > 0$, on a

$$a^t(a-b)(a-c) + b^t(b-c)(b-a) + c^t(c-a)(c-b) \geqslant 0.$$

2.2 Solution

La plupart des exercices « olympiques » possèdent une solution simple, voire très simple, et il est souvent plus utile d'être un peu malin que d'avoir énormément de connaissances. Nous allons voir que du seul argument « Un carré, c'est positif ! », il va être possible, de proche en proche, de résoudre des exercices qui ont en fait sécher plus d'un...

Solution de l'exercice 1. 1) Les deux inégalités se réécrivent $(a-b)^2 \geqslant 0$, ce qui est clairement vrai. Notons que l'égalité a lieu si et seulement si $a=b$.

2) L'inégalité se réécrit $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geqslant 0$ ce qui conclut. Ou alors, on peut utiliser directement le 1) pour $a=\sqrt{x}$ et $b=\sqrt{y}$. L'égalité a lieu si et seulement si $x=y$.

3) On utilise le 2) (par exemple) pour $y=\frac{1}{x}$ et c'est déjà fini... Il y a égalité si et seulement si $x=1$.

4) On revient au 1), avec $b=1-a$ et on a alors $4a(1-a) \leqslant (a+(1-a))^2$, ou encore $4a(1-a) \leqslant 1$ ce qui est bien ce que l'on voulait... On peut aussi remarquer que $a(1-a) = -a^2+a = -(a-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{4}$. Enfin, on note qu'il y a égalité si et seulement si $a=\frac{1}{2}$.

Solution de l'exercice 2. On a

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{a}{b}\right)^n+\left(1+\frac{b}{a}\right)^n &\geqslant 2\sqrt{\left(1+\frac{a}{b}\right)^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n} \text{ d'après exo 1-2), avec égalité ssi } a=b\\
&= 2\sqrt{\left[\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{a}\right)\right]^n}\\
&= 2\sqrt{\left(2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^n}\\
&\geqslant 2\sqrt{(2+2)^n} \text{ d'après exo 1-3), avec égalité ssi } a=b\\
&= 2\sqrt{4^n}\\
&= 2^{n+1}.
\end{aligned}$$

L'égalité a lieu si et seulement si $a=b$.

Solution de l'exercice 3. D'après l'exercice 1 question 2), on a $1+x^{2006} \geqslant 2\sqrt{x^{2006}} = 2x^{1003}$ (avec égalité ssi $x=1$). De plus, on a $(1+x)^{2004} \geqslant (2\sqrt{x})^{2004} = 2^{2004}x^{1002}$ (avec égalité ssi $x=1$). Et ainsi, puisque tout est positif, il vient $(1+x^{2006})(1+x)^{2004} \geqslant (2x)^{2005}$, ce qui conclut. Il y a égalité si et seulement si $x=1$.

Solution de l'exercice 4. D'après l'exercice 1 question 4), on a

$$ab+bc+cd+da = (a+c)(b+d) = (a+c)(1-(a+c)) \leqslant \frac{1}{4}.$$

L'égalité a lieu si et seulement si $a+c=b+d=\frac{1}{2}$.

Solution de l'exercice 5. Première solution. D'après l'exercice 1 question 1), on a $\frac{3}{4}a^2+3b^2 \geqslant 2(\frac{\sqrt{3}a}{2})(\sqrt{3}b) = 3ab$, avec égalité ssi $a=2b$ et $\frac{1}{4}a^2+4c^2 \geqslant 2(\frac{a}{2})(2c) = 2ac$, avec égalité ssi $a=4c$ et $b^2+4c^2 \geqslant 2(b)(2c) = 4bc$, avec égalité ssi $b=2c$. En sommant, il vient $a^2+4b^2+8c^2 \geqslant 3ab+4bc+2ca$. L'égalité a lieu si et seulement si $a=2b=4c$.

Seconde solution. La même chose que ci-dessus, mais en revenant aux carrés :

$$a^2+4b^2+8c^2-3ab-4bc-2ca = \left(\frac{a}{2}-2c\right)^2+(b-2c)^2+\frac{3}{4}(a-2b)^2.$$

Solution de l'exercice 6. On pose $a=\frac{x}{x-1}, b=\frac{y}{y-1}$ et $c=\frac{z}{z-1}$. Ainsi, $x=\frac{a}{a-1}, y=\frac{b}{b-1}$ et $z=\frac{c}{c-1}$. Il est facile de vérifier que lorsque x décrit $\mathbb{R}-\{1\}$, alors a décrit également $\mathbb{R}-\{1\}$. Il en est de même de b et c.

La contrainte $xyz = 1$ s'écrit $abc = (a-1)(b-1)(c-1)$ ou encore

$$ab + bc + ca + 1 = a + b + c. \tag{F.1}$$

L'inégalité à prouver s'écrit $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 1$ Or :

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \\ &= (a+b+c)^2 - 2(a+b+c) + 2 \text{ d'après (F.1)} \\ &= (a+b+c-1)^2 + 1 \\ &\geqslant 1. \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 7. On a

$$\begin{aligned} P(x)P(\frac{1}{x}) &= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{1}{x^i}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i^2 + \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j \left(\frac{x^j}{x^i} + \frac{x^i}{x^j}\right) \\ &\geqslant \sum_{i=0} a_i^2 + \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} 2a_i a_j \text{ d'après exo 1-3)} \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i^2 \\ &= [P(1)]^2 \end{aligned}$$

Et parfois, il ne faut même rien savoir du tout, juste mettre un peu d'ordre... est-ce plus facile pour autant ?

Solution de l'exercice 8. Sans perte de généralité, on peut supposer que $x \geqslant y, z$. Alors, d'après le système, on a $0 \leqslant x^3 - y^3 = 2(y-z)$, ce qui assure que $z \leqslant y$. Mais alors, $0 \leqslant y^3 - z^3 = 2(z-x)$, et ainsi $x \leqslant z$. Finalement, on a $x \leqslant z \leqslant y \leqslant x$, d'où $x = y = z$.

Solution de l'exercice 9. On prouve directement le cas général 2), puisque le 1) ne correspond qu'au cas $t = 1$. L'inégalité à prouver étant symétrique, on peut imposer une contrainte d'ordre.

- Si $t \geqslant 0$, on suppose que $a \geqslant b \geqslant c > 0$.
- Si $t < 0$, on suppose que $c \geqslant b \geqslant a > 0$.

Dans tous les cas, on vérifie facilement que $a^t(a-b)(a-c) \geqslant b^t(b-c)(a-b)$ et $c^t(c-a)(c-b) \geqslant 0$. En sommant, il vient bien $a^t(a-b)(a-c) + b^t(b-c)(b-a) + c^t(c-a)(c-b) \geqslant 0$. On peut noter que l'égalité a lieu si et seulement si $a = b = c$.

G. Vendredi 29 octobre (algèbre)

1 Test d'algèbre

1.1 Énoncés

Exercice 1. Soient a et b deux nombres vérifiant

$$\frac{a}{1+b}+\frac{b}{1+a}=1$$

Montrer que $a^3+b^3=a+b$.

Exercice 2. A trois nombres strictement positifs a, b et c on associe :

$$u=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$
$$v=\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}$$

1. Montrer que quels que soient a, b, c, $u+v\geqslant 6$.
2. Montrer que quels que soient a, b, c, $uv\geqslant 9$.
3. Quelle est la valeur minimale de : u^2+v^2 ?

Exercice 3. Soient a, b, c des nombres tels que $0<c\leqslant b\leqslant a$. Prouver que

$$\frac{a^2-b^2}{c}+\frac{c^2-b^2}{a}+\frac{a^2-c^2}{b}\geqslant 3a-4b+c.$$

1.2 Solution

Solution de l'exercice 1. On a $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, il suffit donc de montrer que $a^2-ab+b^2=1$. Or, $\frac{a}{1+b}+\frac{b}{1+a}=1$ donc $a(1+a)+b(1+b)=(1+a)(1+b)$, c'est-à-dire $a+a^2+b+b^2=1+a+b+ab$, d'où $a^2-ab+b^2=1$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 2. Cet exercice repose sur l'inégalité $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$ pour tout x strictement positif. Rappelons que cela équivaut à $\left(x^2+1\right)-2x\geqslant 0$, or $x^2-2x+1=(x-1)^2$. En l'occurrence, $\frac{a}{b}>0$, donc $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$.

1. En regroupant deux par deux les termes de $u+v$, on a $u+v=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\geqslant 6$.

2. En développant le produit, on trouve

$$uv=3+\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{bc}{a^2}\right)+\left(\frac{b^2}{ca}+\frac{ca}{b^2}\right)+\left(\frac{c^2}{ab}+\frac{ab}{c^2}\right)\geqslant 9$$

pour une raison analogue.

3. En développant le carré, on remarque que : $u^2=\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)+2v$. Donc $u^2+v^2=\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)+\left(\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{b^2}\right)+\left(\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{c^2}\right)+2(u+v)\geqslant 18$. Or pour $a=b=c=1$, $u=v=3$ donc $u^2+v^2=18$: 18 est bien la valeur minimale de u^2+v^2 (atteinte pour au moins une valeur de (a,b,c).

Solution de l'exercice 3. On a $a+b \geqslant 2c$ et $a-b \geqslant 0$ donc $\frac{a^2-b^2}{c} = (a-b)\frac{a+b}{c} \geqslant 2(a-b)$. De même, on a $a+c \geqslant b$ et $a-c \geqslant 0$ donc $\frac{a^2-c^2}{b} = (a-c)\frac{a+c}{b} \geqslant a-c$. De plus, on a $b+c \leqslant 2a$ et $c-b \leqslant 0$ donc $\frac{c^2-b^2}{a} = (c-b)\frac{b+c}{a} \geqslant 2(c-b)$. En sommant, il vient $\frac{a^2-b^2}{c} + \frac{c^2-b^2}{a} + \frac{a^2-c^2}{b} \geqslant 3a-4b+c$.