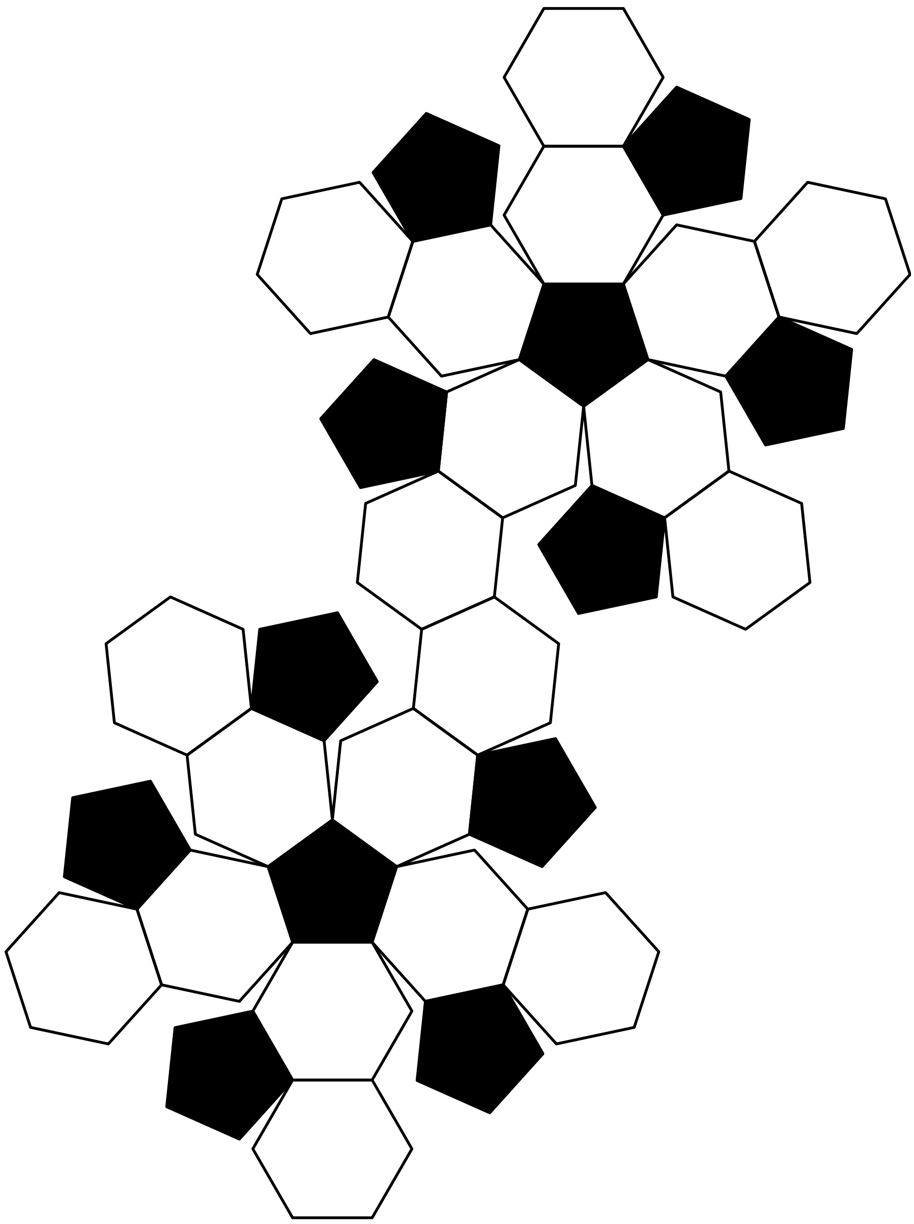
Stage olympique de Grésillon II



Du 18 au 27 août 2008

Stage olympique de Grésillon, août 2008

Avant-propos

Le stage de Grésillon a été organisé par Animath.

Son objet a été de rassembler les lauréats de diverses compétitions mathématiques et de les faire travailler sur des exercices en vue de la formation de l'équipe qui représentera la France à l'Olympiade internationale de mathématiques en Allemagne en juillet 2009.

Nous tenons à remercier le château de Grésillon pour son excellent accueil.

Table des matières

I Le trombinoscope **7**

II Déroulement du stage **11**

III Les exercices de la première mi-temps **15**
1 La muraille . . . 15
1.1 Les énoncés . . . 15
1.2 Les solutions . . . 17
2 En TD . . . 22
2.1 Les énoncés . . . 22
2.2 Les solutions . . . 33
3 En TND . . . 58
3.1 Les énoncés . . . 58
3.2 Les solutions . . . 60
4 En test . . . 67
4.1 Le test de mi-parcours . . . 67
4.2 Les solutions . . . 67

IV Les exercices de la seconde mi-temps **71**
1 En TD . . . 71
1.1 Les énoncés . . . 71
1.2 Les solutions . . . 80
2 En TND . . . 113
2.1 Les énoncés . . . 113
2.2 Les solutions . . . 114
3 En test . . . 115
3.1 Le test de géométrie . . . 116
3.2 Le test d'arithmétique . . . 116
3.3 Le test final . . . 117
3.4 Les solutions . . . 117

V Les exercices de TPE **125**
1 Les énoncés . . . 125
2 Les solutions . . . 134

VI Divers **165**
1 Transparents de l'exposé d'Antoine . . . 165
2 Sujets des OIM 2008 . . . 168
3 Sujets des OIM 2007 . . . 168
4 Le coin des élèves . . . 169

I. Le trombinoscope

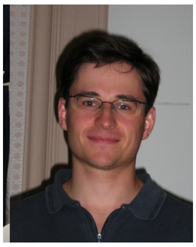
Les profs


Pierre Bornsztein


Sandrine Caruso


Xavier Caruso


Pierre Dehornoy


Igor Kortchemski


Bodo Lass


François Lo Jacomo


Sébastien Martineau


Benjamin Scellier


Antoine Taveneaux


Johan Yebbou


Maxime Zavidovique


David Zmiaikou

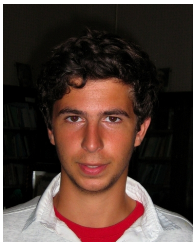
Les élèves

Victor Adam

Aloÿs Augustin

François Caddet

Jacques Darné



Grégoire de Lambert

Noé de Rancourt

Gaspard Ferey

Andrea Fogari

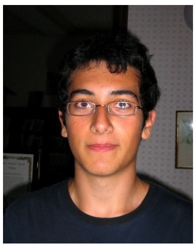
Diane Gallois-Wong

Jean Garcin

Fabian Gundlach

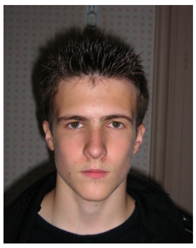
Yiyi Huang

Marc Josien



Nicolas Klarsfeld

Christoph Kröner



Emmanuel Lecouturier


Tristan Léger


Luc Lehéricy


Thomas Lehéricy


Anthony Mancini


Ambroise Marigot


Jean-François Martin


Charles Masson


Sébastien Miquel


Jaouad Mourtada


Fabien Ozouf


Gabriel Pallier


Matthieu Piquerez


Victor Quach


Vincent Sebag


Stefano Spigler


Nikolas Stott


Sergio Vega


Pietro Vertechi


Christopher Wells


Thomas Williams

II. Déroulement du stage

La journée du lundi 18 août a été consacrée à l'accueil des élèves. Afin de juger de leur niveau, ils passaient une courte évaluation orale, dispensée par Antoine et Xavier. Puis, en attendant l'arrivée de tout le monde, ils pouvaient s'occuper en consultant les livres de la bibliothèque, les panneaux culturels affichés au mur, ou encore en essayant de résoudre les quelques exercices de la muraille, également affichés au mur et classés par niveau de difficulté. Cette année, étant donné le nombre important d'élèves, nous avons décidé de former trois groupes de niveau (**O**lympiques, **I**ntermédiaires et **M**armots), les élèves pouvant choisir leur groupe en début de chaque cours selon leur aisance avec le thème enseigné. Le programme détaillé de la semaine est donné dans le tableau II.1.

Le stage s'est déroulé en deux mi-temps. La première a commencé par une journée consacrée aux stratégies de base, puis, tandis que le groupe **M** suivait des cours en arithmétique et en géométrie, destinés à rappeler les principales connaissances de base des programmes de collège et lycée, les deux autres groupes étudiaient des thèmes variés. La deuxième mi-temps était consacrée essentiellement, et pour tous les groupes, à l'arithmétique et à la géométrie. Les cours de géométrie du samedi matin et celui d'arithmétique du lundi matin ont débutés par une heure commune à tous, pendant laquelle un cours rapide était présenté. Pendant les deux heures suivantes, le groupe **M** revoyait plus en détail le cours de la première heure. Le groupe **I** suivait un cours plus complet et plus poussé, et le groupe **O** commençait directement une séance d'exercices de niveau avancé, agrémentée au besoin de points de cours. Pendant cette deuxième mi-temps, le groupe **O** a également étudié d'autres domaines, tels la combinatoire et l'algèbre, pendant que les autres groupes avaient droit à des séances d'exercices supplémentaires de géométrie ou d'arithmétique.

On distinguait deux types de séance d'exercices, les TD et les TND.

Les TD étaient des séances d'exercices « classiques », pendant lesquelles les élèves réfléchissaient, avec l'aide du professeur, sur un certain nombre d'exercices. L'enseignant dispensait une correction des exercices au fur et à mesure, et n'hésitait pas à apporter individuellement son aide aux élèves.

Les TND fonctionnaient de la façon suivante. Le professeur donnait aux élèves un exercice sur lesquel ils planchaient seuls pendant au moins une heure. À l'issue de cette réflexion, les idées de chacun étaient confrontées puis l'exercice corrigée. Lorsque tout fonctionnait bien, deux exercices pouvaient être traitées pendant une séance.

En plus des cours et de ces séances d'exercices, les élèves ont eu à plancher sur plusieurs tests en temps limité. Le premier a eu lieu entre les deux mi-temps, et traitait de thèmes divers étudiés lors de la première mi-temps. Puis, la géométrie et l'arithmétique ont donné lieu chacun à un test sur ce thème. Enfin, le dernier test, portant sur les connaissances acquises tout au long du stage, a eu lieu le dernier jour, dans des conditions les plus proches possibles de celles des olympiades internationales.

Chaque test comportait en tout cinq exercices, classés par niveau ; le groupe **M** devait plancher sur les trois premiers, le groupe **I** sur les trois du milieu et le groupe **O** sur les trois derniers. C'étaient les enseignants qui répartissaient les élèves dans ces groupes de niveau pour les tests.

		Olympique	**I**ntermédiaire	**M**armots
Lundi 18	journée	Arrivée et accueil des élèves		
	18h – 19h	Présentation du stage		
Mardi 19	9h – 12h	Cours strat./graphes		Cours strat.
	13h30 – 15h45	TD strat./graphes		TD strat.
	16h – 18h	TND strat./graphes		TND strat.
	20h30 – 22h	Exposé : *Cette conférence s'arrêtera-t-elle ?*		
Mercredi 20	9h – 12h	Cours/TD logique		Cours arith.
	13h30 – 15h45	Cours/TD éq. fonctionnelles		TD arith.
	16h – 18h	TND éq. fonctionnelles		TND arith.
Jeudi 21	9h – 12h	Cours inégalités		Cours géom.
	13h30 – 15h45	TD inégalités		TD géom.
	16h – 18h	TND inégalités		TND géom.
	20h30 – 22h	Projection du film *Dimensions*		
Vendredi 22	9h – 12h	Test de mi-parcours		
	17h – 18h	Correction	Correction	Correction
	20h30 – 22h	Projection du film *Dimensions*		
Samedi 23	9h – 12h	Cours/TD géom.	Cours géom.	Cours géom.
	14h – 17h	TND géom.	TD géom	Cours/TD géom.
	17h – 18h	TPE		
Dimanche 24	9h – 12h	Cours/TD combi.	TND géom.	TD géom.
	14h – 17h	Test de géométrie		
	17h – 18h	Correction	Correction	Correction
	20h30 – 22h	Exposé sur la cryptographie		
Lundi 25	9h – 12h	Cours/TD arith.	Cours arith.	Cours arith.
	14h – 17h	Cours/TD algèbre	TD arith	Cours/TD arith.
	17h – 18h	TND arith.	TPE	
	20h30 – 22h	Présentation des OIM		
Mardi 26	9h – 12h	TND combi/alg.	TND arith.	TD arith.
	14h – 17h	Test d'arithmétique		
	17h – 18h	Correction	Correction	Correction
Mercredi 27	8h – 11h	Test final		
	après-midi	Départ des élèves		

Tab. II.1 – Planning du stage

À l'issue des trois premiers tests, des séances de correction d'une heure ont permis de donner une solution à l'exercice le plus facile pour chaque niveau, et éventuellement, dans l'ordre, les suivants lorsque le temps le permettait.

Deux séances (une seule pour le groupe **O**) obligatoires étaient consacrées aux *travaux pilotés électroniquement* (TPE). En plus de ces séances, les élèves pouvaient demander des exercices de TPE durant tout le stage, qu'ils tâchaient de résoudre pendant leurs moments libres. Le déroulement des TPE était le suivant. Les élèves seuls, ou par groupe de deux ou trois, demandaient un exercice, et celui-ci était tiré au hasard par l'ordinateur, à l'aide d'une méthode tenant compte du niveau de l'élève et de la difficulté de l'exercice. Une fois la solution trouvée et rédigée, elle nous était rendue et nous effectuions la correction. Si elle était juste, les élèves pouvaient obtenir un nouvel exercice, de même dans le cas d'abandon de l'exercice. Selon le cas, le niveau de l'élève augmentait ou diminuait.

Trois soirées ont été consacrées à des exposés. Le premier, intitulé *Cette conférence s'arrêtera-t-elle ?*, traitait de calculabilité, et a été présenté par Antoine Taveneau. Le deuxième, donné par Pierre Dehornoy, parlait de cryptographie. Le dernier était une présentation des olympiades internationales, faite par Johan Yebbou. En outre, le film *Dimensions* a été projeté en deux parties, le jeudi et le vendredi soir.

Quelques liens utiles :

☞ Le site d'Animath : `www.animath.fr`

☞ Le site de MathLinks : `www.mathlinks.ro`

☞ Le site du château de Grésillon : `www.gresillon.org`

III. Les exercices de la première mi-temps

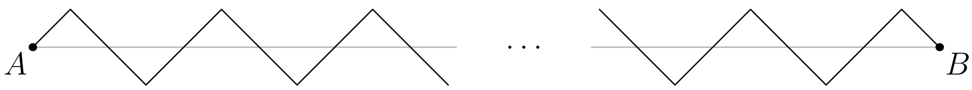
1 La muraille

1.1 Les énoncés

Exercices de niveau 1

Exercice 1. Existe-t-il des entiers strictement positifs n et m tels que 5^n et 6^m se terminent par les quatre mêmes chiffres ?

Exercice 2. On suppose que $AB = 1$, et que les segments obliques font un angle de 45° par rapport à (AB). Il y a n sommets au dessus de (AB).



Quelle est la longueur de la ligne brisée ?

Exercices de niveau 2

Exercice 3. Montrer que dans un polyèdre quelconque, il y a toujours deux faces ayant le même nombre de côtés.

Exercice 4. La suite (x_n) est définie récursivement par $x_0 = 1$, $x_1 = 1$, et :

$$x_{n+2} = \frac{1 + x_{n+1}}{x_n}$$

pour tout $n \geqslant 0$. Calculer x_{2007}.

Exercice 5. Trouver tous $n \in \{1, 2, \ldots, 999\}$ tel que n^2 soit égal au cube de la somme des chiffres de n.

Exercices de niveau 3

Exercice 6. Soient ABC un triangle acutangle et D, E et F les pieds des hauteurs issues de A, B et C respectivement. Soit P (resp. Q, resp. R) le pied de la perpendiculaire à (EF) (resp. (FD), resp. (DE)) issue de A (resp. B, resp. C). Montrer que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes.

Exercice 7. Montrer que $\mathbb{N}$ peut s'écrire comme l'union de trois ensembles disjoints tels que tous m et n vérifiant $|m - n| \in \{2, 5\}$ n'appartient pas au même ensemble.

Montrer que $\mathbb{N}$ peut s'écrire comme l'union de quatre ensembles disjoints tels que tous m et n vérifiant $|m-n| \in \{2,3,5\}$ n'appartient pas au même ensemble. Est-il possible de faire cela avec seulement trois ensembles ?

Exercice 8. Montrer que la suite (a_n) définie par $a_1 = 1$ et $a_n = a_{n-1} + a_{[n/2]}$ pour $n \geqslant 2$ (où $[k]$ est la partie entière de k) contient une infinité de multiples de 7.

Exercice 9. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $f(x^2 - y^2) = (x-y)(f(x) + f(y))$ pour tous réels x et y.

Exercices de niveau 4

Exercice 10. Les cercles k_1 et k_2 de centres respectifs O_1 et O_2 sont extérieurement tangents au point C, tandis que le cercle k de centre O est extérieurement tangent à k_1 et k_2. Soient ℓ la tangente commune à k_1 et k_2 au point C et $[AB]$ le diamètre de k perpendiculaire à ℓ. On suppose que O_1 et A sont du même côté de ℓ. Montrer que les droites (AO_2), (BO_1) et ℓ sont coucourantes.

Exercice 11. Montrer que tout entier $k > 1$ admet un multiple non nul inférieur à k^4 dont l'écriture décimale ne comporte que quatre chiffres distincts.

Exercice 12. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ une fonction telle que $f(1) = 1$ et :

$$f(x+y) \geqslant f(x) + f(y)$$

dès que x, y et $x+y$ sont dans $[0,1]$. Montrer que $f(x) \leqslant 2x$ pour tout $x \in [0,1]$.

Exercice 13. Soient $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ deux n-uplets de réels strictement positifs dont les sommes font 1. Montrer que :

$$2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j \leqslant \frac{n-2}{n-1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i x_i^2}{1 - a_i}$$

et déterminer les cas d'égalité.

Exercices de niveau 5

Exercice 14. Soient $n \geqslant 1$ un entier et $x_1, \ldots x_n$ des réels strictement positifs de somme égale à 1. Montrer que :

$$1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1 + x_1 + \cdots + x_{i-1}} \cdot \sqrt{x_i + \cdots + x_n}} < \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 15. On considère 2007 réels $x_1, \ldots, x_{2007}$ tels que pour tout $I \subset \{1, 2, \ldots, 2007\}$ de cardinal 7, il existe $J \subset \{1, 2, \ldots, 2007\}$ de cardinal 11 vérifiant

$$\frac{1}{7} \sum_{i \in I} x_i = \frac{1}{11} \sum_{j \in J} x_j.$$

Montrer que tous les x_i sont égaux.

Exercice 16. Soit ABC un triangle non équilatéral. On suppose qu'il existe un point P intérieur au triangle tel que les trois céviennes[1] issues de P aient un même longueur λ, avec λ inférieur aux trois côtés AB, BC, CA.

Prouver qu'il existe un autre point $P' \neq P$, intérieur au triangle, et pour lequel les trois céviennes sont de même longueur.

1.2 Les solutions

Solution des exercices de niveau 1

Solution de l'exercice 1. Non. En effet, les règles classiques de multiplication montrent que le produit de deux nombres se terminant par 5 (resp. 6) se termine encore par 5 (resp. 6). Ainsi, une puissance de 5 se termine toujours par 5, et une puissance de 6 par 6. Elles ne peuvent donc pas partager les quatre mêmes derniers chiffres.

Solution de l'exercice 2. En dépliant la ligne brisée, on se rend compte qu'elle a la même longueur que la diagonale d'un carré de côté 1. C'est donc $\sqrt{2}$.

Solution des exercices de niveau 2

Solution de l'exercice 3. Notons n le nombre de faces. Considérons une face du polyèdre. Elle a au moins 3 côtés. D'autre part, à chacun de ses côtés, il correspond une autre face du polyèdre (celle qui partage le côté en question) et à des côtés différents, il correspond deux faces différentes. Ceci prouve que notre face a au plus $n-1$ côtés. Il y a donc n faces et $n-3$ possibilités pour le nombre de côtés. Le principe des tiroirs permet de conclure.

Solution de l'exercice 4. On commence par calculer les premiers termes de la suite (x_n). On trouve :

$$x_2 = 2 \quad ; \quad x_3 = 3 \quad ; \quad x_4 = 2 \quad ; \quad x_5 = 1 \quad ; \quad x_6 = 1$$

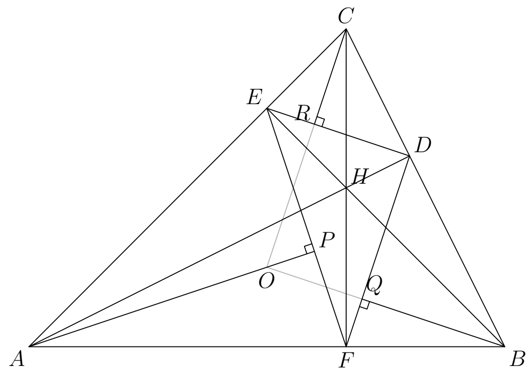
et on retrouve deux termes consécutifs égaux à 1. À partir de ce moment, les calculs se répètent, ce qui prouve que la suite (x_n) de périodique, en l'occurrence de période 5. Ainsi $x_{2007} = x_2 = 2$.

Solution de l'exercice 5. Pour que n^2 soit un cube, n doit être lui-même un cube. Comme $n < 1000$, on doit avoir $n = 1^3, 2^3, \ldots,$ ou 9^3. Pour $n \geqslant 6^3 = 216$, on a $n^2 \geqslant 6^6 > 27^3$. Or, la somme des chiffres de n est au plus $9+9+9 = 27$. Pour $n \in \{1, 8, 27, 64, 125\}$, on vérifie à la main que 1 et 27 ont la propriété demandée et que ce n'est pas le cas des autres. Les solutions sont donc $n = 1$ et $n = 27$.

Solution des exercices de niveau 3

Solution de l'exercice 6. On commence par faire une figure :

[1] Une cévienne issue de P est une droite qui passe par P et par un sommet du triangle. La longueur de cette cévienne est, par définition, la longueur du « morceau » de cette droite qui se trouve à l'intérieur du triangle.



Nous allons montrer que les trois droites (AP), (BQ) et (CR) passent par le centre du cercle circonscrit à ABC, appelé O. Les points B, C, E et F sont cocycliques, sur le cercle de diamètre $[BC]$. D'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{CBF} = \pi - \widehat{CEF} = \widehat{AEF}$. De plus, encore par le théorème de l'angle inscrit, cette fois dans le cercle circonscrit à ABC, on a $\widehat{ABC} = \widehat{AOC}/2$. Le triangle AOC est isocèle en O et donc

$$\widehat{OAE} = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{AOC}}{2} = \frac{\pi}{2} - \widehat{ABC} = \frac{\pi}{2} - \widehat{AEF}.$$

On en déduit $(AO) \perp (EF)$ puis $O \in (AP)$. De la même façon, on obtient $O \in (BQ)$ et $O \in (CR)$.

Solution de l'exercice 7. Dans le premier cas, on vérifie facilement que les ensembles $\{3k+1, k \in \mathbb{N}\}$, $\{3k+2, k \in \mathbb{N}\}$ et $\{3k, k \in \mathbb{N}\}$ satisfont la condition.

De même, dans le deuxième cas, les ensembles $\{4k+1, k \in \mathbb{N}\}$, $\{4k+2, k \in \mathbb{N}\}$, $\{4k+3, k \in \mathbb{N}\}$ et $\{4k, k \in \mathbb{N}\}$ conviennent.

Montrons que ce n'est en revance pas possible avec seulement trois ensembles. Supposons que trois ensembles A, B, C satisfont la deuxième condition. Notons que les nombres 1, 3, 6 doivent être dans des ensembles différents. Sans perte de généralité, on suppose que $1 \in A$, $3 \in B$, $6 \in C$. Alors $4 \in B$. On remarque également que $2, 5 \notin B$ et 2 et 5 sont dans des ensembles différents. Deux cas possibles : $\{1, 2\} \subset A$, $\{3, 4\} \subset B$, $\{5, 6\} \subset C$ ou bien $\{1, 5\} \subset A$, $\{3, 4\} \subset B$, $\{2, 6\} \subset C$. Mais dans chacun des deux cas, il est impossible de placer 7 dans un des trois ensembles. Ceci achève la démonstration.

Solution de l'exercice 8. On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il n'y ait qu'un nombre fini de multiples de 7 dans la suite, et soit a_k le dernier multiple de 7 (notons que $k \geqslant 5$ car $a_5 = 7$). On peut remarquer qu'alors

$$a_{2k-1} \equiv a_{2k} \equiv a_{2k+1} \equiv a \not\equiv 0 \pmod 7.$$

Puis, les sept éléments à partir de a_{4k-3} vont avoir des résidus distincts modulo 7. En effet, pour $n = 0, 1, \ldots, 6$, $a_{4k-3+n} \equiv a_{4k-3} + na \pmod 7$, et quel que soit $a \not\equiv 0 \pmod 7$, na parcourt $\{1, 2, \ldots, 6\}$ modulo 7 lorsque n parcourt ce même ensemble. Donc l'un de ces éléments au moins est un multiple de 7, ce qui est une contradiction avec le fait que a_k soit le dernier.

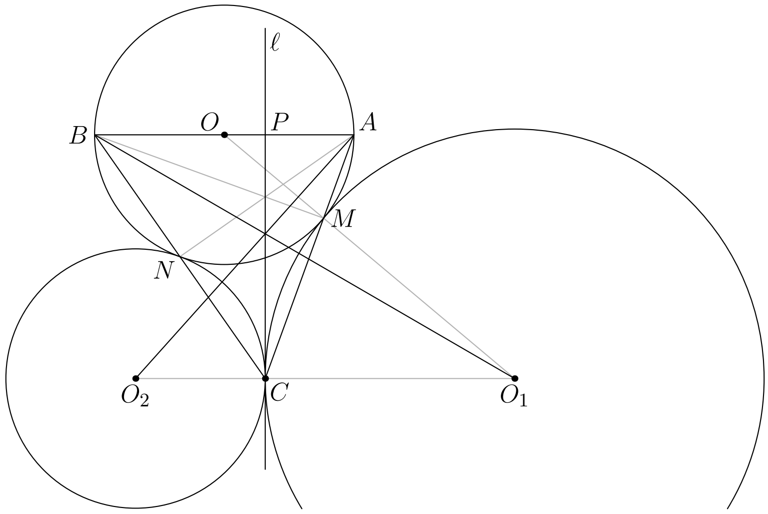
Solution de l'exercice 9. En prenant $x = y$, on obtient $f(0) = 0$. Puis avec $x = -1$ et $y = 0$, on a $f(1) = -f(-1)$. Avec, d'une part, $y = 1$, d'autre part, $y = -1$, on a pour tout x

$$f(x^2 - 1) = (x - 1)(f(x) + f(1)),$$
$$f(x^2 - 1) = (x + 1)(f(x) - f(1)).$$

De l'égalité $(x-1)(f(x)+f(1)) = (x+1)(f(x)-f(1))$, on tire $f(x) = f(1)x$. Donc toute fonction vérifiant l'équation est une fonction linéaire. Inversement, toute fonction de la forme $f(x) = kx$ vérifie cette équation.

Solution des exercices de niveau 4

Solution de l'exercice 10. Soient M et N les intersections respectives de (AC) et (BC) avec k.



On note r, r_1 et r_2 les rayons respectifs de k, k_1 et k_2. Le triangle AMO étant isocèle, on a

$$\widehat{AMO} = \widehat{OAM} = \widehat{O_1CM} = \widehat{CMO_1}.$$

Par conséquent, O, M, O_1 sont alignés et $AM/MC = OM/MO_1 = r/r_1$. De même, O, N, O_2 sont alignés et $BN/NC = ON/NO_2 = r/r_2$.

Soit P le point d'intersection de ℓ et (AB). Les droites (AN), (BM), (CP) se coupent en l'orthocentre du triangle ABC, donc d'après le théorème de Ceva, $AP/PB = (AM/MC)(CN/NB) = r_2/r_1$. Soient maintenant D_1 et D_2 les intersections respectives de ℓ avec (BO_1) et (AO_2). Alors $CD_1/D_1P = O_1C/PB = r_1/PB$, et de même, $CD_2/D_2P = r_2/PA$. On en déduit $CD_1/D_1P = CD_2/D_2P$ et $D_1 = D_2$. Donc (AO_2), (BO_1) et ℓ sont concourantes.

Solution de l'exercice 11. Soit n l'entier tel que $2^{n-1} \leqslant k < 2^n$. Pour $n \leqslant 5$, le résultat se vérifie à la main. Supposons $n \geqslant 6$. Soit S l'ensemble des entiers positifs strictement plus petits que 10^n dont tous les chiffres sont des 1 ou des 0. Le cardinal de S est égal à 2^n qui est strictement plus grand que k, donc il existe $a < b$ dans S congrus modulo k, et $b-a$ ne peut avoir pour chiffres que 8, 9, 0 et 1 dans son écriture décimale. De plus, $b-a \leqslant b < 10^n < 16^{n-1} \leqslant k^4$. Donc $b-a$ répond à la question.

Solution de l'exercice 12. Pour tous $y > x$, $f(y) \geqslant f(x)+f(y-x) \geqslant f(x)$, donc f est croissante. Par ailleurs, une récurrence immédiate donne $f(2^{-k}) \leqslant 2^{-k}$ pour tout entier k. Pour $x \in]0,1]$, soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^{-k} < x \leqslant 2^{-(k-1)}$; alors $f(x) \leqslant f(2^{-(k-1)}) \leqslant 2^{-(k-1)} < 2x$. Comme $f(0)+f(1) \leqslant f(1)$, on a $f(0)=0$ et donc $f(x) \leqslant 2x$ dans tous les cas.

Solution de l'exercice 13. Le membre de gauche est aussi égal à $1-\sum_{i=1}^n x_i^2$, donc on peut réécrire l'inégalité cherchée sous la forme

$$\frac{1}{n-1} \leqslant \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{1-a_i}.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{1-a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^n (1-a_i)\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = 1,$$

et l'égalité $\sum_{i=1}^n (1-a_i) = n-1$ nous donne le résultat annoncé. Le cas d'égalité a lieu si et seulement si $\left(\frac{x_1^2}{1-a_1}, \dots, \frac{x_n^2}{1-a_n}\right)$ et $(1-a_1, \dots, 1-a_n)$ sont proportionnels, c'est-à-dire si et seulement si $(x_1^2, \dots, x_n^2)$ et $((1-a_1)^2, \dots, (1-a_n)^2)$ sont proportionnels.

Solution des exercices de niveau 5

Solution de l'exercice 14. L'inégalité de gauche est une conséquence du fait que

$$\sqrt{1+x_1+\cdots+x_{i-1}} \cdot \sqrt{x_i+\cdots+x_n} \leqslant \frac{1}{2}(1+x_1+\cdots+x_n) = 1$$

donné par l'inégalité arithmético-géométrique, qui implique

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt{1+x_1+\cdots+x_{i-1}} \cdot \sqrt{x_i+\cdots+x_n}} \geqslant \sum_{i=1}^n x_i = 1.$$

Pour l'inégalité de droite, posons $\theta_i = \arcsin(x_1+\cdots+x_i)$ pour tout i (on pose $\theta_0 = 0$). On a alors

$$\sqrt{1+x_1+\cdots+x_{i-1}} \cdot \sqrt{x_i+\cdots+x_n} = \cos\theta_{i-1}$$

et l'égalité désirée devient

$$\sum_{i=1}^n \frac{\sin\theta_i - \sin\theta_{i-1}}{\cos\theta_{i-1}} < \frac{\pi}{2}.$$

On a la majoration suivante :

$$\sin\theta_i - \sin\theta_{i-1} = 2\cos\frac{\theta_i+\theta_{i-1}}{2}\sin\frac{\theta_i-\theta_{i-1}}{2} < \cos\theta_{i-1}(\theta_i-\theta_{i-1}),$$

en utilisant que $\theta_{i-1} < \theta_i$, que cos est décroissante que $[0, \frac{\pi}{2}]$, et que $\sin x < x$ pour $x > 0$. On a donc

$$\sum_{i=1}^n \frac{\sin\theta_i - \sin\theta_{i-1}}{\cos\theta_{i-1}} < \sum_{i=1}^n \theta_i - \theta_{i-1} = \theta_n - \theta_0 < \frac{\pi}{2},$$

qui était bien ce que l'on voulait.

Solution de l'exercice 15. Remarquons tout d'abord que quitte à tout translater, on peut supposer que $x_1 = 0$.

Supposons dans un premier temps que les x_i sont des entiers. Dans ce cas, si I est un sous-ensemble de $\{1, \dots, 2007\}$ de cardinal 7, alors $11\sum_{i\in I} x_i \equiv 0 \pmod 7$ et donc, puisque 7 et 11 sont premiers entre eux, $\sum_{i\in I} x_i \equiv 0 \pmod 7$. On en déduit que pour tout i, $x_i \equiv x_0 = 0 \pmod 7$, c'est-à-dire que tous les x_i sont des multiples de 7. Bien entendu la famille des $\frac{x_i}{7}$ est encore solution du problème. Par descente infinie, on montre finalement que tous les x_i sont nuls, ce qui est bien ce que l'on voulait.

Traitons maintenant le cas général. On procède par approximation. Prenons une famille (x_i) de réels. Notons N un entier strictement positif et supérieur à tous les inverses des $|x_i|$ pour x_i non nul. En appliquant le principe des tiroirs, on obtient un entier strictement positif D et des entiers relatifs p_i tels que $|Dx_i - p_i| \leqslant \frac{1}{155N}$ pour tout i. Montrons que la famille des p_i satisfait encore aux hypothèses de l'énoncé. Prenons donc I un sous-ensemble de $\{1, \dots, 2007\}$ de cardinal 7. Alors on peut trouver un sous-ensemble J de $\{1, \dots, 2007\}$ de cardinal 11 tel que :

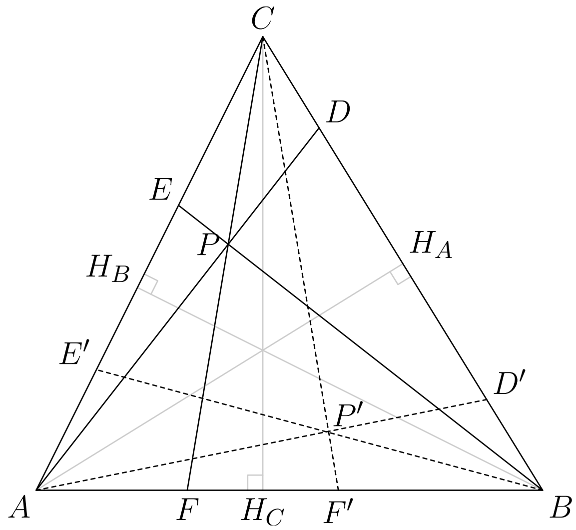
$$11\sum_{i\in I} Dx_i = 7\sum_{j\in J} Dx_j$$

Évaluons :

$$\begin{aligned}\left|11\sum_{i\in I} p_i - 7\sum_{j\in J} p_j\right| &= \left|11\sum_{i\in I}(p_i - Dx_i) - 7\sum_{j\in J}(p_j - Dx_j)\right| \\ &\leqslant 11\sum_{i\in I}|p_i - Dx_i| + 7\sum_{j\in J}|p_j - Dx_j| \leqslant \frac{154}{155N} < 1\end{aligned}$$

On en déduit l'égalité attendue, étant donné que le nombre dans le membre de gauche est un entier. Par le cas précédent, tous les p_i sont nuls et donc que $|x_i| \leqslant |Dx_i| \leqslant \frac{1}{155N}$, ce qui est impossible si $x_i \neq 0$ par définition de N.

Solution de l'exercice 16.



Soient $[AD]$, $[BE]$ et $[CF]$ les trois céviennes, et soient H_A, H_B et H_C les pieds des hauteurs issues de A, B, C dans ABC. Soit $[AD']$ le segment obtenu par symétrie de $[AD]$ par rapport à (AH_A), avec $D' \in (BC)$. On construit de façon analogue les segments $[BE']$

On commence par remarquer que $[AD']$ n'est pas extérieur au triangle ABC : en effet, dans le cas contraire, l'un des segments $[AB]$ ou $[AC]$ serait contenu dans le triangle ADD', et alors $AD = AD' = \lambda < \min\{AB, AC\}$, ce qui est absurde.

On va montrer que les trois segments $[AD'], [BE'], [CF']$ sont concourants. On a :

$$\begin{aligned}BD \cdot BD' &= (BH_A + H_AD)(BH_A - H_AD) = BH_A^2 - H_AD^2 \\ &= (AB^2 - AH_A^2) - (AD^2 - AH_A^2) = AB^2 - AD^2 = AB^2 - \lambda^2\end{aligned}$$

De même $EA \cdot E'A = AB^2 - \lambda^2$. Et ainsi $EA \cdot E'A = BD \cdot BD'$. De même $FB \cdot F'B = CE \cdot CE'$ et $DC \cdot D'C = AF \cdot AF'$. Le théorème de Céva, appliqué aux trois céviennes $[AD]$, $[BE]$, $[CF]$ donne :

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

Par suite :

$$\begin{aligned}\frac{BD'}{D'C} \cdot \frac{CE'}{E'A} \cdot \frac{AF'}{F'B} &= \frac{BD' \cdot BD}{D'C \cdot DC} \cdot \frac{CE' \cdot CE}{E'A \cdot EA} \cdot \frac{AF' \cdot AF}{F'B \cdot FB} \\ &= \frac{BD' \cdot BD}{E'A \cdot EA} \cdot \frac{CE' \cdot CE}{F'B \cdot FB} \cdot \frac{AF' \cdot AF}{D'C \cdot DC} = 1\end{aligned}$$

Le théorème de Céva toujours assure cette fois que les trois segments en question sont bien concourrants, disons en un point P'.

Si P' et P étaient confondus alors, d'après notre construction, le point P serait également l'orthocentre de ABC. Dans ces conditions, les trois hauteurs auraient la même longueur et donc ABC serait équilatéral, ce que l'on a exclu. Donc, $P' \neq P$ et les trois céviennes passant par P' sont bien de même longueur.

2 En TD

Les exercices suivants sont classés par thème, et à l'intérieur de chaque thème, plus ou moins classés par ordre de difficulté croissante.

2.1 Les énoncés

Stratégies de base

Exercice 1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}.$$

Exercice 2. À Mathland, deux villes sont toujours reliées soit par une ligne aérienne, soit un canal navigable (à double sens). Montrer qu'il est possible de choisir un moyen de transport, tel que, en partant de n'importe quelle ville, on puisse atteindre n'importe quelle autre ville uniquement à l'aide de ce moyen de transport.

Exercice 3. Les points du plan sont coloriés de telle sorte que chaque point soit rouge ou bleu.

(i) Montrer que pour tout réel x il existe une couleur telle qu'on puisse trouver deux points de cette couleur distants de x.

(ii) Montrer qu'il existe une couleur telle que pour tout réel x on puisse trouver deux points de cette couleur distants de x.

Exercice 4. Soit α un nombre réel tel que $\alpha + 1/\alpha \in \mathbb{Z}$. Montrer que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 5. Est-il possible de paver avec des triminos 3×1 :

(i) un damier 8×8 ?

(ii) un damier 8×8 auquel manque le coin en haut à gauche ?

Exercice 6. 47 personnes voyagent dans un bus avec deux contrôleurs à son bord. Au départ, aucun des voyageurs n'a de billet et chaque passager n'achète un billet qu'après la troisième fois qu'on le lui demande. Les contrôleurs choisissent à tour de rôle un passager sans billet et lui demandent d'en acheter un. Ils procèdent ainsi jusqu'à ce que toutes les personnes aient un titre de transport. Combien de billets le premier contrôleur est-il sûr de vendre ?

Exercice 7. Un groupe de pirates s'est emparé de 128 pièces d'or. Si l'un d'eux possède au moins la moitié des pièces d'or, chaque autre pirate lui vole autant de pièces d'or qu'il a déjà en sa possession. Si deux pirates ont chacun 64 pièces d'or, l'un des ces deux individus vole toutes les pièces de l'autre. On suppose que sept tours de vol ont lieu. Montrer qu'à la fin un pirate obtient la totalité du butin.

Exercice 8. Démontrer que parmi 2008 nombres entiers arbitraires, on peut trouver des nombres dont la somme est divisible par 2008.

Exercice 9. On se donne m cartes, chacune numérotée par un entier entre 1 et m. On suppose que la somme des numéros de n'importe quel sous-ensemble de cartes n'est pas divisible par $m+1$. Montrer que les cartes sont numérotées par le même entier.

Stratégies et graphes

Exercice 10 (*Hongrie-Israël 2004*). Soit $n \geqslant 3$. On colorie les arêtes de K_n à l'aide de n couleurs, chacune étant utilisée au moins une fois. Prouver qu'il existe un triangle dont les trois arêtes sont de couleurs deux à deux distinctes.

Exercice 11 (*Balkans 2002*). Soient $A_1, \ldots, A_n$ ($n \geqslant 4$) des points du plan, trois jamais alignés. Chacun de ces points est relié à au moins trois des autres par des segments. Prouver qu'il existe un entier $k > 1$ et des points distincts $X_1, \ldots, X_{2k} \in \{A_1, \ldots, A_n\}$ tels que X_{2k} soit relié à X_1 et, pour tout $i \in \{1, \ldots, 2k-1\}$, le point X_i soit relié à X_{i+1}.

Exercice 12 (*Iran 1996*). Prouver que, pour tout entier $n \geqslant 3$, il existe deux ensembles disjoints d'entiers strictement positifs $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ et $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Exercice 13 (*URSS 1975*). Dans une urne, on a disposé un nombre fini de boules vertes, jaunes, rouges. Une opération consiste à éliminer deux boules de couleurs différentes et à les remplacer par une boule de la troisième couleur. Après une certaine suite d'opérations, il ne reste plus qu'une seule boule dans l'urne. Appelons c sa couleur. Prouver que pour tout autre suite d'opérations qui aboutit à n'avoir plus qu'une seule boule dans l'urne, cette dernière boule est aussi de couleur c.

Exercice 14 (*URSS*). On a placé un nombre dans chacune des cases d'un tableau $m \times n$. Une opération consiste à changer les signes de tous les nombres d'une même ligne, ou de tous les nombres d'une même colonne. Prouver qu'il est possible, à l'aide d'un nombre fini de telles opérations, d'obtenir un tableau pour lequel les sommes des nombres écrits dans chaque ligne et chaque colonne soient toutes positives ou nulles.

Exercice 15. On considère un graphe fini simple connexe ayant un nombre pair d'arêtes. Prouver qu'il est possible d'orienter chaque arête de sorte que, pour chaque sommet, le nombre d'arêtes sortantes soit pair.

Exercice 16. Soit un graphe fini simple et non orienté. Prouver que l'on peut orienter chacune des arêtes de sorte que, pour chaque sommet M, on ait $|d^+(M) - d^-(M)| \leqslant 1$.

Exercice 17. Pour tous entiers $a, b \geqslant 1$, on note $R(a, b)$ le plus petit entier p, s'il existe, ayant la propriété suivante :

« Pour tout entier $n \geqslant p$, pour toute coloration de arêtes de K_n en rouge ou bleu, il existe un sous-graphe K_a dont toutes les arêtes sont rouges ou un sous-graphe K_b dont toutes les arêtes sont bleues. »

Prouver que, pour tous entiers $a, b \geqslant 1$, le nombre $R(a, b)$ existe et que l'on a

$$R(a, b) \leqslant R(a-1, b) + R(a, b-1).$$

Exercice 18. Déterminer tous les couples (m, n) d'entiers strictement positifs pour lesquels il est possible de colorier soit en blanc soit en noir chacune des cases d'un tableau $m \times n$ de sorte que, pour chacune des cases, le nombre de cases qui lui sont adjacentes (i.e. ayant au moins un sommet commun, elle-même comprise) et ont la même couleur est pair.

Exercice 19 (*Roumanie 1995*). Un n-gone régulier a p sommets noirs et $n-p$ sommets blancs, où $n-p \geqslant p \geqslant 3$. Prouver qu'il existe un polygone à au moins $\frac{p}{2}+1$ sommets, tous blancs, qui est isométrique à un autre polygone dont les sommets sont tous noirs.

Exercice 20. Une compagnie aérienne offre des liaisons aériennes directes, mais à sens unique, entre certaines villes. Il existe d'ailleurs une des villes à partir de laquelle on ne peut pas atteindre chacune des autres, y compris en plusieurs vols successifs. Prouver que l'on peut répartir les villes en deux groupes disjonts A et B de sorte qu'il soit impossible d'atteindre une ville quelconque du groupe A en partant d'une ville quelconque du groupe B.

Exercice 21. Soit G un graphe simple connexe avec $m \geqslant 1$ arêtes. On considère $2m+1$ grenouilles, chacune sur un des sommets de G. A chaque seconde, de tout sommet v de G sur lequel sont posées au moins $d(v)$ grenouilles, partent $d(v)$ grenouilles, une sur chacun des sommets adjacents à v. Prouver qu'après un certain temps, chaque sommet de G finira par recevoir la visite d'au moins une grenouille.

Exercice 22. Déterminer les entiers $n \geqslant 1$ pour lesquels on peut trouver un ensemble E de n points du plan tel que, pour chaque point M de E, il y ait exactement trois autres points de E qui soient à une distance unité de M.

Exercice 23. Dans *un tournoi*, chaque joueur rencontre une et une seule fois chaque autre joueur et il n'y a pas de partie nulle. Un tournoi est dit *transitif* lorsque, pour tous joueurs A, B, C, si A a battu B et B a battu C, alors A a battu C.

Soit $n > 0$ un entier. Existe-t-il un entier $m > 0$ tel que tout tournoi d'au moins m joueurs contienne un sous-tournoi transitif de n joueurs ?

Exercice 24 (*Allemagne 2004*). On considère un hexagone régulier $ABCDEF$. Initialement, on attache le nombre 1 à A et le nombre 0 à chacun des cinq autres sommets. On dispose des trois opérations suivantes :

a) On peut ajouter un entier quelconque aux nombres attachés à deux sommets opposés.

b) On peut ajouter un entier quelconque aux nombres attachés à trois sommets qui sont également les sommets d'un triangle équilatéral.

c) On peut retrancher un entier quelconque t au nombre attaché à un sommet arbitraire et ajouter t à chacun des nombres attachés aux deux sommets voisins.

Est-il possible, à l'aide de ces opérations, d'obtenir une configuration avec un 1 et cinq 0, mais autre que la configuration initiale ?

Exercice 25 (*Roumanie 2004*). Soient $n \geqslant 2$ un entier et X un ensemble de n éléments. Soient $A_1, \ldots, A_{101}$ des sous-ensembles de X tels que la réunion de 50 quelconques d'entre eux contienne plus de $\frac{50n}{51}$ éléments. Prouver que, parmi les A_i, on peut en trouver trois dont les intersections deux à deux sont non vides.

Exercice 26 (*Russie*). Dans chacune des cases d'une grille $n \times n$, on a mis soit un 0 soit un 1. Il se trouve que, pour chaque case contenant un 0, il y a au moins n cases situées dans la même colonne ou la même ligne qui contiennent un 1. Prouver qu'il y a au moins $\frac{n^2}{2}$ cases contenant un 1.

Exercice 27 (*URSS 1978*). On dispose de trois machines qui fonctionnent sur les couples d'entiers strictement positifs. Si on lui donne le couple (a, b), la première rend $(a+1, b+1)$, alors que la seconde rend $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ si a et b sont pairs et ne fait rien sinon. Si on donne les couples (a, b) et (b, c) à la troisième, elle rend (a, c). Tout couple obtenu à un moment donné, reste disponible pour la suite. On se donne un couple (a, b) d'entiers strictement positifs, avec $a < b$. A l'aide de ces trois machines, quels sont les entiers n pour lesquels il est possible d'obtenir $(1, n)$?

Exercice 28. Soit G un graphe à n sommets, simple, non orienté et sans triangle. Prouver qu'il existe un coloriage propre des sommets de G n'utilisant pas plus de $2\sqrt{n}$ couleurs.

Exercice 29 (*Leningrad 1965-1984*). On a tracé des arcs bleus, rouges et verts pour relier $2n$ points de sorte que chacun de ces points est l'extrémité d'exactement un arc de chaque couleur. On note respectivement a, b, c les nombres d'arcs rouges-bleus, rouges-verts, bleus-verts. Prouver que $n + a \geqslant b + c$.

Exercice 30 (*Iran 2002-2003*). On veut colorier les arêtes de K_{2^n} de sorte que tout cycle hamiltonien (i.e. passant une et une seule fois par chaque sommet autre que le sommet initial) utilise au moins n couleurs. Quel est le nombre minimal de couleurs pour lequel cela est réalisable ?

Exercice 31. Soit G un graphe fini simple, non orienté. Prouver que l'on peut répartir les sommets de G en deux groupes disjoints V_1 et V_2 (l'un éventuellement vide) de sorte que, dans chacun des deux sous-graphes induits, chaque sommet soit de degré pair.

Exercice 32 (*Lituanie 2001*). Prouver que, pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un graphe fini, simple et non orienté, ne contenant pas de triangle et dont le nombre chromatique est supérieur à n.

Exercice 33 (*URSS 1986*). Un roi décide de construire n villes et $n - 1$ routes les reliant afin de pouvoir se déplacer d'une ville quelconque à une autre. Chaque route relie deux villes sans en traverser d'autre, et deux routes n'ont pas d'intersection. Le roi veut aussi que les plus petites distances entre les villes (le long des routes) soient $1, 2, 3, \ldots, \frac{n(n-1)}{2}$ kilomètres. Est-ce possible pour :

a) $n = 6$?
b) $n = 1986$?

Exercice 34. On considère n points de l'espace, trois jamais alignés. On en a relié certains entre eux à l'aide de $[\frac{n^2}{4}]$ segments, de sorte qu'au moins un triangle existe. Prouver que tout point dont part le nombre maximal de segments est le sommet d'un triangle.

Arithmétique

Exercice 35. *a)* Prouver qu'il n'existe pas d'entiers a, b tels que $a^2 - 3b^2 = 8$.
b) Prouver qu'il n'existe pas d'entiers strictement positifs a, b et c tels que $a^2 + b^2 = 3c^2$.

Exercice 36. *a)* Prouver que le nombre $100\ldots00500\ldots001$ (il y a 100 zéros devant et 100 zéros derrière le 5) n'est pas le cube d'un entier.
b) Prouver que le nombre $a^3 + b^3 + 4$ n'est jamais le cube d'un entier pour a et b dans $\mathbb{N}$.
c) Prouver que l'équation $6m^3 + 3 = n^6$ n'a pas de solutions en nombres entiers.

Exercice 37. Prouver que parmi 52 nombres entiers quelconques il y en a toujours deux dont la somme ou la différence est divisible par 100.

Exercice 38. *a)* Montrer que la fraction $\frac{12n+1}{30n+2}$ est irréductible pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b) Trouver $\mathrm{pgcd}(2^{100} - 1, 2^{120} - 1)$.

Exercice 39. Prouver que dans les suites arithmétiques suivantes il y a une infinité de nombres premiers :

a) 3, 7, 11, 15, ..., $4n+3$, ...;
b) 5, 11, 17, 23, ..., $6n+5$, ...

Exercice 40. Montrer que $n!$ n'est divisible par 2^n pour aucun entier $n > 0$.

Exercice 41. *a)* Soit $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, où $n > 1$. Prouver que A n'est pas entier.
b) Soit $B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n+1}$, où $n > 0$. Prouver que B n'est pas entier.
c) Prouver que pour tout nombre premier $p > 2$ le numérateur m de la fraction

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1},$$

avec m et n dans $\mathbb{N}$, est divisible par p.

Exercice 42. Prouver que pour tout entier $n > 0$ le nombre $19 \cdot 8^n + 17$ est composé (c'est-à-dire n'est pas premier).

Géométrie

Exercice 43. Soit ABC un triangle isocèle en A et Γ son cercle circonscrit. On note γ le cercle tangent aux droites AB et AC et tangent à Γ intérieurement. On note P, Q et R les points de contact de γ avec (AB), (AC) et Γ respectivement. Enfin, ω est le centre de γ, J est le milieu de $[PQ]$ et K le milieu de $[BC]$.

Justifier l'égalité $\frac{AK}{AR} = \frac{AJ}{A\omega}$.

Exercice 44. Soit A et B les intersections de deux cercles Γ_1 et Γ_2. Soit CD une corde de Γ_1 et E et F les secondes intersections respectives des droites CA et BD avec Γ_2. Montrer que les droites (CD) et (EF) sont parallèles.

Exercice 45 (*Théorème de Miquel*). Soit ABC un triangle et P, Q, R trois points situés sur les côtés BC, CA, AB respectivement. Alors les cercles circonscrits aux triangles ARQ, BPR, CQP passent par un point commun.

Exercice 46 (*Triangle orthique*). Soient H_A, H_B et H_C les pieds des hauteurs issues respectivement des sommets A, B et C d'un triangle acutangle (dont tous les angles sont aigus). Soit H l'orthocentre de ce triangle. Montrer que
(i) les triangles AH_BH_C, H_ABH_C, H_AH_BC sont directement semblables entre eux et indirectement semblables au triangle ABC.
(ii) les hauteurs du triangle ABC sont les bissectrices intérieures du triangle $H_AH_BH_C$, appelé *triangle orthique*,
(iii) les symétriques de H par rapport aux trois côtés du triangle ABC appartiennent au cercle circonscrit à ABC.

Exercice 47 (*Droite de Simson*). Soit Γ un cercle et A, B et C trois points de Γ. Soit P un point du plan, P_A, P_B et P_C ses projections sur les droites $(BC), (CA), (AB)$. Montrer que les points P_A, P_B et P_C sont alignés si et seulement si P appartient à Γ.

Exercice 48. Soit ABC un triangle acutangle, soient L et N les intersections de la bissectrice interne de l'angle A avec (BC) et avec le cercle ciconscrit à ABC. Soient K et M les projections de L sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$. Montrer que l'aire du quadrilatère $AKNM$ est égale à celle du triangle ABC.

Exercice 49. Soient $ABCD$ un carré et P et Q deux points situés sur les côtés $[AB]$ et $[BC]$ respectivement, de sorte qu'on ait l'égalité $BP = BQ$. Soit H la projection orthogonale de B sur PC. Prouver que l'angle $\widehat{DHQ}$ est droit.

Exercice 50. Soit ABC un triangle, H son orthocentre et O le centre de son cercle circonscrit. Montrer l'égalité $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Exercice 51. Soient A, B et C trois points du plan.
(i) Déterminer l'ensemble des points M tels que $\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right\| = 1$.
(ii) Déterminer l'ensemble des points M tels que $\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}\right\| = 1$.
(iii) Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 = 1$.
(iv) Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA^2 + 2MB^2 - 3MC^2 = 1$.

Exercice 52 (*Cercles d'Apollonius*). Soit A et B deux points du plan et k un réel positif. Déterminer l'ensemble des points C du plan tels que le rapport de longueurs $\frac{CA}{CB}$ soit égal à k.

Logique et structures

Exercice 53. Dresser la table de vérité des assertions suivantes :

- ☞ (non A) ou B
- ☞ $(A \Rightarrow B)$ et $(B \Rightarrow A)$
- ☞ $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$
- ☞ $(A$ et $B) \Rightarrow C$

Exercice 54. Nier les phrases :

- ☞ Il fait beau et chaud
- ☞ Vendredi, j'irai visiter Baugé ou me promener dans le parc
- ☞ Vendredi, si je ne vais visiter Baugé, j'irai me promener dans le parc
- ☞ Vendredi, s'il ne pleut pas, j'irai visiter Baugé ou me promener dans le parc
- ☞ Tous les stagiaires de Grésillon partiront aux Olympiades
- ☞ LoJac s'endormira au moins une fois pendant un exposé du stage
- ☞ $\exists M \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$
- ☞ $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - l| \leqslant \varepsilon$

Exercice 55. Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles tendant respectivement vers ℓ et ℓ'. Montrer que $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$.

Une *relation* $\mathcal{R}$ sur un ensemble X est par définition une partie de $X \times X$. On notera souvent $x\mathcal{R}y$ à la place de $(x, y) \in \mathcal{R}$.

On dit que $\mathcal{R}$ est une *relation de préordre* (ou simplement un *préordre*) si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- ☞ (réflexivité) $\forall x \in X$, $x\mathcal{R}x$
- ☞ (transitivité) $\forall x, y, z \in X$, $\big[(x\mathcal{R}y)$ et $(y\mathcal{R}z)\big] \Rightarrow (x\mathcal{R}z)$

Plutôt que $\mathcal{R}$, on dénotera souvent les relations de préordre par le symbole $\leqslant$. Si un préordre vérifie en outre la propriété suivante, on dit que $\mathcal{R}$ est une *relation d'ordre* (ou un *ordre*).

- ☞ (anti-symétrie) $\forall x, y \in X$, $\big[(x\mathcal{R}y)$ et $(y\mathcal{R}x)\big] \Rightarrow (x = y)$

Pour un ordre, on notera $x < y$ pour $x \leqslant y$ et $x \neq y$. Il est à peu près clair que la relation d'ordre $\leqslant$ détermine la relation d'ordre strict $<$ et réciproquement. Une relation de préordre est dite *totale* si elle vérifie :

☞ $\forall x, y \in X$, $(x\mathcal{R}y)$ ou $(y\mathcal{R}x)$

Exercice 56. Montrer que la relation de divisibilité sur $\mathbb{N}^\star$ définit un ordre. Est-il total ? Qu'en est-il sur $\mathbb{Z}^\star$?

Exercice 57 (*Ordre lexicographique*). Soient $X_1, \ldots, X_n$ des ensembles ordonnés (on notera $\leqslant$ les ordres sur chacun des X_i). On pose $(x_1, \ldots, x_n) < (y_1, \ldots, y_n)$ si et seulement s'il existe un indice $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $x_i < y_i$ et $x_j = y_j$ pour tout $j < i$.
a) Montrer que cela définit un ordre sur le produit $X_1 \times \cdots \times X_n$.
b) Montrer que si chacun des X_i est totalement ordonné, il en est de même de $X_1 \times \cdots \times X_n$
c) Peut-on remplacer dans ce qui précède l'ensemble d'indices $\{1, \ldots, n\}$ par un ensemble ordonné (resp. totalement ordonné) quelconque ?

Exercice 58. Soit $(X, \leqslant)$ un ensemble.
a) Montrer que $(\mathcal{P}(X), \subset)$ est un ensemble ordonné.
b) Montrer que l'application :

$$\begin{array}{rcl} f : X & \to & \mathcal{P}(X) \\ x & \mapsto & \{y \in X,\, y \leqslant x\} \end{array}$$

est strictement croissante.

On dit que $\mathcal{R}$ est une *relation d'équivalence* si c'est une relation de préordre qui vérifie en outre la propriété suivante :

☞ (symétrie) $\forall x, y \in X$, $(x\mathcal{R}y) \Rightarrow (y\mathcal{R}x)$

Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur un ensemble X, la *classe d'équivalence* d'un élément $x \in X$ est l'ensemble des éléments en relation avec x, *i.e.* l'ensemble des éléments y tels que $y\mathcal{R}x$.

Exercice 59. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble X. Pour tout $x \in X$, on note $\mathcal{C}(x)$ la classe d'équivalence de x. Soit $x \in X$. Montrer que si $y \in \mathcal{C}(x)$, on a $\mathcal{C}(y) = \mathcal{C}(x)$ et, si $y \notin \mathcal{C}(x)$, alors $\mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(y) = \emptyset$. Montrer que la réunion de tous les $\mathcal{C}(x)$ est X tout entier.

L'ensemble des parties $\mathcal{C}(x)$ forme ce que l'on appelle une *partition* de X. Elle est appelé *l'ensemble quotient* de X par $\mathcal{R}$ et est souvent notée $X/\mathcal{R}$.

Exercice 60. Soit $(X, \leqslant)$ un ensemble pré-ordonné. On définit la relation

$$x \sim y \iff (x \leqslant y) \text{ et } (y \leqslant x).$$

a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence
b) Montrer que $\leqslant$ induit sur l'ensemble quotient $X/\sim$ une relation d'ordre.

Soient $(X, \leqslant)$ un ensemble ordonné et A une partie de X. On dit que $m \in A$ est un *plus petit élément* de A si $m \leqslant x$ pour tout $x \in A$. On montre (à faire en exercice) qu'un plus petit élément, s'il existe, est unique. On définit de façon analogue le *plus grand élément* de A.

Un *minorant* de A est un élément plus petit que tous les éléments de A. Ceci permet de définir la *borne inférieure* de A comme le plus grand élément (s'il existe) de l'ensemble des minorants de A. De façon analogue, on définit un *majorant* de A puis la *borne supérieure* de A.

Exercice 61. Montrer qu'un plus petit élément (resp. un plus grand élément) est une borne inférieure (resp. une borne supérieure). La réciproque est-elle vraie ? Est-elle vraie pour les ordres totaux ?

Exercice 62. Caractériser les bornes inférieures et supérieures pour les ordres $(\mathcal{P}(E), \subset)$ et $(\mathbb{N}^\star, |)$.

Exercice 63. Un régiment au garde-à-vous est disposé sur une place en un rectangle $n \times m$. L'adjudant choisit le soldat le plus petit dans chaque rang. Le plus grand de ces soldats-là s'appelle Pierre. Ensuite l'adjudant choisit le soldat le plus grand dans chaque colonne. Le plus petit de ces soldats-là s'appelle Paul. Est-ce que Pierre peut être le même soldat que Paul ? Est-ce qu'il peut être plus grand que Paul ? Plus petit que Paul ?

Exercice 64. Soient n nombres réels $a_1, a_2, \dots, a_n$. Pour chaque i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ on définit

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leqslant j \leqslant i\} - \min\{a_j : i \leqslant j \leqslant n\}$$

et on pose

$$d = \max\{d_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

a) Montrer que pour tous nombres réels $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$,

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leqslant i \leqslant n\} \geqslant \frac{d}{2}. \tag{III.1}$$

b) Montrer qu'il existe des nombres réels $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ tels que (III.1) soit une égalité.

Exercice 65. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble

$$\{f(y_1, \dots, y_n),\ y_i \geqslant x_i\, \forall i\}$$

admet une borne supérieure que l'on note $g(x_1, \dots, x_n)$. Montrer que

$$f(x_1, \dots, x_n) \leqslant \inf_{y_i \leqslant x_i} g(y_1, \dots, y_n)$$

et discuter le cas d'égalité. (On justifiera aussi à un moment l'existence de la borne inférieure.)

Soit $(X, \leqslant)$ un ensemble ordonné. On dit que X est un *bon ordre* (ou un *ensemble bien ordonné*) si toute partie non vide de X admet un plus petit élément. Un exemple important de bon ordre est $\mathbb{N}$ muni de l'ordre usuel.

Les exercices 66 à 72, qui traitent des bons ordres, ne sont pas corrigés.

Exercice 66. Montrer qu'un ensemble bien ordonné est totalement ordonné.

Exercice 67. Déterminer les segments initiaux d'un ensemble bien ordonné.

Exercice 68. Reprendre les questions *b)* et *c)* de l'exercice sur les ordres lexicographiques en remplaçant « totalement ordonné » par « bien ordonné ».

Exercice 69 (*Principe d'induction transfinie*). Soit $(X, \leqslant)$ un ensemble bien ordonné. Soit P un propriété dépendant d'un paramètre x in X. On suppose :

$$\forall x \in X, \quad \big[(\forall y < x,\ P(y)) \Longrightarrow P(x)\big].$$

Montrer que $P(x)$ est vraie pour tout $x \in X$.

Le principe d'induction infinie est la généralisation directe de la récurrence forte. Vous pourrez vous amuser à essayer de transcrire le principe de récurrence standard aux bons ordres (le plus délicat est de définir $n+1$), puis de montrer que celui-ci ne s'applique pas dans cette généralité.

Il existe des notions peu faibles que les bons ordres qui permettent d'englobler des ordres non totaux tout en gardant certaines propriétés intéressantes. On a besoin pour cela de définir la notion d'élément minimal. Soient X un ensemble ordonné et A une partie de X. Un *élément minimal* de A est un élément $m \in A$ pour lequel il n'existe aucun $x \in A$ tel que $x < m$.

Exercice 70. Montrer que pour un ordre total, les notions de plus petit élément et d'élément minimal coïncident.

Un *ordre bien fondé* est un ordre pour lequel toute partie non vide admet (au moins) un élément minimal. Si X est un ensemble ordonné, on définit une *antichaine* de X comme une partie $A \subset X$ d'éléments deux à deux incomparables (c'est-à-dire des éléments x et y pour lesquels on n'a ni $x \leqslant y$, ni $y \leqslant x$). Finalement un *bel ordre* est un ordre bien fondé qui ne possède pas d'antichaines infinies.

Exercice 71. Soit X un ensemble ordonné. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) X est un bel ordre ;

ii) pour tout suite (u_i) d'éléments de X, il existe des indices $i < j$ tels que $u_i \leqslant u_j$;

iii) toute suite d'éléments de X admet une sous-suite croissante.

Exercice 72 (*Lemme de Higman*). Soient $\mathcal{A}$ un ensemble fini appelé *alphabet* et X l'ensemble des mots écrits avec cet alphabet (un mot est par définition une suite finie de lettres de l'alphabet). Si m et m' sont deux mots, on convient que $m \leqslant m'$ si toutes les lettres de m se retrouvent dans le même ordre (mais pas nécessairement à la suite) dans m'. Montrer que $\leqslant$ est un bel ordre.

Soient X et Y deux ensembles. Une *fonction* $f : X \to Y$ est la donnée d'une partie de $X \times Y$ (souvent appelé le *graphe*) telle que pour tout $x \in X$, il existe au plus un élément y de Y tel que le couple (x, y) soit dans la partie en question. Si un tel élément existe, on le note $f(x)$ et on dit que la fonction est *définie* en x. Une *suite* est une fonction dont l'ensemble de départ est $\mathbb{N}$. Dans la suite, on supposera toujours (sans mention explicite) du contraire que les fonctions sont définies sur tout l'ensemble de départ. Si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont deux fonctions, on définit la composée $g \circ f$ par $g \circ f(x) = g(f(x))$. Finalement, pour tout ensemble X, on note $\mathrm{id}_X : X \to X$ la fonction *identité* de X : elle est définie par $\mathrm{id}_X(x) = x$ pour tout $x \in X$ (son graphe est la *diagonale* de X). Il arrive parfois que l'on note (et c'est ce que l'on fera dans la suite) Y^X l'ensemble des fonctions de Y dans X.

Soit $f : X \to Y$ une fonction. On dit que f est *injective* si

$$\forall x, y \in X,\ (f(x) = f(y)) \Longrightarrow (x = y).$$

On dit que f est *surjective* si tout élément de Y peut s'écrire sous la forme $f(x)$ pour un $x \in X$. La fonction f est dite *bijective* si elle est à la fois injective et surjective.

Exercice 73. Soit $f : X \to Y$ une fonction (où X est un ensemble non vide). Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

i) f est injective (resp. surjective) ;

ii) il existe une fonction $h : Y \to X$ telle $h \circ f = \mathrm{id}_X$ (resp. $f \circ h = \mathrm{id}_Y$) ;

iii) pour toutes fonctions $g, g' : Z \to X$ (resp. $g, g' : Y \to Z$), l'égalité $f \circ g = f \circ g'$ (resp. $g \circ f = g' \circ f$) implique $g = g'$.

Exercice 74. Montrer qu'une fonction strictement croissante entre ensembles totalement ordonnés est injective.

Exercice 75. Soit $(X, \leqslant)$ un ensemble totalement ordonné. Déterminer toutes les fonctions $f : X \to X$ strictement croissantes vérifiant $f \circ f = \mathrm{id}_X$.

Exercice 76. Soient A, B et C trois ensembles. Montrer qu'il existe une bijection (simple) entre les ensembles de fonctions $A^{B\times C}$ et $(A^B)^C$.

Soit $f : X \to Y$ une fonction. Pour tout partie A de X, on définit l'*image directe* de A par f comme l'ensemble des éléments $y \in Y$ qui s'écrivent sous la forme $f(x)$ pour $x \in A$. Un peu plus formellement :

$$f(A) = \{y \in Y \,/\, \exists x \in A,\ f(x) = y\}.$$

Si B est une partie de Y, on définit l'*image réciproque* de B par f comme l'ensemble des éléments $x \in X$ tels que $f(x)$ est dans B.

Exercice 77. Soit $f : X \to Y$ une fonction, et soient A et B des parties de Y. Montrer que :

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \quad \text{et} \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

Les égalités précédentes restent-elles vraies en remplaçant image inverse par image directe (et en prenant pour A et B des parties de X) ?

Équations fonctionnelles

Exercice 78 (*Roumanie 1986*). Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ surjective, et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $f(n) \geqslant g(n)$. Prouver que $f = g$.

Exercice 79. Soient A un ensemble fini de nombres réels et $f : A \to A$ une fonction vérifiant $f(x) - f(y) \geqslant x - y$ pour tout $x, y \in A$ avec $x > y$. Montrer que f est l'identité.

Exercice 80. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et telles que, pour tous réels x, y :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Exercice 81. Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrit comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 82. Prouver qu'il n'existe pas de fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ vérifiant $f(x + f(y)) = f(x) - y$ pour tous entiers x et y.

Exercice 83 (*OIM 1987*). Prouver qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$ telle que, pour tout entier $n > 0$,

$$f(f(n)) = n + 1987$$

Exercice 84 (*D'après proposition OIM 1991*). Déterminer les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que, pour tous entiers m, n :

$$f(m + f(f(n))) = -f(f(m+1)) - n$$

Exercice 85. Soit E un ensemble fini (non vide). Trouver toutes les fonctions $f : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{R}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

☞ pour toutes parties A et B de E, $f(A \cup B) + f(A \cap B) = f(A) + f(B)$

☞ pour toute bijection $\sigma : E \to E$ et toute partie A de E, $f(\sigma(A)) = f(A)$.

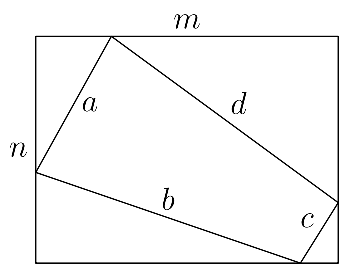
Inégalités

Exercice 86. Soit N un entier naturel strictement positif, montrer qu'il existe deux entiers naturels a, b tel que $1 \leqslant b \leqslant N$ et

$$|a - b\sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{N}.$$

Exercice 87. Décomposer 2008 en une somme d'entiers naturels dont le produit est maximal.

Exercice 88.



Soient m et n les longueurs des côtés d'un rectangle. Sur chaque côté de ce rectangle on choisit un point et on appelle a, b, c, d les longueurs du quadrilatère ainsi obtenu. Montrer que

$$1 \leqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{m^2 + n^2} \leqslant 2.$$

Exercice 89. Trouver les valeurs que peut prendre la quantité

$$\frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{b+c+a} + \frac{c}{c+d+b} + \frac{d}{d+a+c}$$

quand a, b, c, d décrivent les réels strictement positifs.

Exercice 90. Soient a, b, c trois réels positifs vérifiant $abc = 1$. Montrer que

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leqslant 1.$$

Exercice 91. Soient a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle. Montrer que

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geqslant 0$$

et déterminer les cas d'égalités.

Exercice 92. Déterminer toutes les valeurs du réel a pour lesquelles il existe cinq réels positifs ou nuls $x_1, \ldots, x_5$ vérifiant les relations suivantes :

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k = a, \sum_{k=1}^{5} k^3x_k = a^2, \sum_{k=1}^{5} k^5x_k = a^3.$$

Exercice 93. Soit n un entier naturel, trouver la plus petite constante C telle que pour tout $x_1, \ldots, x_n \geqslant 0$,

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leqslant C \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^4.$$

Exercice 94. Montrer que pour tout $a, b, c > 0$ tels que $abc = 1$ on a

$$(a^2 + 1)(b^3 + 2)(c^6 + 5) \geqslant 36.$$

Exercice 95. Soient a, b, c vérifiant $0 \leqslant a, b, c \leqslant 1$. Prouver que

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leqslant 1.$$

Exercice 96. Montrer que pour tous réels strictement positifs a, b, c on a

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geqslant 1.$$

2.2 Les solutions

Stratégies de base

Solution de l'exercice 1. Nous démontrons le résultat par récurrence sur n. À cet effet, pour $n \geqslant 1$ entier, soit P_n la proposition suivante :

$$P_n : \qquad « 1 + \tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{3^2} + \cdots + \tfrac{1}{n^2} \leqslant 2 - \tfrac{1}{n}. »$$

(Initialisation) Pour $n = 1$, on a bien $1 \leqslant 2 - 1$.

(Hérédité) Soit $n \geqslant 1$ un entier et supposons que P_n est vraie. Montrons que P_{n+1} est satisfaite. D'après l'hypothèse de récurrence :

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}. \tag{III.2}$$

Or :

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}. \tag{III.3}$$

En ajoutant les inégalités (III.2) et (III.3) il vient :

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n+1}.$$

Cela montre l'étape d'hérédité et conclut la récurrence.

Solution de l'exercice 2. Notons n le nombre de villes. Pour avoir une intuition de ce qui se passe, il est conseillé de tester différentes configurations pour des petites valeurs de n. Pour $n = 2$, il n'y a un qu'un seul moyen de transport. Pour $n = 3$, soient A, B, C les trois villes. Sans perte de généralité, supposons que $A - B$ est une ligne aérienne. Alors soit C peut être relié à A ou B par une ligne aérienne, auquel cas l'avion convient, soit C est relié à A et B par un canal, auquel cas le bateau convient.

Cela suggère de démontrer que la véracité de la proposition suivante par récurrence sur n :

P_n : « Pour toute configuration de n villes, il existe un moyen de transport vérifiant les conditions requises. »

(Initialisation) On a déjà vu que P_2 est vérifiée.

(Hérédité) Soit $n \geqslant 2$ un entier et supposons que P_n est vraie. Montrons que P_{n+1} est satisfaite. Considérons A une ville quelconque et appliquons la propriété P_n à la configuration des n villes restantes. Sans perte de généralité, supposons que c'est l'avion qui convient. Alors de deux choses l'une : soit il existe une ligne aérienne reliant A à une autre ville, auquel cas l'avion convient, soit A est relié à toutes les autres villes par un canal, auquel cas le bateau convient.

Solution de l'exercice 3. (i) On considère un triangle équilatéral de côté x. D'après le principe des tiroirs, il existe alors deux sommets de ce triangle qui conviennent.

(ii) Raisonnons par l'absurde en supposant qu'on puisse trouver des distances x et y telles que deux points rouges ne soient jamais distants de x et deux points bleus ne soient jamais distants de y.

Il existe alors un point rouge ; notons le A. Considérons ensuite un triangle isocèle ABC tel que $AB = AC = x$ et $BC = y$. Ainsi, B et C doivent être bleu. Or ces deux points sont distants de y, ce qui est contradictoire. Notre supposition de départ était donc fausse ; ce qui conclut.

Solution de l'exercice 4. Montrons que la propriété suivante est vérifiée par récurrence sur n :

$$P_n : \qquad « \alpha^{n-1} + \frac{1}{\alpha^{n-1}} \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Z} ».$$

(Initialisation) P_1 est clairement vraie.

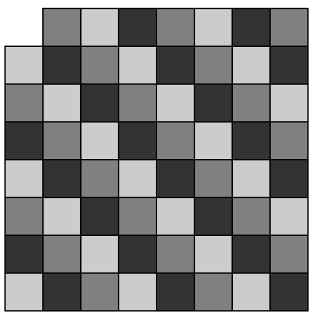
(Hérédité) Soit $n \geqslant 1$ un entier et supposons que P_n est vraie. Remarquons que :

$$\alpha^{n+1} + \frac{1}{\alpha^{n+1}} = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}\right) - \left(\alpha^{n-1} + \frac{1}{\alpha^{n-1}}\right),$$

qui est entier grâce à l'hypothèse de l'énonce et à l'hypothèse de récurrence P_n. Cela conclut.

Solution de l'exercice 5. (i) Une figure pavée entièrement par des triminos 3×1 possède un nombre multiple de 3 cases. Or le damier à paver possède un nombre de cases qui n'est pas multiple de 3. La réponse est donc *non*.

(ii) Colorions la deuxième figure avec trois couleurs différentes de la manière suivante :



On remarque qu'un trimino recouvre nécessairement 3 cases dont les couleurs sont deux à deux différentes. Mais la figure à paver ne possède pas la même nombre de cases de chaque couleur, la réponse est donc encore *non*.

Solution de l'exercice 6. Le premier contrôleur peut vendre tous les billets si, à chaque fois que c'est son tour, il procède de la manière suivante :

☞ Si une personne a déjà été désignée deux fois, il la choisit.

☞ Sinon, il choisit une personne qui n'a jamais été choisie.

Il peut toujours procéder de la sorte. En effet, une récurrence permet de voir qu'après chaque tour du deuxième contrôleur, le nombre de personnes choisies un nombre pair de fois est impair, donc non nul.

Solution de l'exercice 7. On montre par récurrence qu'après le i-tour, le butin de chacun des pirates est divisible par 2^i. Comme à l'issue du septième tour il existe un pirate ayant un nombre non nul de pièces d'or, celui-ci en détient la totalité.

Solution de l'exercice 8. Notons $a_1, \ldots, a_{2008}$ les entiers en question et considérons les sommes $s_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i$ (pour $1 \leqslant i \leqslant 2008$). Si l'une d'elles est divisible par 2008, c'est gagné. Sinon, d'après le principe des tiroirs, il existe deux sommes, disons s_i et s_j (avec $i < j$), qui ont le même reste dans la division euclidienne par 2008. Dans ce cas, $s_j - s_i$ convient.

Solution de l'exercice 9. Notons $a_1, \ldots, a_m$ les numéros des cartes en question et considérons les sommes $s_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i$ (pour $1 \leqslant i \leqslant m$). En raisonnant comme dans l'exercice précédent, on voit que $s_1, \ldots, s_m$ sont distincts modulo $m+1$. Mais comme a_2 ne peut être égal à s_q modulo $m+1$ pour $3 \leqslant q \leqslant m$, cela implique que $a_2 \equiv s_1 \mod m+1$ ou $a_2 \equiv s_2 \mod m+1$. Comme $0 < a_1 < m+1$, on a nécessairement $a_1 = a_2$. On conclut en répétant ce raisonnement.

Stratégies et graphes

Solution de l'exercice 10. Première solution. On ne garde qu'une arête de chaque couleur, ce qui nous laisse un sous-graphe à n sommets et n arêtes. On sait qu'alors ce graphe contient un cycle. Cela nous assure que le graphe initial K_n contient un cycle dont les arêtes sont de couleurs deux à deux distinctes, ce que l'on appelera un *arc-en-ciel*.

Soit alors $C = A_1A_2\cdots A_pA_1$ un cycle arc-en-ciel de longueur minimale. Si $p \geqslant 4$, puisque C est un arc-en ciel, la couleur c de l'arête A_1A_3 apparaît au plus une fois dans C, elle n'est pas utilisée dans l'un des deux chemins $L = A_1A_2A_3$ ou $L' = A_3\cdots A_pA_1$. Dans les deux cas, en complétant L et L' avec l'arête A_1A_3, on obtient un autre cycle arc-en-ciel de longueur strictement inférieure à celle de C, en contradiction avec la minimalité de C. Ainsi, $p = 3$ et l'on a la conclusion désirée.

Seconde solution. On commence par noter que si, pour un certain entier n, toute coloration des arêtes de K_n utilisant n couleurs entraine l'existence d'un triangle tricolore, il en est de même si l'on utilise plus de n couleurs. On prouve alors le résultat par récurrence sur n.

Pour $n = 3$, le graphe lui-même est un triangle dont les trois arêtes sont de couleurs deux à deux distinctes.

Supposons le résultat établi pour un certain entier $n \geqslant 3$. On considère alors une coloration des arêtes de K_{n+1} à l'aide de $n+1$ couleurs, chacune étant utilisée au moins une fois. Soit A un des sommets de K_{n+1} et G le sous-graphe obtenu en éliminant A et les arêtes dont il est une extrémité. Clairement, G est un K_n et la coloration initiale induit une coloration des arêtes de G à l'aide de $n+1$ couleurs, mais certaines ne sont peut-être pas effectivement utilisées. Si cette coloration des arêtes de G utilise au moins n couleurs, l'hypothèse de récurrence assure de l'existence d'un triangle tricolore dans G, et donc dans le K_{n+1} initial. Si la coloration des arêtes de G utilise au plus $n-1$ couleurs, alors au moins deux couleurs ont complétement disparus, disons c et c'. Cela signifie qu'il existe des arêtes AB et AC coloriées respectivement avec c et c', et que l'arête BC n'est coloriée ni avec c ni avec c'. Mais alors ABC est un triangle tricolore dans K_{n+1}. Ainsi, dans tous les cas, le résultat est vrai pour la valeur $n+1$, ce qui achève la récurrence.

Solution de l'exercice 11. Il s'agit en fait de prouver que tout graphe G simple et fini, et dont tous les sommets sont de degrés au moins 3, contient un cycle de longueur paire.

Considérons un chemin $L = X_1 \cdots X_p$ n'utilisant que des sommets deux à deux distincts, et de longueur maximale. La maximalité de L assure alors que tout sommet adjacent à X_1 appartient à L. Et, puisque $d(X_1) \geqslant 3$, il est donc adjacent à X_r et X_s, avec $2 < r < s$.

Parmi les trois entiers $2, r, s$, deux sont de même parité, notons les X_a et X_b, avec $1 < a < b$ et $a \equiv b \pmod 2$. Alors $X_1 X_a X_{a+1} \cdots X_b X_1$ est un cycle de longueur paire.

Solution de l'exercice 12. On commence par essayer pour les premières valeurs de n, et on trouve que

☞ $A_3 = \{1, 5, 6\}$ et $B_3 = \{2, 3, 7\}$ fournissent une solution pour $n = 3$,

☞ $A_4 = \{1, 4, 6, 7\}$ et $B_4 = \{2, 3, 5, 8\}$ fournissent une solution pour $n = 4$,

☞ $A_5 = \{1, 5, 9, 17, 18\}$ et $B_5 = \{2, 3, 11, 15, 19\}$ fournissent une solution pour $n = 5$.

Pour $n \geqslant 3$, supposons que les ensembles $A_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$ et $B_n = \{b_1, \ldots, b_n\}$ fournissent une solution pour la valeur n.

On pose $A'_n = \{8a_1, \ldots, 8a_n\}$ et $B'_n = \{8b_1, \ldots, 8b_n\}$.

Clairement, A'_n et B'_n fournissent également une solution pour la valeur n et aucun de leurs éléments n'appartient à $A_3 \cup B_3$. Par conséquent, les ensembles $A_{n+3} = A_3 \cup A'_n$ et $B_{n+3} = B_3 \cup B'_n$ fournissent une solution pour la valeur $n + 3$.

Ainsi, par récurrence, à partir des solutions trouvées pour $n = 3, 4, 5$, on construit des solutions pour tous les autres entiers.

Solution de l'exercice 13. Soient v_n, j_n, r_n les nombres de boules respectivement vertes, jaunes, rouges présentes dans l'urne après n opérations. On vérifie facilement que la quantité $S = 3^{v_n} 5^{j_n} 7^{r_n} \pmod 8$ est invariante par rapport à l'opération autorisée.

Solution de l'exercice 14. Tant qu'il existe une ligne dont la somme est strictement négative, on utilise l'opération sur une de ces lignes. Ainsi, après chaque opération, la somme de tous les nombres écrits dans le tableau augmente (considérer la somme totale comme la somme par lignes). Puis, on procède même pour les colonnes. Puis, si besoin, on revient aux lignes et ainsi de suite.

Comme il n'y a qu'un nombre fini de sommes pour l'ensemble du tableau (au plus 2^{mn}, selon les choix des signes des nombres écrits dans les cases), ce processus devra nécessairement s'arrêter. A ce moment là, l'objectif sera clairement atteint.

Solution de l'exercice 15. Pour un graphe orienté, la somme des degrés sortants est égale au nombre d'arêtes. Si celle-ci est paire, cela assure qu'il y a un nombre pair de sommets de degrés sortants impairs (on les appelera *mauvais* sommets).

Ainsi, dans le cas présent, on commence par donner une orientation quelconque à chacune des arêtes. D'après ci-dessus, le nombre de mauvais sommets est pair. S'il est non nul, on en choisit deux quelconques, disons A et B. Puisque le graphe initial G est connexe, on peut considèrer un chemin qui relie A et B dans G. Pour cette succession d'arêtes dans le graphe orienté, on change alors l'orientation de chacune des arêtes. La parité du degré sortant de chaque sommet concerné est préservée sauf pour les extrémités A et B, pour lesquelles les degrés sortants deviennent pairs. Ainsi, on a diminué le nombre total de mauvais sommets de deux unités. En répétant cette procèdure un nombre fini de fois, on finira donc par atteindre l'objectif souhaité.

Solution de l'exercice 16. On raisonne par récurrence sur le nombre $e \geqslant 0$ d'arêtes.

Le résultat est évident pour $e \leqslant 2$.

Soit $k \geqslant 2$ un entier. On suppose que le résultat demandé a été établi pour tout graphe de $e \leqslant k$ arêtes.

On considère maintenant un graphe fini simple et non orienté G contenant $e = k+1$ arêtes. Sans perte de généralité, on peut supposer que chaque sommet est de degré non nul.

☞ S'il existe un sommet, disons M, qui est de degré 1, on note A le sommet adjacent à M. On élimine alors M et l'arête AM, et on utilise l'hypothèse de récurrence sur le graphe ainsi obtenu. Puis, on oriente l'arête AM selon les valeurs des degrés sortants et entrants de A.

☞ Si tous les sommets sont de degrés au moins 2, alors G contient un cycle C. On élimine alors toutes les arêtes de C, et on utilise l'hypothèse de récurrence sur le graphe ainsi obtenu. Puis, on oriente les arêtes de C selon un sens de parcours du cycle (cela contribue pour le même nombre d'unités dans le degré entrant et le degré sortant de chaque sommet).

Ainsi, dans chaque cas, on obtient une orientation ayant la propriété souhaitée, ce qui achève la récurrence.

Solution de l'exercice 17. On commence par noter que, pour $a = 2$ et $b \geqslant 2$, on a clairement $R(a,b) = R(2,b) = b$ puisque toute bicoloration des arêtes de K_b utilise au moins une fois la couleur rouge ou n'utilise que la couleur bleue. Et d'autre part, avec $b-1$ sommets, si l'on colorie toutes les arêtes en bleu, il n'apparaît ni un K_2 dont l'arête est rouge ni un K_b dont toutes les arêtes sont bleues. De même, pour $b = 2$ et $a \geqslant 2$, on a clairement $R(a,b) = R(a,2) = a$.

De façon générale, par symétrie, on a même toujours $R(a,b) = R(b,a)$ (sous réserve d'existence). De plus, pour prouver l'existence de $R(a,b)$, il suffit de prouver qu'il existe un entier $p \geqslant 2$ tel que, pour toute coloration de arêtes de K_p en rouge ou bleu, il existe un sous-graphe K_a dont toutes les arêtes sont rouges ou un sous-graphe K_b dont toutes les arêtes sont bleues. En se retreignant à des sous-graphes K_p, cela restera vrai pour tout entier $n \geqslant p$.

On va raisonner par récurrence sur $n = a + b$.

Pour $n = 4$, on a $a = b = 2$ et on a vu que $R(2,2)$ existe.

Supposons que, pour un certain entier $n \geqslant 4$, les nombres $R(a,b)$ existent pour tous entiers $a, b \geqslant 2$ tels que $a+b = n$ Soient $a, b \geqslant 2$ des entiers tels que $a+b = n+1$. D'après nos remarques initiales, on peut supposer que $a, b \geqslant 3$. Alors, d'après l'hypothèse de récurrence, les nombres $R(a-1,b)$ et $R(a,b-1)$ existent. On pose $p = R(a-1,b) + R(a,b-1)$. On considère alors une bicoloration quelconque des arêtes de K_p. Soit A un des sommets du graphe. D'après le principe des tiroirs, parmi les $p-1$ arêtes issues de A, au moins $R(a-1,b)$ sont rouges ou au moins $R(a,b-1)$ sont bleues.

Dans le premier cas, on note G le sous-graphe dont les sommets sont les $R(a-1,b)$ autres sommets reliés à A par des arêtes rouges. La coloration de K_p induit celle de ce nouveau graphe complet. D'après la définition de $R(a-1,b)$, il existe un sous-graphe K_b de G, et donc de K_p, dont toutes les arêtes sont bleues, ou il existe un sous-graphe complet K_{a-1} dont toutes les arêtes sont rouges. Dans ce cas, en rajoutant le sommet A et toutes les arêtes rouges qui le relient aux $a-1$ sommets concernés, on obtient un sous-graphe K_a du graphe K_p initial dont toutes les arêtes sont rouges.

Le second cas se traite de la même manière.

Ainsi, dans tous les cas, pour le graphe K_p, on est assuré de l'existence d'un sous-graphe K_a dont toutes les arêtes sont rouges ou d'un sous-graphe K_b dont toutes les arêtes sont bleues. D'après ci-dessus, cela permet d'affirmer que $R(a,b)$ existe. De plus, d'après la minimalité de $R(a,b)$, on a $R(a,b) \leqslant p$, ce qui est justement l'inégalité demandée.

Solution de l'exercice 18. On va prouver que les couples cherchés sont ceux pour lesquels m ou n est pair.

Soient (m,n) un couple d'entiers strictement positifs pour lesquels une telle coloration est possible. On considère le graphe fini simple et non orienté G dont les sommets sont les cases, deux reliées par une arête si et seulement si elles sont adjacentes (mais distinctes) et de même couleur. Ainsi, chaque sommet est de degré impair. Le nombre total de sommets est donc pair, ce qui assure que m ou n est pair.

Réciproquement, supposons qu'il y ait un nombre pair m de lignes. On colorie alors les deux premières lignes en noir, puis les deux suivantes en blanc, puis les deux suivantes en noir et ainsi de suite. Il est facile de vérifier que ce coloriage a les propriétés souhaitées, et donc que (m, n) est bien une solution du problème.

Solution de l'exercice 19. Soit O le centre du cercle circonscrit au n-gone. On veut prouver qu'il existe une rotation de centre O qui envoie les sommets blancs sur au moins $[\frac{p}{2}]+1$ sommets noirs.

Par l'absurde, supposons que pour toute rotation de centre O il y ait au plus $[\frac{p}{2}]$ coïncidences entre points noirs et images de points blancs. En sommant sur toutes les rotations possibles, cela donne un total d'au plus $(n-1)[\frac{p}{2}]$ coïncidences. Mais, d'un autre côté, chaque sommet blanc va être envoyé une et une seule fois sur n'importe lequel des sommets noirs par une de ces rotations. Donc, il y a en tout $p(n-p)$ coïncidences. On en déduit que $p(n-p) \leqslant (n-1)[\frac{p}{2}] \leqslant (n-1)\frac{p}{2}$, et donc $n-p \leqslant p-1$. Contradiction.

Solution de l'exercice 20. On considère le graphe orienté dont les sommets sont les villes et les arêtes sont les vols. Il existe donc deux sommets, disons X et Y, pour lesquels il n'y a pas de chemin de X à Y. Soit A l'ensemble formé par Y et les sommets M pour lesquels il existe un chemin de M à Y. Soit B l'ensemble des sommets restants (et donc $X \in B$). Clairement, A et B partitionnent l'ensemble des sommets. Soient $V \in A$ et $V' \in B$. S'il existait un chemin de V' à V alors, en utilisant le chemin de V à Y, il existerait un chemin entre V' et Y, et on aurait $V' \in A$. Contradiction. Par suite, il est impossible d'atteindre une ville quelconque du groupe A en partant d'une ville quelconque du groupe B.

Solution de l'exercice 21. On dira qu'un sommet v est *saturé* à l'instant t lorsqu'il contient au moins $d(v)$ grenouilles à cet instant.

On commence par noter que, puisque le nombre de grenouilles est supérieur à la somme des degrés (qui vaut $2m$), il existe à chaque instant un sommet saturé. Ainsi, les sauts vont continuer indéfiniment.

Par l'absurde : supposons qu'il existe un sommet F sur lequel nulle patte de grenouille ne s'est et ne se posera jamais. Pour tout $i \geqslant 0$, on note S_i l'ensemble des sommets à une distance i de F. Puisque G est connexe et fini (un nombre fini d'arêtes pour un graphe connexe, cela entraine un nombre fini de sommets), il existe un entier $n \geqslant 1$ pour lequel les ensembles $S_0, \ldots, S_n$ sont non vides et partitionnent l'ensemble des sommets de G. Une infinité de sauts se répartissant en un nombre fini de sommets, il existe un sommet à partir duquel s'effectuent une infinité de sauts (le principe des tiroirs encore et toujours). Soit alors p le plus petit indice pour lequel S_p contient un sommet d'où s'effectuent une infinité de sauts. Puisque $S_0 = \{F\}$, on a clairement $p \geqslant 1$.

Soit A un sommet de S_p d'où s'effectuent une infinité de sauts. Puisque $A \in S_p$, il a forcément un voisin dans S_{p-1}, disons B, qui va recevoir une infinité de fois une grenouille venant de A. Comme $d(B)$ est fini, le sommet B va être saturé une infinité de fois et va donc être également le départ d'une infinité de sauts. Ainsi, S_{p-1} contient un sommet d'où s'effectuent une infinité de sauts, en contradiction avec la minimalité de p.

Solution de l'exercice 22. Les entiers cherchés sont les entiers pairs supérieurs ou égaux à 6.

Clairement, on doit avoir $n \geqslant 4$. Et, avec quatre points A, B, C, D il est impossible d'avoir ABC et ABD équilatéraux de côté 1 avec également $CD = 1$. Ainsi, $n \geqslant 5$. Supposons que n soit un entier pour lequel il existe un ensemble E de n points du plan ayant les propriétés requises. On considère alors le graphe non orienté dont les sommets sont les n points, deux reliés par une arête si et seulement s'ils sont à une distance 1 l'un de l'autre. Alors, tous les sommets sont de degrés 3, ce qui entraine évidemment que n est pair.

Réciproquement, si $n = 2k$ avec $k \geqslant 3$, on considère un k-gone régulier $A_1 \cdots A_k$ de côté 1. Pour tous $i \neq j$, il n'existe qu'au plus deux points M du plan tels que A_iA_jM soit équilatéral de côté 1. Ainsi, on peut choisir un vecteur $\overrightarrow{u}$ de norme 1 de sorte que, pour tous $i \neq j$, on ait $\overrightarrow{A_iB_i} = \overrightarrow{u}$ avec $B_iA_j \notin \{0,1\}$ (d'après ci-dessus, il n'y a qu'un nombre fini de vecteurs à éviter). Alors l'ensemble formé des A_i et des B_i est tel que pour chaque point M de E, il y ait exactement trois autres points de E qui soient à une distance unité de M. Et donc n est bien une solution du problème.

Solution de l'exercice 23. Oui. On peut choisir $m = 2^{n-1}$, ce que l'on va prouver par récurrence sur n.

Le résultat est évident pour $n \leqslant 2$.

Soit $n \geqslant 2$ un entier pour lequel on suppose le résultat établi. Soit alors T un tournoi à 2^n joueurs, dont l'un s'appelle x. Soit G (resp. P) l'ensemble des joueurs contre lesquels x a gagné (resp. perdu). Alors $|G| + |P| = 2^n - 1$, ce qui assure que G ou P contient au moins 2^{n-1} éléments. Supposons que cela soit G (l'autre cas se traite de la même façon). D'après l'hypothèse de récurrence, dans le sous-tournoi qui ne concerne que les joueurs de G, il existe un sous-tournoi transitif à n joueurs. En ajoutant x à ces n joueurs, on a alors un sous-tournoi transitif à $n+1$ joueurs.

Remarque. Question subsidiaire : prouver que la valeur $m = 2^{n-1}$ est optimale.

Solution de l'exercice 24. La réponse est non.

On note O le centre du cercle circonscrit à l'hexagone. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note a_n le nombre accroché au sommet A après n opérations. Les nombres b_n, c_n, d_n, e_n, f_n sont définis de manière analogue. Il est alors facile de vérifier que le vecteur $a_n\overrightarrow{OA} + b_n\overrightarrow{OB} + c_n\overrightarrow{OC} + d_n\overrightarrow{OD} + e_n\overrightarrow{OE} + f_n\overrightarrow{OF}$ est en fait indépendant de n, et constitue donc un invariant. Comme il vaut initialement $\overrightarrow{OA}$, il ne peut finir par être égal à $\overrightarrow{OM}$, pour $M \neq A$.

Solution de l'exercice 25. Considèrons le graphe non orienté dont les sommets sont les A_i, deux quelconques reliés par une arête si et seulement s'ils leur intersection est non vide. L'objectif est de prouver que ce graphe contient un triangle.

Par l'absurde : supposons qu'il n'y ait pas de triangle. Alors, il y a au moins 51 sommets de degrés ne dépassant pas 50 ; en effet, dans le cas contraire, il y aurait 51 sommets de degrés au moins 51. Soit A l'un d'entre eux. Alors, A serait adjacent à un autre de ces 51 sommets, disons B. Puisque $d(A) + d(B) \geqslant 102$, il existerait un troisième sommet, disons C, adjacent à la fois à A et à B, ce qui contredirait notre hypothèse qu'il n'existe pas de triangle. Sans perte de généralité, on peut supposer que $A_1, \ldots, A_{50}$ sont des sommets de degrés ne dépassant pas 50. Pour tout $i \leqslant 50$, il existe donc 50 des sous-ensembles qui sont disjoints de A_i, ce qui entraine que $|A_i| < \frac{n}{51}$. Mais alors

$$\left|\bigcup_{i=1}^{50} A_i\right| \leqslant \frac{50n}{51},$$

ce qui contredit l'énoncé.

Solution de l'exercice 26. Considèrons le graphe dont les sommets sont les lignes et les colonnes, une arête reliant la ligne L_i à la colonne C_j si et seulement si la case (i,j) contient un 1. D'après l'énoncé, si L_i et C_j ne sont pas adjacentes, alors $d(L_i) + d(C_j) \geqslant n$ et il s'agit de prouver que le nombre d'arêtes de ce graphe est $e \geqslant \frac{n^2}{2}$. Or, en sommant sur les couples (L_i, C_j) avec L_i et C_j non adjacentes, on a

$$S = \sum (d(L_i) + d(C_j)) \geqslant n(n^2 - e). \qquad \text{(III.4)}$$

D'un autre côté, dans cette somme, pour tout i, le terme $d(L_i)$ apparaît $n - d(L_i)$ fois. De même, pour tout j, le terme $d(C_j)$ apparaît $n - d(C_j)$ fois. Et ainsi, puisque $\sum_{i=1}^{n} d(L_i) = \sum_{j=1}^{n} d(C_j) = e$, il vient

$$S = \sum_{i=1}^{n} d(L_i)(n - d(L_i)) + \sum_{j=1}^{n} d(C_j)(n - d(C_j)) = 2ne - \sum_{i=1}^{n} d^2(L_i) - \sum_{j=1}^{n} d^2(C_j). \qquad \text{(III.5)}$$

D'après l'inégalité entre les moyennes arithmétiques et quadratiques, on a

$$\sum_{i=1}^{n} d^2(L_i) \geqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} d(L_i)\right)^2 = \frac{e^2}{n} \text{ et de même } \sum_{j=1}^{n} d^2(C_j) \geqslant \frac{e^2}{n}. \qquad \text{(III.6)}$$

De (III.4), (III.5) et (III.6), on déduit que $n(n^2 - e) \leqslant 2ne - \frac{2e^2}{n}$ ou encore $2e^2 - 3n^2 e + n^4 \leqslant 0$. Le membre de gauche est un trinôme en e dont les racines sont $\frac{n^2}{2}$ et n^2, d'où $e \geqslant \frac{n^2}{2}$.

Solution de l'exercice 27. On pose $b - a = 2^t k$, avec $t \geqslant 0$ et k impair. On va alors montrer que l'on peut obtenir $(1, n)$ si et seulement si $n - 1 > 0$ est divisible par k.

Supposons qu'après un certain nombre d'opérations (éventuellement aucune), on n'ait obtenu que des couples de la forme (x, y) avec $x < y$ et $y - x = 0 \pmod k$. Il est immédiat de vérifier que l'utilisation de n'importe laquelle des trois machines produira un couple (u, v) avec $u < v$ avec $v - u = 0 \pmod k$. Ainsi, une récurrence évidente permet d'affirmer que, si $(1, n)$ est accessible, alors $n - 1 > 0$ est divisible par k.

Réciproquement, soit donc $n > 1$ un entier tel que $n = 1 + kp$, où $p \geqslant 1$ est un entier. Si $t \geqslant 1$, alors a et b sont de même parité. S'ils sont pairs, on utilise la seconde machine. S'ils sont impairs, on utilise la première machine puis la second. Dans les deux cas, on se ramène à (a', b'), avec $b' - a' = 2^{t-1}k$ et, si $a \geqslant 2$, on a aussi $a' < a$. En répétant cette procèdure, on se ramène au cas où $t = 0$ et $a = 1$. Pour simplifier les notations, on suppose donc que $t = 0$ et $a = 1$, et alors $b = 1 + k$. On note ensuite qu'en utilisant plusieurs fois de suite la première machine, on peut en fait obtenir $(a + x, b + x)$ pour tout entier $x \geqslant 0$. Ainsi, à partir de $(1, 1 + k)$, on construit $(1 + k, 1 + 2k), (1 + 2k, 1 + 3k), \ldots, (1 + k(p - 1), 1 + kp)$. Puis, en utilisant la troisième machine, on obtient $(1, 1 + kp)$, ce qui prouve que $(1, n)$ est accessible.

Solution de l'exercice 28. On va raisonner par récurrence sur $k = [\sqrt{n}]$.

Pour $k = 1$, le graphe G n'a pas plus de trois sommets et ne contient pas de triangle. Il est immédiat de vérifier à la main qu'on peut trouver un 2-coloriage propre.

Soit $k \geqslant 2$ un entier. On suppose que tout graphe d'ordre N, avec $k - 1 \geqslant [\sqrt{N}]$, ne contenant pas de triangle admet un coloriage propre en pas plus de $2\sqrt{N}$ couleurs. Soit G un graphe d'ordre n, avec $k = [\sqrt{n}]$, ne contenant pas de triangle. On sait que, si Δ désigne le degré maximal d'un sommet de G, alors G admet un coloriage propre en pas plus de $\Delta + 1$ couleurs. On peut donc supposer que $\Delta > 2\sqrt{n} - 1$. Soit A un sommet de degré Δ. On donne la couleur c_1 à A et la couleur c_2 à tous les sommets adjacents à A, ce qui ne pose pas de problème puisqu'il n'y a pas de triangle. On considère maintenant le sous-graphe G' obtenu en éliminant A et tous ses voisins (et les arêtes associées). Il a n' sommets et pas de triangles, avec $n' < n - 2\sqrt{n} < (\sqrt{n} - 1)^2$. Alors $k' = [\sqrt{n'}] \leqslant [\sqrt{n}] - 1 \leqslant k - 1$, et l'hypothèse de récurrence assure que G' admet un coloriage propre en pas plus de $2\sqrt{n'}$ couleurs, soit donc en pas plus de $2\sqrt{n} - 2$ couleurs (que l'on choisit évidemment différentes de c_1 et c_2). On a ainsi un coloriage propre de G en pas plus de $2\sqrt{n}$ couleurs, ce qui achève la récurrence et la démonstration.

Solution de l'exercice 29. On considère le graphe G dont les sommets sont les $2n$ points et dont les arêtes sont les arcs. Il ne contient que des sommets de degrés 2 et l'on a un 3-coloriage propre des arêtes. Maintenant, on considère le sous-graphe G' dont les sommets sont les $2n$ points et dont les arêtes sont les arcs non rouges. Il ne contient donc que des sommets de degrés 2 et l'on a un 2-coloriage propre de ses arêtes. Ce graphe G' est alors la réunion de cycles deux à deux disjoints (en termes de sommets et d'arcs) de longueurs au moins égales à 4 : en effet, on part d'un sommet quelconque et on suit l'arête verte. Du sommet ainsi atteint, on continue selon l'arête bleue et ainsi de suite. On finira forcément par revenir sur un sommet déjà considéré, qui ne peut être que le sommet initial puisqu'on a utilisé les deux arêtes de chacun des sommets intermédiaires. Puis, on recommence avec un autre sommet pas encore utilisé, s'il en reste. Et ainsi de suite, jusqu'à épuiser tous les sommets. Chacun des cycles utilise des arêtes successives de couleurs différentes, donc est de longueur paire. Et, il ne peut être de longueur 2. Cela assure que le nombre c cycles bleus-verts ne dépasse pas $\frac{2n}{4}$, c'est-à-dire que $c \leqslant \frac{n}{2}$.

On prouve de même que $b \leqslant \frac{n}{2}$, ce qui conduit immédiatement au résultat désiré.

Solution de l'exercice 30. Il est clair qu'il faut au moins n couleurs. On va prouver qu'en fait n couleurs suffisent.

C'est évident pour $n \leqslant 2$, on suppose donc que $n \geqslant 3$.

On répartit les 2^n sommets en n sous-ensembles deux à deux disjoints $A_0, \ldots, A_{n-1}$, où $|A_i| = 2^i$ pour $i \leqslant n-2$ et $|A_{n-1}| = 2^{n-1}+1$.

On colorie ensuite les arêtes de la façon suivante : l'arête (u, v) est coloriée avec la couleur n°i si et seulement si $u \in A_i$ et $v \in A_j$ avec $i \leqslant j$.

Soit maintenant un cycle hamiltonien quelconque. Supposons que la couleur n°i n'apparaîsse pas dans le cycle. Sans perte de généralité, on peut supposer que l'on parcourt le cycle en commençant par un sommet de A_i, disons x_1. Son successeur, disons y_1, doit donc être un sommet appartenant à A_j avec $i > j$. On continue ainsi jusqu'au prochain sommet appartenant à A_i, disons x_2, dont le successeur, disons y_2, doit aussi être un sommet appartenant à un A_k avec $i > k$. En parcourant ainsi tout le cycle, on couple chaque sommet de A_i avec un sommet appartenant à $\cup_{j<i} A_j$. Mais ceci est impossible car

$$\left|\bigcup_{j<i} A_j\right| = \sum_{j<i} |A_j| = 2^{i-1} - 1 < |A_i|.$$

Ainsi, le cycle contient la couleur n°i, et ce pour tout $i \leqslant n-1$. Cela assure que le coloriage ci-dessus a les propriétés adéquates.

Solution de l'exercice 31. On raisonne par récurrence sur le nombre $n \geqslant 1$ de sommets.

Le résultat est évident pour $n = 1, 2$.

Soit $n \geqslant 3$ un entier tel que, pour tout graphe à $n-1$ sommets une telle division soit possible. Soit donc un graphe G dont l'ensemble des sommets est V, avec $|V| = n$. Si tous sont de degrés pairs, on pose $V_1 = \emptyset$ et $V_2 = V$.

Sinon, c'est qu'il existe un sommet A de degré impair. Soient N l'ensemble de ses voisins et G' le graphe dont l'ensemble des sommets est $V' = V - \{A\}$ et tel que XY est une arête de G' si et seulement si $X, Y \in N$ et XY n'est pas une arête dans G, ou si l'un au moins de X, Y n'est pas dans N et XY est une arête de G.

D'après l'hypothèse de récurrence, on peut répartir les sommets de G' en deux parties disjointes W_1 et W_2 de sorte que, dans chacun des deux sous-graphes induits, chaque sommet soit de degré pair.

Comme A est de degré impair dans G, une et une seule des deux parties W_1 et W_2 contient un nombre impair de voisins de A. Sans perte de généralité, on peut donc supposer que $|N \cap W_1|$ est pair et $|N \cap W_2|$ est impair. On pose alors $V_1 = W_1 \cup \{A\}$ et $V_2 = W_2$. Soient G_1 et G_2 les deux sous-graphes de G respectivement associés à V_1 et V_2.

☞ Premier cas : $X \in V_1$.

Si $X = A$, la construction ci-dessus assure qu'il est de degré pair dans G_1. Si $X \neq A$ et $X \notin N$, ajouter A ne modifie pas le degré de X dans G_1 par rapport à celui qu'il avait dans le sous-graphe associé à W_1.

Si $X \in N$, en notant $d_{H,E}(X)$ le degré de X dans le sous-graphe H associé à l'ensemble de sommets E, il vient

$$d_{G_1,V_1}(X) = d_{G',W_1}(X) - d_{G',W_1\cap N}(X) + d_{G,W_1\cap N}(X) + 1,$$

le 1 venant de l'arête AX. Or, par construction, tout sommet de $W_1 \cap N$, sauf X, est adjacent à X soit dans G soit dans G' donc $|W_1 \cap N| = 1 + d_{G',W_1\cap N}(X) + d_{G,W_1\cap N}(X)$. Et ainsi

$$d_{G_1,V_1}(X) = d_{G',W_1}(X) - 2d_{G',W_1\cap N}(X) + |W_1 \cap N| = 0 \pmod 2,$$

puisque $d_{G',W_1}(X) = |W_1 \cap N| = 0 \pmod 2$. Finalement, tout sommet de V_1 est bien de degré pair dans G_1.

☞ Second cas : $X \in V_2$.

Si $X \notin N$, le degré de X dans G_1 est celui qu'il avait dans le sous-graphe associé à W_1.

Si $X \in N$, il vient cette fois $d_{G_2,V_2}(X) = d_{G',W_2}(X) - d_{G',W_2\cap N}(X) + d_{G,W_2\cap N}(X)$. Or, comme ci-dessus, on a $|W_2 \cap N| = 1 + d_{G',W_2\cap N}(X) + d_{G,W_2\cap N}(X)$. D'où $d_{G_1,V_1}(X) = d_{G',W_1}(X) - 2d_{G',W_1\cap N}(X) + |W_1 \cap N| = 0 \pmod 2$, puisque $d_{G',W_2}(X) = |W_2 \cap N| + 1 = 0 \pmod 2$.

Finalement, tout sommet de V_2 est bien de degré pair dans G_2.

<u>*Solution de l'exercice 32.*</u> Première solution. Soit G un graphe sans triangle et dont le nombre chromatique est k. On va construire un graphe G' sans triangle et dont le nombre chromatique est $k+1$, ce qui permettra de conclure immédiatement par récurrence.

Soient $v_1, \dots, v_n$ les sommets de G. On ajoute alors les sommets $x_1, \dots, x_n$ et y, et les arêtes nécessaires de sorte que, pour chaque i, le sommet x_i soit adjacent à chacun des voisins de v_i et à y. On note G' le graphe ainsi obtenu (et donc G est un sous-graphe de G'). Il est clair que les x_i forme un ensemble de sommets indépendants et, puisque y n'est adjacent qu'aux x_i, un éventuel triangle dans G' devrait être du type $x_iv_jv_k$. Mais alors, par construction, $v_iv_jv_k$ serait un triangle dans G, ce qui est impossible. Donc G' ne contient pas de triangle. Soit $f : \{v_1, \dots, v_n\} \to \{1, \dots, k\}$ un k-coloriage propre de G. On considère alors l'application $g : \{v_1, \dots, v_n, x_1, \dots, x_n, y\} \to \{1, \dots, k+1\}$ qui prolonge f et telle que $g(y) = k+1$ et $g(x_i) = f(v_i)$ pour tout i. Il est facile de vérifier g est un $(k+1)$-coloriage propre des sommets de G', ce qui assure que $\chi(G') \leqslant k+1$.

Réciproquement, supposons qu'il existe un k-coloriage propre g de G'. On va prouver qu'on peut en déduire un $(k-1)$–coloriage propre sur les sommets de G, en contradiction avec le fait que $\chi(G) = k$ et l'on aura bien $\chi(G') = k+1$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $g(y) = k$, ce qui oblige g à ne prendre que des valeurs inférieures à k sur $\{x_1, \dots, x_n\}$. Par contre, a priori, g peut prendre toutes les valeurs possibles sur $\{v_1, \dots, v_n\}$. Soit A l'ensemble des v_i pour lesquels $g(v_i) = k$. Si $A = \emptyset$ alors g induit un $(k-1)$–coloriage propre des sommets de G et la contradiction attendue est déjà obtenue. Si $A \neq \emptyset$, on recolorie les sommets de G en gardant les couleurs données pour les sommets qui ne sont pas dans A et, à chaque $v_i \in A$ on donne la couleur de x_i. Cela donne un $(k-1)$-coloriage des sommets de G dont il reste à vérifier qu'il est propre. Or, deux sommets qui étaient dans A ne sont pas adjacents (puisqu'ils avaient la même couleur avec g) et deux sommets adjacents qui tous les deux n'étaient pas A ont gardé les couleurs données par g ce qui assure que leurs couleurs respectives ne sont pas les mêmes. Enfin, si $v_i \in A$ et $v_j \notin A$ et que l'arête v_iv_j existe alors, par construction, l'arête x_iv_j existe aussi. Or, puisque g est un coloriage propre, on a $g(x_i) \neq g(v_j)$. Et, puisqu'on a donné à v_i la couleur de x_i, cela assure que v_i et v_j sont de couleurs différentes.

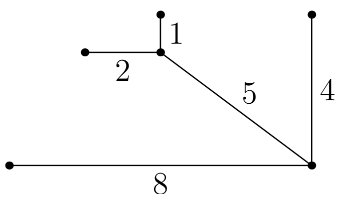
Finalement, le $(k-1)$-coloriage des sommets de G est propre et on a la contradiction cherchée.

Seconde solution. On considère l'ensemble E des points du plan de coordonnées (x, y) entières et strictement positives. On note Δ_i la droite d'équation $x = i$. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Pour $k = 2^n$, on considère le graphe G_n dont les sommets sont les points de E dont les deux coordonnées ne dépassent pas k et dont l'arête entre (a, b) et (c, d) existe si et seulement si $a + b = c$ ou $c + d = a$ (c.à.d. que (a, b) est adjacent à chacun des points de Δ_{a+b} et à eux seulement).

Par l'absurde : supposons que les sommets $(a,b),(c,d),(e,f)$ forment un triangle dans G_n. Sans perte de généralité, on peut supposer que $a \leqslant c \leqslant e$. Alors, les trois arêtes conduisent à $a+b=c=e$ et $c+d=e$, d'où $d=0$. Contradiction. Par suite, G ne contient pas de triangle.

On considère maintenant un coloriage propre des sommets de G. Soient $a,b \in \{1,\ldots,k\}$ avec $a<b$. Puisque le sommet $(a,b-a)$ est adjacent à (b,y) pour tout $y \in \{1,\ldots,k\}$, les sommets appartenant à Δ_b sont tous de couleurs différentes de celle de $(a,b-a)$. On en déduit que l'ensemble des couleurs utilisées pour les sommets de Δ_b est différent de l'ensemble des couleurs utilisées pour les sommets de Δ_a. Ceci étant vrai pour tous $a,b \in \{1,\ldots,k\}$ avec $a<b$, il faut donc au moins $k=2^n$ ensembles de couleurs deux à deux distincts. Et ainsi, il faut au moins n couleurs disponibles.

<u>*Solution de l'exercice 33.*</u> **a)** Oui. Par exemple :



b) Non.

Soit n un entier pour lequel une telle construction est possible. On considère le graphe simple et non orienté $\mathcal{G}$ dont les sommets sont les n villes et les arêtes les $n-1$ routes. D'après l'énoncé, $\mathcal{G}$ est connexe. Puisqu'il possède exactement $n-1$ arêtes, c'est un arbre et il ne possède donc pas de cycle. L'allusion de l'énoncé à la notion de plus petite distance est donc superflue.

Soit A un sommet arbitraire. On note x le nombre de villes dont la distance à A est paire (y compris A elle-même). De telles villes seront dites *bonnes*. On note y le nombre de villes dont la distance à A est impaire. Evidemment, on a $x+y=n$. (1) Puisqu'il n'y a qu'un seul chemin entre deux villes données, il y a exactement xy paires $\{B,C\}$ de villes dont exactement une est bonne. Pour une telle paire, la distance de B à C est alors impaire.

Réciproquement, si la distance entre les villes B et C est impaire, c'est qu'une et une seule de ces deux villes est bonne. Ainsi, puisque les distances sont exactement $1,2,\ldots,\frac{n(n-1)}{2}$, c'est que parmi ces nombres exactement xy sont impairs. Or :

☞ Si $n=4k$ ou $n=4k+1$, alors $\frac{n(n-1)}{2}$ est pair, et donc $xy=\frac{n(n-1)}{4}$. De (1), on déduit alors que $n=n^2-4xy=(x-y)^2$.

☞ Si $n=4k+2$ ou $n=4k+3$, alors $\frac{n(n-1)}{2}$ est impair, et donc $xy=\frac{1}{2}(\frac{n(n-1)}{2}+1)$. De (1), on déduit cette fois que $n-2=(x-y)^2$.

Ainsi, dans tous les cas, si n est une valeur convenable alors n ou $n-2$ est un carré. Comme ce n'est pas le cas de $n=1986$, une telle construction est impossible pour cette valeur.

<u>*Solution de l'exercice 34.*</u> On considère le graphe dont les sommets sont les points et les arêtes les segments. On sait qu'il y a $[\frac{n^2}{4}]$ arêtes et qu'il existe un triangle. Il s'agit de prouver que tout sommet de degré maximum est le sommet d'un triangle.

Soit d le degré maximum et A un sommet de degré d. La somme des degrés étant le double du nombre d'arêtes, il vient $2[\frac{n^2}{4}] \leqslant nd$, ou encore $d \geqslant \frac{2}{n}[\frac{n^2}{4}]$ (1).

Par l'absurde : supposons que A n'est le sommet d'aucun triangle. Soient $A_1,\ldots,A_d$ les sommets adjacents à A, et $B_1,\ldots,B_{n-d-1}$ les autres sommets. Il ne peut donc exister deux des A_i adjacents (sans quoi, on aurait un triangle de sommet A), donc chaque A_i est de degré au plus $n-d$. la somme des degrés est donc au plus $d+d(n-d)+(n-1-d)d=d(n-d)$ (2).

Si $n=2k$ est pair, on déduit de (1) et (2) que $d \geqslant k$ et $k^2 \leqslant d(2k-d)=k^2-(d-k)^2 \leqslant k^2$. Par suite, on a $d=k$ et dans tout ce qui précéde, les inégalités sont en fait des égalités. Ainsi, chaque A_i est de degré $n-d=k$, et donc est relié à chaque B_j. De même, chaque B_j est de degré d, et ne peut donc être adjacent à un autre des B_m. Mais alors, il n'y a pas de triangle du tout dans ce graphe. Contradiction.

Si $n=2k+1$ est impair, on déduit de (1) et (2) que $d \geqslant \frac{2k(k+1)}{2k+1} > k$ et $k(k+1) \leqslant d(2k+1-d)$. Par suite $d \geqslant k+1$ et $(k+1-d)(k-d) \leqslant 0$, ce qui entraine que $d=k+1$ et qu'à nouveau les majorations conduisant à (2) soient en fait des égalités. Ainsi, chaque A_i est de degré $n-d=k$, et donc est relié à chaque B_j. De même, chaque B_j est de degré d, et ne peut donc être adjacent à un autre des B_m. Et on obtient la même contradiction que ci-dessus.

Finalement, A est bien le sommet d'un triangle, ce qui conclut.

Arithmétique

Solution de l'exercice 35. *a)* La partie gauche de l'équation est congrue à 0 ou 1 mod 3, tandis que $8 \equiv 2$ mod 3. Il n'y a donc pas de solutions.
b) On suppose qu'il existe des nombres entiers strictement positifs tels que $a^2+b^2=3c^2$. Choisissons une solution (a, b, c) qui minimise la somme $a+b+c \in \mathbb{N}^*$. D'après l'équation, a^2+b^2 est divisible par 3, ce qui n'est possible que si a et b sont divisible par 3. Écrivons $a=3a_1$ et $b=3b_1$. Alors $3(a_1^2+b_1^2)=c^2$ et c est aussi divisible par 3. En notant $c=3c_1$, on obtient finalement $a_1^2+b_1^2=3c_1^2$, ce qui signifie que (a_1, b_1, c_1) est une solution de notre équation. Or, $a_1+b_1+c_1<a+b+c$, et la contradiction apparaît.

Solution de l'exercice 36. *a)* On a

$$100\ldots00500\ldots001 = 100\ldots00499\ldots994+7 \equiv 7 \pmod 9$$

tandis que un cube ne peut être congru qu'à 0, 1 ou 8 mod 9.
b) Un cube est congru à 0, 1 ou 8 mod 9, tandis que les restes possibles de division de a^3+b^3+4 par 9 sont 2, 3, 4, 5 et 6.
c) Un cube est congru à 0, 1 ou 6 mod 7, tandis que les restes possibles de division de $6m^3+3$ par 7 sont 2, 3 et 4.

Solution de l'exercice 37. On répartit les restes de division par 100 en les 51 groupes suivants :

$$\{0\},\ \{1, 99\},\ \{2, 98\},\ \ldots,\ \{49, 51\},\ \{50\}.$$

D'après le principe des tiroirs, deux de nos 52 nombres ont les restes de division par 100 qui se trouvent dans le même groupe. Alors leur somme ou leur différence est divisible par 100.

Solution de l'exercice 38 (). *a)* D'après l'algorithme d'Euclide, on a $\text{PGCD}(30n+2, 12n+1) = \text{PGCD}(12n+1, 6n) = \text{PGCD}(6n, 1) = 1$.
b) On a $\text{PGCD}(2^{120}-1, 2^{100}-1) = \text{PGCD}(2^{100}-1, 2^{20}-1) = 2^{20}-1$, car $2^{100}-1=(2^{20})^5-1$ est divisible par $2^{20}-1$.

Remarque. Plus généralement, on peut prouver que $\text{PGCD}(n^a-1, n^b-1) = n^{\text{PGCD}(a,b)}-1$.

Solution de l'exercice 39. *a)* Un nombre premier impair est soit de type $4n+1$, soit de type $4n+3$. On suppose qu'il n'existe qu'un nombre fini de premiers de type $4n+3$, on les note par $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Considérons le nombre $N=4p_1p_2\ldots p_k-1$: il est impair, de type $4n+3$ et il n'est divisible par aucun des p_i. Alors il doit être un produit de nombres premiers de type $4n+1$. Or un produit de nombres de type $4n+1$ est toujours un nombre de type $4n+1$. D'où la contradiction.
b) Un nombre premier impaire est soit de type $6n+1$, soit de type $6n+5$. On procède par l'absurde comme précédemment en considérant $6p_1p_2\ldots p_k-1$.

Solution de l'exercice 40. La puissance maximale 2^k qui divise $n!$ est donnée par la formule :

$$k = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \left[\frac{n}{2^3}\right] + \dots$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x. Donc, on a l'inégalité stricte (tous les $\frac{n}{2^i}$ ne sont pas entiers si $n > 0$) :

$$k < \frac{n}{2} + \frac{n}{2^2} + \frac{n}{2^3} + \dots = n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right) = n\frac{1/2}{1 - 1/2} = n$$

qui entraîne que 2^n ne divise pas $n!$.

Solution de l'exercice 41. *a)* Soit 2^k la plus grande puissance de 2 plus petit ou égale à n. Alors, le seul nombre inférieur ou égal à n divisible par 2^k est 2^k lui-même. En effet, $m = 2^k d \leqslant n$ entraîne $2^k d < 2^{k+1}$ et $d < 2$. Prouvons maintenant que $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^k} + \ldots + \frac{1}{n}$, où $n > 1$, n'est pas entier. Pour cela, il suffit de remarquer qu'en sommant les fractions on va multiplier tous les numérateurs, sauf celui de $\frac{1}{2^k}$, par une puissance non-triviale de 2. Au final A va donc s'écrire comme le quotient d'un nombre impair par un multiple de 2^k, et donc ne sera pas entier.
b) On procède comme précédemment, en considérant la plus grande puissance de 3 parmi les dénominateurs de la somme.
c) On remarque que $p - 1$ est pair et on trouve :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1} &= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{p-1}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p-2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{\frac{p-1}{2}} + \frac{1}{\frac{p+1}{2}}\right) \\ &= p\left(\frac{1}{1 \cdot (p-1)} + \frac{1}{2 \cdot (p-2)} + \dots + \frac{1}{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{p+1}{2}}\right). \end{aligned}$$

En sommant la dernière expression, on obtient $\frac{m}{n} = \frac{pk}{(p-1)!}$, où $k \in \mathbb{N}$. Puisque $(p-1)!$ n'est pas divisible par p, le numérateur m l'est nécessairement.

Solution de l'exercice 42. Si $n = 2k$ est pair, alors

$$19 \cdot 8^n + 17 = 19 \cdot (9-1)^{2k} + 17 \equiv 1 \cdot (-1)^{2k} + 2 = 3 \equiv 0 \pmod 3.$$

Si $n = 4k + 1$, alors

$$\begin{aligned} 19 \cdot 8^{4k+1} + 17 &= 19 \cdot 8 \cdot 64^{2k} + 17 = 19 \cdot 8 \cdot (65-1)^{2k} + 17 \\ &\equiv 6 \cdot 8 \cdot (-1)^{2k} + 4 = 52 \equiv 0 \pmod{13}. \end{aligned}$$

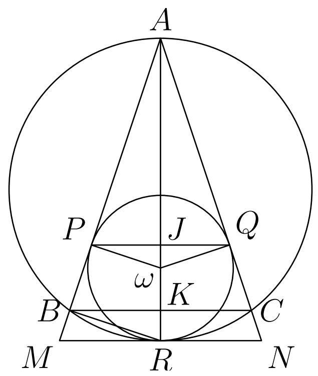
Si $n = 4k + 3$, alors

$$\begin{aligned} 19 \cdot 8^{4k+3} + 17 &= 19 \cdot 8^3 \cdot 64^{2k} + 17 = 19 \cdot 8^3 \cdot (65-1)^{2k} + 17 \\ &\equiv (-1) \cdot (-2)^3 \cdot (-1)^{2k} + 2 = 10 \equiv 0 \pmod 5. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier $n > 0$ le nombre $19 \cdot 8^n + 17$ est divisible soit par 3, soit par 13, soit par 5.

Géométrie

Solution de l'exercice 43.



On remarque d'abord qu'il y a beaucoup d'angles droits sur la figure. Il y a les angles $\widehat{AP\omega}$, $\widehat{AQ\omega}$, $\widehat{PJA}$ et $\widehat{BKA}$. Mais il y a aussi l'angle $\widehat{RBA}$, le triangle RBA étant inscrit dans un demi-cercle. On utilise alors deux fois le théorème de Thalès qui fournit les égalités :

$$\frac{AP}{AB} = \frac{A\omega}{AR} = \frac{AJ}{AK}.$$

On en déduit directement l'égalité de l'énoncé.

Solution de l'exercice 44. Chassons les angles. Par cocyclicité, on a $\widehat{AEF} = \pi - \widehat{ABF} = \widehat{ABD} = \pi - \widehat{ACD}$, donc les droites (CD) et (EF) sont parallèles.

Solution de l'exercice 45. Soit T l'intersection des cercles circonscrits aux triangles ARQ et BPR. Par colinéarité des points on a

$$\widehat{TQA} = \pi - \widehat{CQT}, \quad \widehat{TRB} = \pi - \widehat{ART}, \quad \widehat{TPC} = \pi - \widehat{BPT}.$$

Par cocyclicité on a

$$\widehat{TQA} = \pi - \widehat{ART}, \quad \widehat{TRB} = \pi - \widehat{BPT}.$$

On déduit $\widehat{TPC} = \pi - \widehat{CGT}$, et par conséquent les quatre points C, P, T, Q sont cocycliques, donc T appartient au cercle circonscrit au triangle CQP.

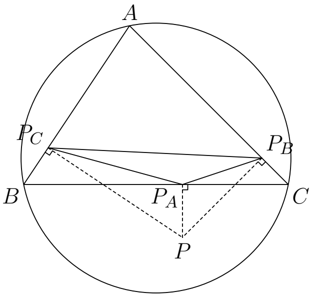
Solution de l'exercice 46. *(i)* Montrons que le triangle H_AH_BC est indirectement semblable au triangle ABC, les autres résultats se montrent de la même manière. Les deux triangles partageant l'angle en C, il suffit de montrer $\widehat{ABC} = \widehat{H_AH_BC}$. Comme les angles $\widehat{AH_AB}$ et $\widehat{AH_BB}$ sont droits, les points A, B, H_A et H_B sont cocycliques. On a donc

$$\widehat{ABC} = \widehat{ABH_A} = \pi - \widehat{AH_BH_A} = \widehat{H_AH_BC}.$$

(ii) D'après la question précédente, les angles $\widehat{CH_AH_B}$ et $\widehat{BH_AH_C}$ sont tous deux égaux à $\widehat{BAC}$, donc la droite (BC) est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{H_BH_AH_C}$. Or la hauteur (AH_A) est perpendiculaire à (BC), donc (AH_A) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{H_BH_AH_C}$. On montre de la même manière les autres résultats.
(iii) Pour montrer que le symétrique de H par rapport à la droite (BC) est sur le cercle circonscrit à ABC, il suffit de montrer que l'angle $\widehat{BHC}$ est le supplémentaire de l'angle $\widehat{BAC}$. Or on a

$$\widehat{BHC} = \pi - \widehat{HBC} - \widehat{HCB} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{BCA}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{CBA}\right) = \pi - \widehat{BAC}.$$

Solution de l'exercice 47. On traitera le cas où les points sont dans la configuration de la figure, les autres se traitent de façon similaire.



Les points P, P_A, B, P_C d'une part et P, A, P_B, P_C d'autre part sont cocycliques, d'où $\widehat{PP_CP_A} = \widehat{PBP_A} = \widehat{PBC}$ et $\widehat{PP_CP_B} = \widehat{PAP_B} = \widehat{PAC}$. Or les points P, Q et R sont alignés si et seulement si $\widehat{P_AP_CP_B} = 0$, soit $\widehat{PP_CP_A} = \widehat{PP_CP_B}$, donc si et seulement si $\widehat{PBC} = \widehat{PAC}$, et donc finalement si et seulement si les points A, B, C et P sont cocycliques.

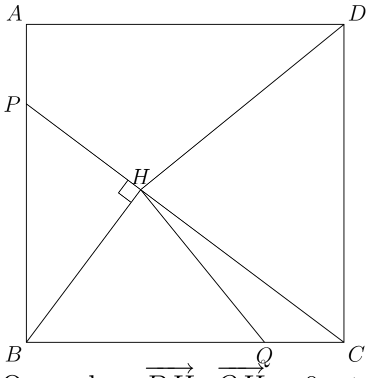
Solution de l'exercice 48. Soient K' et M' les projections de N sur (AB) et (AC) respectivement. Comme L et N sont sur la bissectrice de $\hat{A}$, on a $KL = LM$ et $K'N = NM'$. Or on a $BN = CN$ et $\widehat{K'BN} = \widehat{M'CN}$, donc les triangles BNK' et CNM' sont superposables, d'où $BK' = CM'$. Soit α l'angle moitié de l'angle $\widehat{A}$, on a

$$[ABC] = AB \cdot KL \sin\alpha + AC \cdot LM \sin\alpha = (AB + AC) \cdot KL \sin\alpha.$$

Or on a $AB + AC = AK' + AM'$ d'où $[ABC] = (AK' + AM')KL \sin\alpha = [AKLM] + [KLK'] + [LMM']$ d'où par parallélisme de (KL) et $(K'N)$ et de (LM) et (NM'), et finalement

$$[ABC] = [AKLM] + [KLN] + [LMN] = [AKNM].$$

Solution de l'exercice 49. Plaçons-nous dans le repère orthonormal $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.



Les points P et Q ont pour coordonnées respectives $(0, a)$ et $(a, 0)$, où $0 < a < 1$. La droite (PC) a alors pour équation $y = -ax + a$, donc (BH) a pour équation $y = \frac{1}{a}x$. Par conséquent l'intersection H de ces deux droites a pour coordonnées $\left(\frac{a^2}{1+a^2}, \frac{a}{1+a^2}\right)$. Par conséquent les vecteurs $\overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{QH}$ ont pour coordonnées respectives

$$\left(-\frac{1}{1+a^2}, \frac{a-1-a^2}{1+a^2}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{a^2-a-a^3}{1+a^2}, \frac{a}{1+a^2}\right).$$

On a alors $\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{QH} = 0$, et donc l'angle $\widehat{DHQ}$ est droit.

Solution de l'exercice 50. Soit K le point défini par $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. On va montrer que K n'est autre que l'orthocentre H du triangle ABC. Pour cela montrons que K est sur chacune des hauteurs du triangle. Par symétrie, il suffit de montrer que K est sur la hauteur issue de A. D'après la définition de K on a $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA'}$, où A' est le milieu du côté $[BC]$. Or la droite (OA) est orthogonale à (BC), donc la droite (AK) aussi, donc K est sur la hauteur issue de A, et par symétrie on a $K = H$.

Solution de l'exercice 51. *(i)* Soit G le barycentre de $(A, 1), (B, 2), (C, 3)$. On a alors

$$\left\| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} \right\| = \left\| 6\overrightarrow{MG} \right\| = 1$$

et parconséquent l'ensemble recherché est un cercle de centre G et de rayon $1/6$.
(ii) Cette fois la somme des poids affectés aux vecteurs est nulle. La méthodde précédente ne peut donc aboutir. La somme $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$ est en fait un vecteur indépendant du point M, appelons-le $\overrightarrow{v}$. Si $\|\overrightarrow{v}\| = 1$ alors l'ensemble recherché est le plan tout entier, sinon il est vide.
(iii) Soit G défini comme précédemment. Introduisons G dans l'égalité de l'énoncé :

$$\begin{aligned} MA^2 + 2MB^2 - 3MC^2 &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 \\ &= 6\overrightarrow{MG}^2 + 2(\overrightarrow{MG} \cdot (\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC}) + \overrightarrow{GA}^2 + 2\overrightarrow{GB}^2 + 3\overrightarrow{GC}^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = 0$. Notons c le réel $GA^2 + 2GB^2 + 3GC^2$. L'ensemble des points M recherché vérifie alors $6MG^2 = 1 - c$. Ainsi, si $c > 1$, l'ensemble recherché est vide, sinon il s'agit d'un cercle de centre G et de rayon $\sqrt{\frac{1-c}{6}}$.
(iv) Bien que le barycentre G ne soit plus défini (car la somme des poids est nulle), introduisons un point auxilliaire D quelconque et faisons comme si de rien n'était. On arrive à $2\overrightarrow{MD} \cdot (\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{DA}^2 + 2\overrightarrow{DB}^2 + 3\overrightarrow{DC}^2 = 1$. Cette fois, la somme $\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC}$ n'est pas nulle, mais elle est indépendante du point D, notons-la $\overrightarrow{v}$. L'ensemble des points M recherché vérifie donc $2\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{v} = 1 - c$. L'ensemble recherché est donc une droite perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{v}$.

Solution de l'exercice 52. Travaillons avec des vecteurs. L'égalité $\frac{CA}{CB} = k$ se reformule en $\overrightarrow{CA}^2 = k^2\overrightarrow{CB}^2$, soit $(\overrightarrow{CA} - k\overrightarrow{CB}) \cdot (\overrightarrow{CA} + k\overrightarrow{CB}) = 0$.

Supposons d'abord $k \neq 1$. Soit D le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, -k)$ (qui est bien défini puisque $-k + 1 \neq 0$) et E celui de $(A, 1)$ et (B, k) (qui est bien défini puisque $k + 1 \neq 0$). On a alors $\overrightarrow{CA} - k\overrightarrow{CB} = (1 - k)\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CA} + k\overrightarrow{CB} = (1 + k)\overrightarrow{CE}$, donc l'égalité de l'énoncé se reformule $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CE} = 0$. L'ensemble des points C recherché est donc l'ensemble des points voyant le segment $[DE]$ sous un angle droit, il s'agit donc du cercle de diamètre $[DE]$ (appelé *cercle d'Apollonius*).

Si $k = 1$, l'ensemble recherché est clairement la médiatrice du segment $[AB]$.

Remarque. Pour tout point C du plan différent de A et B, le rapport des longueurs $\frac{CA}{CB}$ a une et une seule valeur réelle positive. On en déduit que les cercles d'Apollonius (et la médiatrice de $[AB]$) forment un *faisceau*, c'est-à-dire qu'ils sont deux à deux disjoints et que leur réunion couvre le plan privé des points A et B.

Logique et structures

Solution de l'exercice 53.

A	B	(non$A$) ou B	$(A \Rightarrow B)$ et $(B \Rightarrow A)$
Faux	Faux	Vrai	Vrai
Faux	Vrai	Vrai	Faux
Vrai	Faux	Faux	Faux
Vrai	Vrai	Vrai	Vrai

A	B	C	$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$	$(A \text{ et } B) \Rightarrow C$
Faux	Faux	Faux	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Faux	Vrai	Vrai
Faux	Vrai	Vrai	Faux	Faux
Vrai	Faux	Faux	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Vrai	Vrai	Faux
Vrai	Vrai	Faux	Faux	Faux
Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai

Solution de l'exercice 54. Nous donnons simplement les réponses :

- ☞ Il ne fait pas beau ou il ne fait pas chaud
- ☞ Vendredi, je n'irai ni visiter Baugé, ni me promener dans le parc
- ☞ Vendredi, je n'irai ni visiter Baugé, ni me promener dans le parc
- ☞ Vendredi, il ne pleuvra pas et je n'irai ni visiter Baugé, ni me promener dans le parc
- ☞ Il y a au moins un stagiaire de Grésillon qui ne partira pas aux Olympiades
- ☞ LoJac restera éveillé pendant tous les exposés du stage
- ☞ $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, |u_n| > M$
- ☞ $\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant N, |u_n - l| > \varepsilon$

Solution de l'exercice 55. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque (u_n) converge vers ℓ, il existe un rang n_0 tel que $|u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geqslant n_0$. De même, il existe n_0' tel que $|v_n - \ell'| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geqslant n_0'$. Soit $n_0'' = \max(n_0, n_0')$. Pour tout $n \geqslant n_0''$, on a alors :

$$|u_n + v_n - (\ell + \ell')| \leqslant |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ceci démontre bien que $(u_n + v_n)$ tend vers $\ell + \ell'$.

Solution de l'exercice 56. Il s'agit de montrer les trois propriétés de réflexivité, transitivité et anti-symétrie. La première consiste à dire que, pour tout $x \in \mathbb{N}^\star$, x divise x, ce qui est clair. Pour la seconde, il s'agit de montrer que si x divise y et y divise z, alors x divise z. Mais c'est immédiat, puisque l'hypothèse dit qu'il existe des entiers k et k' tels que $y = kx$ et $z = k'y$, à partir de quoi on déduit directement que $z = kk'x$, c'est-à-dire que z divise x. Pour l'anti-symétrie, il s'agit de montrer que si x divise y et y divise x, alors $x = y$. On suppose donc qu'il existe des entiers k et k' tels que $y = kx$ et $x = k'y$. Il en résulte $k'kx = x$ puis $kk' = 1$ puisque x est pris dans $\mathbb{N}^\star$ et est donc en particulier non nul (ainsi la simplification est légitime). Puisque k et k' sont des entiers, on est dans l'alternative suivante : soit $k = k' = 1$, soit $k = k' = -1$. Le deuxième cas ne peut en fait pas se produire puisqu'il impliquerait que x et y sont de signe contraire, ce qui n'est pas le cas par hypothèse. Ainsi $k = k' = 1$ et $x = y$ comme voulu.

L'ordre n'est pas total. En effet, 2 ne divise pas 3 et 3 ne divise pas 2 non plus.

Sur $\mathbb{Z}^\star$, on a seulement une relation de préordre. La reflexité et la transitivité se démontrent pareillement que précédemment. Par contre, la démonstration de l'anti-symétrie ne fonctionne plus et de fait celle-ci est fausse : par exemple, 2 et -2 se divisent mutuellement et pourtant ils ne sont pas égaux.

Solution de l'exercice 57. *a)* L'ordre correspondant est bien entendu défini par $(x_1, \ldots, x_n) \leqslant (y_1, \ldots, y_n)$ si, et seulement si $(x_1, \ldots, x_n) < (y_1, \ldots, y_n)$ ou $(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$. La reflexivité est donc évidente.

Montrons à présent la transivité. On considère pour cela trois n-uplets $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ et $z = (z_1, \dots, z_n)$ tels que $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$ et on souhaite montrer que $x \leqslant z$. C'est clair si $x = y$ ou $y = z$: on peut donc supposer $x < y$ et $y < z$. Ainsi existe-il des entiers i et j tels que d'une part $x_i < y_i$ et $x_{i'} = y_{i'}$ pour tout $i' < i$, et d'autre part $y_j < z_j$ et $y_{j'} = z_{j'}$ pour tout $j' < j$. Soit $k = \min(i, j)$. Pour tout $k' < k$, on a alors $x_{k'} = y_{k'} = z_{k'}$ et par ailleurs $x_k \leqslant y_k \leqslant z_k$, l'une des deux inégalités étant strictes (selon que k vaille i ou j). Au final $x_k < z_k$, ce qui montre bien que $x < z$.

Passons à l'anti-symétrie. Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ deux n-uplets tels que $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$. On souhaite montrer que $x = y$ et on raisonne pour cela par l'absurde. L'hypothèse supplémentaire $x \neq y$ implique alors $x < y$ et $y < x$. Ainsi, comme précédemment, il existe des entiers i et j tels que d'une part $x_i < y_i$ et $x_{i'} = y_{i'}$ pour tout $i' < i$, et d'autre part $y_j < x_j$ et $y_{j'} = x_{j'}$ pour tout $j' < j$. On ne peut pas avoir $i < j$ car cela impliquerait $x_i < y_i$ et $x_i = y_i$ en instanciant la dernière condition avec $j' = i$. De même, $i > j$ est impossible et donc $i = j$. Mais alors on a simultanément $x_i < y_i$ et $y_i < x_i$, ce qui est à nouveau impossible à partir de l'hypothèse d'anti-symétrie pour l'ordre sur X_i. On a finalement obtenu une contradiction de laquelle découle tout ce que l'on voulait démontrer (pour cette question, s'entend).
b) On se donne $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ deux n-uplets et on souhaite montrer que l'on a $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$. Si $x = y$, les deux sont vérifiés et il n'y a plus rien à faire. Dans le cas contraire, appelons i le plus petit indice tel que $x_i \neq y_i$. Comme la relation d'ordre sur X_i est totale, on a $x_i \leqslant y_i$ ou $y_i \leqslant x_i$, et le fait que ces deux éléments différent entraîne que l'inégalité est stricte. Par définition de l'ordre lexicographique, on a alors $x < y$ dans le premier cas et $y < x$ dans le second. Ceci termine la preuve.
c) Pour un ordre quelconque, la réponse est négative : la définition de l'énoncé ne donne pas nécessairement naissance à un ordre. L'exemple le plus simple est celui de l'ensemble d'indices $I = \{a, b\}$ muni de l'ordre « égalité » (*i.e.* on a seulement $a \leqslant a$ et $b \leqslant b$, mais ni $a \leqslant b$, ni $b \leqslant a$). On prend ensuite $X_a = X_b = \mathbb{R}$ munis de l'ordre classiques. On vérifie alors facilement que sur le produit $X_a \times X_b$, on a $(0, 1) \leqslant (1, 0)$ (en prenant $i = a$) et $(1, 0) \leqslant (0, 1)$ (en prenant $i = b$), ce qui met en défaut l'anti-symétrie.

Pour un ordre total, la réponse à la question *a)* reste positive et la démonstration est la même. Il suffit de justifier que la quantité $k = \min(i, j)$ peut encore se définir, mais c'est à peu près clair puisque si $i \leqslant j$, on pose simplement $k = i$, alors que si $j \leqslant i$, on pose $k = j$ (et puisque l'ordre est total, on est assuré qu'au moins l'une de ces situations se produit).

Solution de l'exercice 58. *a)* Il s'agit à nouveau de vérifier la symétrie, la transitivité et l'anti-reflexivité, ce qui se fait en déroulant les définitions.
b) On suppose $x < x'$, et il s'agit de montrer que $f(x) \subsetneq f(x')$. Si $y \in f(x)$, alors par définition $y \leqslant x$ et donc $y \leqslant x'$ par transitivité. Ainsi $y \in f(x')$ et $f(x) \subset f(x')$. Pour montrer que les ensembles ne sont pas égaux, il suffit d'exhiber un élément de $f(x')$ qui n'est pas dans $f(x)$, et il suffit de prendre x'.

Solution de l'exercice 59. Soit $y \in \mathcal{C}(x)$, *i.e.* $y\mathcal{R}x$. On souhaite montrer que $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(y)$. Soit $z \in \mathcal{C}(x)$. Alors $z\mathcal{R}x$. Par symétrie et transitivité, il vient $z\mathcal{R}y$ et donc $z \in \mathcal{C}(y)$. Ainsi $\mathcal{C}(x) \subset \mathcal{C}(y)$. L'inclusion réciproque se traite pareillement.

Supposons maintenant $y \notin \mathcal{C}(x)$ et raisonnons par l'absurde en supposant en outre $\mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(y) \neq \emptyset$. Alors il existe z tel que l'on ait simultanément $z\mathcal{R}x$ et $z\mathcal{R}y$. Par symétrie et transitivité, il vient alors $x\mathcal{R}y$, ce qui est constitue notre contradiction.

La dernière assertion est évidente puisque tout x appartient par reflexivité à sa propre classe d'équivalence.

Solution de l'exercice 60. *a)* Soit $x \in X$. Puisque $\leqslant$ est réflexive, on a $x \leqslant x$ et donc $x \sim x$. Ainsi $\sim$ est elle aussi réflexive. Soient maintenant x, y et z dans X tels que $x \sim y$ et $y \sim z$. Cela

signifie que l'on a $x \leqslant y$, $y \leqslant x$, $y \leqslant z$ et $z \leqslant y$. En combinant tout cela, on obtient $x \leqslant z$ et $z \leqslant x$, c'est-à-dire $x \sim z$. La relation $\sim$ est donc transitive. Reste à prouver la symétrie, qui ne pose pas de problèmes.
b) On définit la relation d'ordre sur le quotient $X/\sim$ de la manière suivante : si $\mathcal{C}(x)$ et $\mathcal{C}(y)$ sont deux classes d'équivalence, on convient que $\mathcal{C}(x) \leqslant \mathcal{C}(y)$ si, et seulement si $x \leqslant y$. Pour que cela ait un sens, il faut vérifier que si $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(x')$ et $\mathcal{C}(x)$ et $\mathcal{C}(y) = \mathcal{C}(y')$, alors $x \leqslant y$ si et seulement si $x' \leqslant y'$ (autrement dit, la définition de l'ordre sur le quotient ne dépend pas du choix du représentant). Mais en supposant $x \leqslant y$, on peut écrire :

$$x' \leqslant x \leqslant y \leqslant y'$$

la première et la dernière inégalités découlant respectivement de $x \sim x'$ et $y \sim y'$. La réciproque, quant à elle, se montre pareillement en intervertissant les rôles de x et x' d'une part et y et y' d'autre part.

Il s'agit maintenant de montrer que la définition précédente conduit à une relation d'ordre sur $X/\sim$. Il est clair que, pour tout x, $\mathcal{C}(x) \leqslant \mathcal{C}(x)$ puisque $x \leqslant x$. On démontre de même la transitivité. Pour l'anti-symétrie, considérons $\mathcal{C}(x)$ et $\mathcal{C}(y)$ deux classes d'équvalence, et supposons $\mathcal{C}(x) \leqslant \mathcal{C}(y)$ et $\mathcal{C}(y) \leqslant \mathcal{C}(x)$. On a alors, par définition, $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$, c'est-à-dire $x \sim y$, à partir de quoi on déduit $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(y)$ (voir solution précédente) et par suite l'anti-symétrie.

Solution de l'exercice 61. Soit X un ensemble ordonné et A une partie de X. On suppose que A admet un plus petit élément m et on veut montrer que m est la borne inférieur de A. Il s'agit donc de justifier que m est un minorant de A et qu'il est plus grand que tous les minorants de A. Puisque m est le plus petit élément de A, il est clairement plus petit que tous les éléments de A, et est donc un minorant. Le second point est, quant à lui, une conséquence directe de l'appartenance de m à A. La démonstration est identique pour les plus grands éléments et les bornes supérieures.

La réciproque n'est par contre par vraie, même pour les ordres totaux. Par exemple on laisse en exercice le soin de vérifier que l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$ n'admet pas de plus petit élément, mais bien une borne inférieure qui est 0 (l'ensemble des minorants étant $]-\infty, 0]$.

Solution de l'exercice 62. On donne seulement les solutions : pour l'inclusion sur $\mathcal{P}(E)$ les bornes inférieures et supérieures existent toujours et s'identifient respectivement à l'intersection et la réunion. Pour la divisibilité sur $\mathbb{N}^\star$, la borne inférieure existe toujours et est simplement le PGCD. La borne supérieure par contre peut ne pas exister, mais lorsqu'elle existe elle s'identifie au PPCM(on notera qu'elle existe toujours pour un ensemble fini).

Solution de l'exercice 63. Pierre ne peut pas être le même soldat que Paul, vu qu'ils n'ont pas le même prénom. Mais sinon une telle chose serait tout à fait possible, par exemple si le soldat de coordonnées (i, j) avait la taille $i + j$.

Considérons le soldat qui se trouve dans le rang de Pierre et dans la colonne de Paul. Il est plus grand que Pierre, vu que Pierre est le plus petit de son rang ; mais il est plus petit que Paul, vu que Paul est le plus grand de sa colonne. Donc Paul est plus grand que Pierre.

Solution de l'exercice 64. *a)* Soit i un indice pour lequel $d = d_i$. La définition de d_i montre l'existence $j \in \{1, \ldots, i\}$ et $k \in \{i, \ldots, n\}$ tels que $d = d_i = a_j - a_k$. On a alors :

$$d = a_j - a_k \geqslant (a_j - x_j) + (x_k - a_k)$$

la dernière inégalité étant vraie car $k \geqslant j$. Il s'ensuit que l'une des deux quantités $(a_j - x_j)$ ou $x_k - a_k$ est supérieure ou égale à $\frac{d}{2}$. En remarquant maintenant que $d \geqslant 0$ (en fait, chacun des d_i l'est puisque le max (resp. min) qui intervient dans leur définition est supérieur (resp. inférieur) à a_i), ceci implique ce que l'on souhaite.

b) On considère les nombres x_i définis par :

$$m_i = \max\{a_j : 1 \leqslant j \leqslant i\} \quad ; \quad M_i = \min\{a_j : i \leqslant j \leqslant n\} \quad ; \quad x_i = \frac{m_i + M_i}{2}.$$

En vertu de la question précédente, il suffit de démontrer que $|x_i - a_i| \leqslant \frac{d}{2}$ pour tout i. Mais cela est évident après avoir remarqué que x_i est le milieu de l'intervalle $[m_i, M_I]$ et que ce dernier contient le réel a_i.

Solution de l'exercice 65. Étant donné que $g(x_1, \ldots, x_n)$ est un majorant de l'ensemble dont il est la borne supérieure, on a :

$$g(x_1, \ldots, x_n) \geqslant f(y_1, \ldots, y_n) \tag{III.7}$$

dès que $y_i \geqslant x_i$ pour tout i. En inversant le rôle de x_i et y_i et en passant à la borne inférieur sur les nouveaux y_i, on obtient l'inégalité demandée.

En fait, il est opportun ici de remarquer que si $y_i \leqslant y_i'$ pour tout i, alors $g(y_1, \ldots, y_n) \geqslant g(y_1', \ldots, y_n')$ puisque la borne supérieure est pris sur un ensemble plus gros. De là, il découle $inf_{y_i \leqslant x_i} g(y_1, \ldots, y_n) = g(x_1, \ldots, x_n)$ et donc en particulier l'existence de la borne inférieure. L'égalité dans la formule (III.7) se produit donc si et seulement si $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n)$, c'est-à-dire en reprenant la définition de g, si et seulement si $f(y_1, \ldots, y_n) \leqslant f(x_1, \ldots, x_n)$ pour tout n-uplet $(y_1, \ldots, y_n)$ tel que $y_i \geqslant x_i$ pour tout i. En particulier, l'égalité a lieu pour tous $(x_1, \ldots, x_n)$ si et seulement si la fonction f est décroissante pour l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$ et l'ordre sur $\mathbb{R}^n$ défini par

$$(x_1, \ldots, x_n) \leqslant (y_1, \ldots, y_n) \quad \Longleftrightarrow \quad x_i \leqslant y_i \, \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Solution de l'exercice 73. Nous traitons d'abord l'équivalence entre les assertions correspondant à l'injectivité. Nous allons montrer i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ i).

Supposons i). On construit la fonction h comme suit. Soit $y \in Y$. S'il existe un élément $x \in X$ tel que $f(x) = y$, on en choisit un[2], et on pose $h(y) = x$ et si ce n'est pas le cas, on donne n'importe quelle valeur à $h(y)$, par exemple une valeur constante fixée à l'avance. Il nous faut montrer que $h \circ f = \mathrm{id}_X$, c'est-à-dire que pour tout $x \in X$, on a $h(f(x)) = x$. Posons $y = f(x)$. On est clairement dans le premier cas de la définition de h, et donc $h(y)$ est un élément vérifiant $f(h(y)) = y$. Ainsi obtient-on $f(h(f(x)) = f(x)$, d'où on déduit par injectivité $h(f(x)) = x$ comme voulu.

Supposons maintenant ii) et démontrons iii). On suppose donc s'être données des fonctions g et g' d'un ensemble Z dans X telles que $f \circ g = f \circ g'$. D'après ii), il existe une fonction $h : Y \to X$ telle $h \circ f = \mathrm{id}_X$. En composant par h à gauche l'égalité $f \circ g = f \circ g'$, on obtient $h \circ f \circ g = h \circ f \circ g'$, soit $g = g'$ comme souhaité.

Finalement, on suppose iii), et on veut montrer que f est injective. Soient x et y dans X tels que $f(x) = f(x')$. Appliquons notre hypothèse avec $Z = \{\star\}$, $g(\star) = x$ et $g'(\star) = x'$. On a $f(g(\star)) = f(x) = f(x') = f(g'(\star))$. Ainsi les fonctions $f \circ g$ et $f \circ g'$ coïncident, et il en est donc de même de g et g'. Autrement dit $x = x'$, et l'injectivité est bien démontrée.

Nous passons maintenant à la surjectivité. Nous suivons le même plan de démonstration, à savoir i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ i).

Supposons i). Pour tout $y \in Y$, on sait qu'il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$. Nous choisissons un tel x et posons $h(y) = x$; il est alors clair que $f(h(y)) = y$ pour tout $y \in Y$, c'est-à-dire que $f \circ h = \mathrm{id}_Y$. L'implication ii) $\Rightarrow$ iii) se traite comme précédemment en composant par h à droite au lieu d'à gauche. Supposons maintenant iii). Supposons que f ne soit pas surjective, *i.e.* qu'il

[2] En fait, cette étape n'est pas nécessaire, puisque l'injectivité montre qu'un tel x est unique, mais peu importe.

existe un élément $y \in Y$ qui ne s'écrit pas sous la forme $f(x)$. Prenons pour Z un ensemble à deux éléments $Z = \{\star, \bullet\}$, pour $g : Y \to Z$ la fonction constante égale à $\star$ et pour $g' : Y \to Z$ la fonction qui à y associe $\bullet$ et qui à tous les autres éléments associe $\star$. On a bien sûr $g \circ f(x) = \star$ pour tout $x \in X$. Par ailleurs, comme pour tout $x \in X$, $f(x)$ n'est pas égal à y, on a aussi $g' \circ f(x) = \star$ pour tout $x \in X$. Ainsi $g \circ f = g' \circ f$. En appliquant iii), on devrait donc avoir $g = g'$, ce qui est faux. On a obtenu une contradiction, et par là-même bien démontré i).

Solution de l'exercice 74. Soient X et Y des ensembles totalement ordonnés et $f : X \to Y$ une fonction strictement croissante. Soient x et y des éléments de X tels que $f(x) = f(y)$. On souhaite montrer que $x = y$. Supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas. Étant donné que X est totalement ordonné, on a alors soit $x < y$, soit $y < x$. Mais par stricte croissance, le premier implique $f(x) < f(y)$, alors que le second donne $f(y) < f(x)$. Dans tous les cas $f(x) \neq f(y)$, ce qui établit la contradiction recherchée.

Solution de l'exercice 75. Nous allons montrer que seule l'identité est solution. Soit $x \in X$. Supposons par l'absurde que $f(x) \neq x$. Puisque l'ordre sur X est total, on a soit $f(x) > x$, soit $f(x) < x$. Dans le premier cas, par stricte croissance de f, on en déduit $x = f(f(x)) < f(x)$, ce qui est une contradiction. On obtient de même une contradiction dans le second cas, et l'exercice est résolu.

Solution de l'exercice 76. La bijection est celle qui à une fonction $f : B \times C \to A$ associe la fonction $C \to A^B$ qui à c associe la fonction $B \to A$, $b \mapsto f(b, c)$... ce que l'on vérifie facilement.

Solution de l'exercice 77. Montrons d'abord la première formule. On prouve les deux inclusions réciproques. Soit donc tout d'abord x un élement de $f^{-1}(A \cap B)$. Par définition, cela signifie que $f(x) \in A \cap B$. En particulier, $f(x) \in A$ et donc $x \in f^{-1}(A)$. Pareillement, $x \in f^{-1}(B)$. Finalement $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ et la première inclusion est prouvée. Réciproquement, si $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, alors $f(x)$ appartient à la fois à A et à B. Ainsi $f(x) \in A \cap B$, puis $x \in f^{-1}(A \cap B)$. Ceci conclut la démonstration. La deuxième égalité d'ensembles se montre de façon tout à fait similaire.

Pour les images directes, on ne donne que les réponses. On a bien $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ et $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Par contre, il n'est pas vrai en général que $f(A \cap B) \supset f(A) \cap f(B)$ (mais c'est le cas par contre si f est injective, ce que nous laissons en exercice).

Équations fonctionnelles

Solution de l'exercice 78. Par l'absurde : supposons qu'il existe un entier a tel que $f(a) \neq g(a)$. Alors, l'ensemble $A = \{n \,/\, f(n) \neq g(n)\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, et donc l'ensemble $B = \{g(n),\, n \in A\}$ est lui aussi une partie non vide de $\mathbb{N}$. Cet ensemble B admet donc un plus petit élément, noté $g(b)$, avec $b \in A$. Notons qu'alors $g(b) < f(b)$. Puisque f est surjective, il existe un entier c tel que $f(c) = g(b) < f(b)$. Et, en particulier, on a $c \neq b$. Puisque g est injective, on a alors $g(c) \neq g(b) = f(c)$, d'où $c \in A$ et $g(c) < f(c) = g(b)$, ce qui contredit la minimalité de $g(b)$. Donc, pour tout entier a, on a $f(a) = g(a)$.

Solution de l'exercice 79. Soient $x > y$. On a donc $f(x) - f(y) \geqslant x - y > 0$. La fonction f est donc strictement croissante. Le plus petit élément de A ne peut alors s'envoyer que sur lui-même : en effet, si tel n'était pas le cas, on n'aurait plus assez de place pour attribuer une image au plus grand élément. On détermine ensuite de la même façon l'image du deuxième plus petit élément de A et ainsi de suite. Au final, f est bien l'identité.

Solution de l'exercice 80. Soit f une solution éventuelle. On peut tout de suite remarquer qu'alors, pour toute constante réelle k la fonction $x \mapsto f(x) + k$ est également solution du problème. Cela nous donne un degré de liberté, et permet d'imposer que, par exemple, on ait $f(0) = 0$. Pour $y = 0$, il vient alors, pour tout réel x, $f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}f(x)$. Par suite, pour tous réels x, y, on a $\frac{f(x)+f(y)}{2} = f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x+y)}{2}$, c.à.d. $f(x+y) = f(x) + f(y)$. On reconnaît l'équation de Cauchy, dont on sait que les solutions continues sont les fonctions linéaires. On en déduit facilement que les solutions de notre problème sont les fonctions affines.

Solution de l'exercice 81. Il suffit de poser $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ puisque l'on vérifie alors sans mal que g est paire, h est impaire et $f = g + h$.

Solution de l'exercice 82. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une fonction vérifiant les conditions de l'énoncé. Pour $x = 0$, il vient $f(f(y)) = -y + f(0)$: la fonction $f \circ f$ est donc affine de pente -1. En particulier, c'est une bijection de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}$. Mais alors f est elle-même une bijection de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}$. Pour $y = 0$, la relation $f(f(y)) = -y + f(0)$ conduit à $f(f(0)) = f(0)$ et ainsi (par injectivité) $f(0) = 0$. Par conséquent, $f(f(y)) = -y$ pour tout entier y.

Soient x, y deux entiers. Puisque f est une bijection, il existe un entier a tel que $f(a) = y$. Il vient alors $f(y) = f(f(a)) = -a$. Ainsi : $f(x+y) = f(x+f(a)) = f(x) - a = f(x) + f(y)$. On reconnaît là l'équation de Cauchy. On sait qu'alors f est linéaire et donc, pour tout entier x, on a $f(x) = xf(1)$. D'autre part $x(f(1))^2 = f(f(x)) = -x$. D'où $(f(1))^2 = -1$, ce qui est impossible pour $f(1)$ entier. C'est la contradiction cherchée. La conclusion en découle.

Solution de l'exercice 83. Par l'absurde : supposons que f soit une fonction vérifiant les conditions de l'énoncé. On pose $g = f \circ f$. On commence par remarquer que f est injective : en effet, si $a, b \in \mathbb{N}^\star$ tels que $f(a) = f(b)$ alors $a + 1987 = f(f(a)) = f(f(b)) = b + 1987$, d'où $a = b$. De plus, pour tout entier $n > 0$, on a $f(n) \neq n$ sans quoi, un éventuel point fixe de f (oui, bon d'accord, la définition de « point fixe » n'apparaît qu'au chapitre suivant...) conduirait à l'absurdité $n = n + 1987$. Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, on note $O_k = \{g^n(k), n \in \mathbb{N}\}$ l'orbite de k par g (ici donc, g^n désigne la n-ième itérée de g). Alors, d'après l'équation fonctionnelle, on a $O_k = \{k + 1987n, n \in \mathbb{N}\}$. Par suite, $\mathbb{N}^\star$ est la réunion disjointe des ensembles $O_1, O_2, \ldots, O_{1987}$. En particulier, pour $k \in \{1, 2, \ldots, 1987\}$, il existe des entiers $n \in \{1, 2, \ldots, 1987\}$ et $m \geqslant 0$ tels que $f(k) = g^m(n)$. Et l'injectivité de f implique que soit $m = 0$ et $f(k) = n$, soit $m = 1$ et $f(k) = f(f(n)) = n + 1987$. Dans le second cas, on a alors $k = f(n)$. Cela permet d'affirmer que les entiers appartenant à $\{1, 2, \ldots, 1987\}$ peuvent être répartis en paires deux à deux disjointes de la forme $\{n, f(n)\}$. Or, ceci est clairement impossible puisque 1987 est impair.

Solution de l'exercice 84. L'idée est de « créer » de la symétrie dans l'équation fonctionnelle. Soit f une solution éventuelle. On note f^k la k-ième itérée de f. Pour tous entiers m et n, on a alors $f(f^2(m) + f^2(n)) = -f^2(f^2(m) + 1) - n$. Le membre de gauche étant symétrique en m et n, celui de droite doit l'être également, d'où $f^2(f^2(m)+1) + n = f^2(f^2(n)+1) + m$ puis $m - n = f^2(f^2(m)+1) - f^2(f^2(n)+1)$. Or, d'après l'équation fonctionnelle initiale $f^2(f^2(m)+1) = f(-f^2(2) - m) = f(-k-m)$, où $k = f^2(2)$. Donc, pour tous entiers m et n, on a $m - n = f(-k-m) - f(-k-n)$. Pour $n = -k$ et $p = -m-k$, on déduit que pour tout entier p, $f(p) = f(0) - p$. Notons qu'en particulier, $f(f(p)) = f(f(0) - p) = f(0) - (f(0) - p) = p$.

Réciproquement, si $f : p \mapsto q - p$ où $q \in \mathbb{Z}$ est une constante, alors, pour tous entiers m, n, on a d'une part $f(m + f(f(n))) = f(m+n) = q - m - n$ et, d'autre part $-f(f(m+1)) - n = -m - 1 - n$. Par suite, la seule solution du problème est $f : p \mapsto 1 - p$.

Solution de l'exercice 85. Nous allons montrer que les solutions sont les fonctions de la forme $X \mapsto a\,\mathrm{Card}(X) + b$ où a et b sont deux nombres réels. Déjà, il est facile de vérifier que les fonctions précédentes conviennent. Considérons maintenant f une fonction vérifiant les conditions de l'énoncé. Posons $b = f(\emptyset)$. Fixons x_0 un élément de E et posons aussi $a = f(\{x_0\}) - b$. Nous allons maintenant montrer par récurrence sur le cardinal d'une partie X de E que $f(X) =$

$a\,\mathrm{Card}(X) + b$. Pour les parties de cardinal 0 (*i.e.* l'ensemble vide), c'est vrai par définition de b. Si $X = \{x\}$ est une partie de cardinal 1, on remarque qu'il existe une bijection de E envoyant x_0 sur x. Ainsi, par la deuxième condition, on doit avoir $f(X) = f(\{x_0\} = a + b$, ce qui est bien ce que l'on voulait. Soit désormais X une partie de cardinal $n+1$. On peut alors écrire $X = A \cup B$ où A a pour cardinal n, où B est un singleton et où A et B sont disjoints. Ainsi, a-t-on :

$$f(X) + bf(X) + f(\emptyset) = f(A) + f(B) = (n+1)\,\mathrm{Card}(X) + 2b$$

soit $f(X) = n{+}1)\,\mathrm{Card}(X){+}b$ comme voulu. Ceci termine la récurrence et la solution de l'exercice.

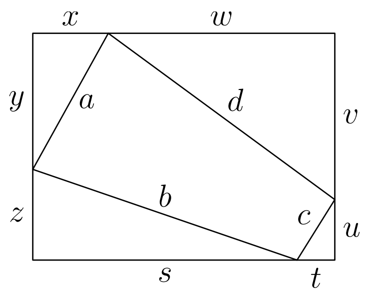
Inégalités

Solution de l'exercice 86. On pose $a_0, a_1, \ldots, a_N$ les parties entières respectives des réels 0, $\sqrt{2}$, ..., $N\sqrt{2}$. Par le principe des tiroirs, il existe deux entiers $0 \leqslant i < j \leqslant N$ et un entier $k \leqslant N-1$ tels que $i\sqrt{2} - a_i$ et $j\sqrt{2} - a_j$ sont dans le même intervalle $[k/N, (k+1)/N]$. On a alors

$$\left|(a_i - a_j) - (i-j)\sqrt{2}\right| \leqslant \frac{1}{N}.$$

Solution de l'exercice 87. Soit $2008 = a_1 + \cdots + a_k$ une partition qui maximise le produit. On commence par remarquer que si l'un des a_i est supérieur à 5 alors en le remplaçant par 3 et $a_i - 3$ on augmente strictement le produit. Ainsi tous les a_i valent $2, 3$ ou 4. On remarque ensuite que remplacer un 4 par deux 2 ne change rien donc on peut se ramener sans perte de généralité au cas où tous les a_i valent 2 ou 3. Finalement, du fait que $2^3 < 3^2$ on ne peut avoir plus de deux 2. En conclusion, la partition qui maximise le produit est obtenu en prenant 668 fois le nombre 3 et deux fois le nombre 2.

Solution de l'exercice 88.



Introduisons les longueurs comme sur le dessin ci-dussus. Par le théorème Pythagore on est ramené à montrer les inégalités suivantes :

$$1 \leqslant \frac{x^2 + y^2 + z^2 + s^2 + t^2 + u^2 + v^2 + w^2}{m^2 + n^2} \leqslant 2$$

En utilisant les inégalités du type

$$y^2 + z^2 \leqslant (y+z)^2 = n^2$$

on obtient l'inégalité de droite. En utilisant les inégalités du type

$$y^2 + z^2 \geqslant \frac{1}{2}(y+z)^2 = \frac{1}{2}n^2$$

on obtient l'inégalité de gauche.

Solution de l'exercice 89. On a

$$\begin{aligned}&\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{b+c+a}+\frac{c}{c+d+b}+\frac{d}{d+a+c}\\&>\frac{a}{a+b+c+d}+\frac{b}{a+b+c+d}+\frac{c}{a+b+c+d}+\frac{d}{a+b+c+d}=1\end{aligned}$$

et aussi

$$\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{b+c+a}+\frac{c}{c+d+b}+\frac{d}{d+a+c}<\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{c+d}=2$$

Finalement, en fixant a et b et en faisant tendre c et d vers 0 la quantité tend vers 1. De même, en fixant a et c et en faisant tendre les deux autres, la quantité tend vers 2. En conclusion, par le théorème des valeurs intermédiaires, la quantité proposée décrit l'interval $]1,2[$.

Solution de l'exercice 90. On commence par faire le changement de variable

$$a=\frac{y}{z},b=\frac{z}{x},c=\frac{x}{y}$$

et on est ramené à montrer l'inégalité suivante :

$$\left(\frac{y-z+x}{z}\right)\left(\frac{z-x+y}{x}\right)\left(\frac{x-y+z}{y}\right)\leqslant 1.$$

Deux cas se présentent :

- si le triplet x,y,z ne vérifie pas l'inégalité triangulaire alors le menbre de droite est négatif et on a gagné.
- si le triplet x,y,z vérifie l'inégalité triangulaire alors on effectue le fameux changement de variable de Ravi-Deschamps

$$u=\frac{y+z-x}{2},v=\frac{z+x-y}{2},w=\frac{x+y-z}{2}$$

et on est ramené à montrer l'inégalité suivante :

$$\frac{8uvw}{(u+v)(v+w)(w+u)}\leqslant 1,$$

qui elle même est équivalente à

$$6uvw\leqslant u^2v+u^2w+v^2u+v^2w+w^2u+w^2v$$

ce qui est une conséquence directe de l'inégalité arithmético-géométrique.

Solution de l'exercice 91. Encore une fois, on va appliquer le changement de variable de Ravi-Deschamps (ou encore Johan-Ravi pour les puristes) :

$$u=\frac{b+c-a}{2},v=\frac{c+a-b}{2},w=\frac{a+b-c}{2}$$

ce qui donne après calcul

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)=2(u^3w+v^3u+w^3v)-2(uv^2w+vw^2u+wu^2v)$$

et il faut donc montrer que

$$u^3w + v^3u + w^3v \geqslant uv^2w + vw^2u + wu^2v$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{u^2}{v} + \frac{v^2}{w} + \frac{w^2}{u} \geqslant u + v + w.$$

Sans perte de généralité on peut supposer que $u \leqslant v \leqslant w$ auquel cas on a aussi $u^2 \leqslant v^2 \leqslant w^2$ et $1/w \leqslant 1/v \leqslant 1/w$. Par l'inégalité du réordonnement on a donc

$$\frac{u^2}{v} + \frac{v^2}{w} + \frac{w^2}{u} \geqslant \frac{u^2}{u} + \frac{v^2}{v} + \frac{w^2}{w} = u + v + w$$

avec égalité si et seulement si les suites u, v, w et $1/u, 1/v, 1/w$ sont ordonnées dans le même ordre, c'est à dire si et seulement si $u = v = w$ ou encore si le triangle est équilatéral.

Remarque. On peut aussi remarquer que le membre de gauche de l'inégalité peut se mettre sous la forme

$$a(b-c)^2(b+c-a) + b(a-b)(a-c)(a+b-c)$$

qui est clairement positif dès que l'on suppose que a est le plus grand des côtés du triangle.

Solution de l'exercice 92. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a

$$\left(\sum_{k=1}^{5} k^3 x_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{5} k x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{5} k^5 x_k\right).$$

Or par hypothèse, on est dans le cas d'égalité. On doit donc avoir que pour tout k tel que x_k est non nul, le quotient k^5x_k/kx_k vaut une même constante. Au plus un des x_k peut donc être non nul. En revenant aux formules de l'énoncé, on trouve que pour une tel k on a $x_k = k$ et une petite étude cas par cas montre alors que les seuls valeurs possibles de a sont

$$0, 1, 4, 9, 16, 25.$$

Remarque. On peut également partir de la relation suivante :

$$a^2 \sum_{k=1}^{5} k_k^x + \sum_{k=1}^{5} k^5 x_k = 2a \sum_{k=1}^{5} k^3 x_k$$

ce qui donne aussi

$$\sum_{k=1}^{5} k(a-k^2)^2 x_k = 0.$$

Solution de l'exercice 93. On part de l'inégalité suivante :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^4 = \left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i^2 + 2x_ix_j\right)^2 \geqslant 8\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} x_k^2\right)\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j\right)$$

qui découle de l'inégalité arithmético-géométrique. Du fait que pour tout couple d'indices $i \neq j$, $\sum_{1\leqslant k\leqslant n} x_k^2 \geqslant x_i^2 + x_j^2$ avec égalité si et seulement si tous les x_k avec $k \neq i$ et $k \neq j$ sont nuls, on obtient que

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j(x_i^2 + x_j^2) \leqslant \frac{1}{8}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^4$$

avec égalité si et seulement si au plus 2 termes sont non nuls et qu'ils sont égaux. La constante cherchée est donc $C = 1/8$.

Solution de l'exercice 94. Il peut être utile de voir que le triplet $(1,1,1)$ réalise l'égalité, on va donc essayer de réaliser des transformations qui préserve ce cas d'égalité. Par l'inégalité arithmético-géométrique on a les trois inégalités suivantes :

$$a^2 + 1 \geqslant 2a$$
$$b^3 + 2 = b^3 + 1 + 1 \geqslant 3\sqrt[3]{b^3}$$
$$c^6 + 5 = c^6 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \geqslant 6\sqrt[6]{c^6}$$

et on a donc

$$(a^2 + 1)(b^3 + 2)(c^6 + 5) \geqslant 36abc = 36.$$

Solution de l'exercice 95. La forme du domaine de définition peut laisser entrevoir un argument de convexité. En effet, on vérifie aisément que la fonctionnelle

$$f(a,b,c) = \frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leqslant 1$$

est convexe en chacune des variables a, b et c. Ainsi, f atteint son maximum sur l'un des sommets du cube $0 \leqslant a,b,c \leqslant 1$. Il suffit donc de vérifier qu'en chacun des huit points $(0,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,1,1)$, $(1,1,0)$, $(0,1,0)$ et $(1,0,0)$ on a $f(a,b,c) \leqslant 1$ ce qui est bien le cas.

Solution de l'exercice 96. L'ingalité proposée étant homogène on peut supposer sans perte de généralité que $a+b+c = 1$. Le lecteur attentif aura bien évidemment deviné qu'on va utiliser l'inégalité de Jensen. Comme la fonction $x \to 1/\sqrt{x}$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ on a

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqslant \frac{1}{a(a^2+8bc) + b(b^2+8ca) + c(c^2+8ab)}.$$

Il suffit donc de montrer que sous la contrainte imposée, $a^3 + b^3 + c^3 + 24abc \leqslant 1$. Or

$$(a+b+c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3 + 24abc) = 3(a^2b + a^2c + ab^2 + ac^2 + b^2c + bc^2 - 6abc)$$

est bien positif par l'inégalité arithmético-géométrique ce qui conclut car $a+b+c = 1$.

3 En TND

3.1 Les énoncés

Stratégies de base

Exercice 1. 12 lampes, éteintes ou allumées, sont placées en cercle. À chaque étape, il est permis de choisir une lampe éteinte et de changer l'état de ses deux lampes voisines. Trouver toutes les configurations initiales qui permettent d'arriver à une configuration où une seule lampe est éteinte.

Exercice 2. Une gare vend des billets pour 200 destinations. Un jour, 3800 personnes achètent un billet.

(i) Montrer qu'au moins 6 destinations sont choisies par le même nombre de personnes.

(ii) Montrer qu'il n'existe pas nécessairement 7 destinations choisies par le même nombre de personnes.

Stratégies et graphes

Exercice 3. Soit G un graphe fini simple, non orienté et connexe, dont chaque sommet est de degré au moins 3. Prouver que G contient un cycle dont on peut effacer toutes les arêtes sans perdre la connexité du graphe résultant.

Exercice 4 (*Roumanie 2008*). Soit G un graphe fini simple, non orienté et connexe, à n sommets et m arêtes. On suppose que chaque arête appartient à au moins un triangle. Quelle est la valeur minimale de m ?

Arithmétique

Exercice 5. La suite (a_n) est définie de manière suivante : on a $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+2} = a_{n+1}a_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
a) Montrer qu'aucun terme de la suite n'est divisible par 4.
b) Montrer que $a_n - 22$ n'est pas un nombre premier pour tout $n > 10$.

Exercice 6. Les longueurs des deux côtés adjacents et de la diagonale d'un rectangle sont des entiers. Prouver que l'aire du rectangle est divisible par 12.

Exercice 7. Sur le tableau sont écrits les nombres 25 et 36. Deux élèves jouent alternativement : à chaque coup on choisit deux nombres quelconques déjà écrits sur le tableau et on ajoute un nouveau nombre égal à la valeur absolue de leur différence (on n'a pas le droit de réécrire un nombre qui est déjà sur le tableau). Perd celui qui ne peut plus jouer. Qui a une stratégie gagnante : le premier ou le deuxième joueur ?

Géométrie

Exercice 8. Soit $ABCD$ un quadrilatère. Montrer que les diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires si, et seulement si $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

Exercice 9. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle de centre O. Soit P le point d'intersection de (AC) et (BD). Les cercles circonscrits aux triangles ABP et CDP se recoupent en Q. Si O, P et Q sont distincts, prouver que (OQ) est perpendiculaire à (PQ).

Équations fonctionnelles

Exercice 10. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points à coordonnées entières. Trouver toutes les fonctions $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ telles que $f(O) = 0$ et $f(B) = f(A) + f(C)$ pour tout rectangle $OABC$ avec $A, B, C \in \mathcal{E}$.

Exercice 11. Soit $n > 1$ un entier. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x + y^n) = f(x) + (f(y))^n$ pour tous réels x et y.

Inégalités

Exercice 12. Soient $a, b, c > 0$, montrer que

$$\frac{3}{a^3+b^3+c^3} \leqslant \frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leqslant \frac{1}{abc}.$$

Exercice 13. Soient a, b, c trois réels positifs vérifiant $abc = 1$. Montrer que

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Exercice 14. Soient a, b, c, d quatre réels positifs, montrer que

$$a^4b + b^4c + c^4d + d^4a \geqslant abcd(a+b+c+d).$$

3.2 Les solutions

Stratégies de base

Solution de l'exercice 1. Il s'agit d'un exercice où « l'expérimentation » est capitale, en ce sens qu'on comprend se qui se passe après avoir essayé des configurations différentes au brouillon. La résolution peut se faire en plusieurs étapes.

Tout d'abord, on remarque que la parité du nombre de lampes éteintes est un invariant. Ainsi, si le nombre initial de lampes éteintes est pair, alors l'état final aura toujours un nombre de lampes éteintes pair et donc différent de 1. Inversement, montrons que les configurations où le nombre initial de lampes éteintes est impair conviennent.

1er cas : les lampes éteintes et allumées ne sont pas « mélangées », c'est-à-dire que $i \geqslant 3$ lampes éteintes sont suivies par j lampes allumées (avec $i + j = 12$ et i impair). Notons par exemple les lampes éteintes $d_1, \ldots, d_i$ (dans le sens trigonométrique). En choisissant successivement les lampes $d_2, d_4, \ldots, d_{i-1}$, nous arrivons à un état où les lampes éteintes et allumées ne sont pas « mélangées », avec $i - 2$ lampes éteintes. On conclut en réitérant ce procédé.

2ème cas : les lampes éteintes et allumées sont « mélangées ». Notons alors k la distance *minimale* en nombre de lampes allumées séparant deux blocs de lampes éteintes. Dans ce cas, il existe des lampes éteintes $d_1, \ldots, d_i, d_{i+k+1}, \ldots, d_j$ et des lampes allumées $d_{i+1}, \ldots, d_{i+k}$ (remarquer que ces lampes ne sont pas nécessairement uniques, par exemple si $k = 1$). On choisit alors d_i. En réitérant ce procédé, on arrivera à la situation envisagée au 1er cas (pourquoi ?).

Solution de l'exercice 2. (i) Raisonnons par l'absurde en supposant que qu'au plus 5 destinations sont choisies par le même nombre de personnes. Mais alors le nombre total de billets vendus est supérieur à $5(0 + 1 + \cdots + 39) = 3900$ (pourquoi ?), ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de l'énoncé. Ainsi, au moins 6 destinations sont choisies par le même nombre de personnes.

(ii) Par exemple : 6 destinations visitées par 1 personne,..., 6 destinations visitées par 33 personnes et finalement 2 destinations visitées par 217 personnes.

Stratégies et graphes

Solution de l'exercice 3. On considère un sommet arbitraire, et on le numérote 1. Puis, de proche en proche, pour tout entier $i \geqslant 1$, on attribue le numéro $i+1$ à tout sommet non encore numéroté et adjacent à un sommet de numéro i (cela revient à numéroter les sommets selon leur distance par rapport au premier sommet choisi). Comme G est fini et connexe, cette procédure va se terminer et tous les sommets seront numérotés. De plus, pour tout i, le sous-graphe dont les numéros ne dépassent pas i est connexe (il existe toujours un chemin d'un sommet quelconque au sommet n°1).

Soit p le plus grand numéro utilisé. Soit n le nombre de sommets de G. On considère maintenant le sous-graphe dont les sommets sont tous de numéros p. S'il contient un cycle, on s'arrête. Sinon, on étend le sous-graphe en ajoutant le sommets de numéros $p-1$ (et les arêtes correspondantes). Si ce nouveau sous-graphe contient un cycle, on s'arrête. Sinon, on étend aux sommets de numéros $p-2$ et ainsi de suite. Comme G contient au moins $\frac{3n}{2} \geqslant n$ arêtes, il contient lui-même un cycle, ce qui assure qu'il existe un plus grand entier k tel que le sous-graphe dont les sommets sont ceux de numéros supérieurs ou égaux à k contient un cycle. Parmi les cycles que contient ce sous-graphe, on en choisit un, disons C, de longueur minimale. Notons qu'alors C ne peut contenir de diagonale. Nous allons prouver que l'on peut effacer les arêtes de C sans perdre la connexité.

Par l'absurde : supposons qu'en effaçant les arêtes de C, on brise la connexité. Il existe alors une composante connexe S qui ne contient pas le sommet n°1 et qui ne contient donc que des sommets de numéros supérieurs ou égaux à $k+1$ (s'il existait un sommet de S de numéro k, il serait adjacent à un sommet de numéro $k-1$ et l'arête correspondante n'a pas été effacée puisque C ne contient pas de sommet de numéro inférieur à k, et donc le sommet n°1 serait dans S). La maximalité de k assure alors que S ne contient pas de cycle. On note m le nombre de sommets appartenant à S. Notons que, puisque tout sommet de S est adjacent à au moins trois sommets, qui sont donc eux aussi dans S, on a $m \geqslant 4$. Parmi les sommets de S, au moins un appartient à C, sans quoi effacer les arêtes de C n'aurait pas brisé la connexité avec le sommet n°1. Soit $A \in S \cap C$. Exactement deux arêtes issues de A ont été effacées (A ne peut apparaître plus d'une fois lorsqu'on parcourt le cycle pour cause de minimalité de C), donc il en reste au moins une, disons AX_A. Alors, on a $X_A \notin C$ sans quoi l'arête AX_A serait une diagonale de C, en contradiction avec la minimalité de C. De plus, puisque X_A est encore adjacent à A après effacement, on a $X_A \in S$, ce qui assure que X_A est de numéro au moins $k+1$. Soit B un autre sommet, s'il y en a, appartenant à S et C, et X_B choisi comme ci-dessus. Si $X_A = X_B$, que l'on notera X, la minimalité de C et l'existence des arêtes AX et BX entrainent que C est un triangle, disons ABP, ou un quadrilatère, disons $APBQ$. Dans le premier cas, le cycle ABX contredit la maximalité de k. Dans le second, pour éviter la même contradiction avec les cycles $APBX$ ou $AQBX$, il faut que P et Q soient de numéros k, et ni l'un ni l'autre n'est dans S. Ainsi, dans le sous-graphe associé à S, tous les sommets sont de degrés au moins 3 sauf, peut-être, A et B qui sont de degrés au moins 1. La somme des degrés est donc au moins égale à $3(m-2)+2 \geqslant 2m$. Mais alors S doit contenir un cycle. Contradiction.

On en déduit qu'il n'existe pas deux sommets communs à S et C qui partagent un même voisin dans S. Soient $A_1, \ldots, A_s$ les sommets communs à S et C, et $X_1, \ldots, X_s$ choisis comme ci-dessus. Notons qu'alors $m \geqslant 2s$ et que, comme ci-dessus, dans le sous-graphe associé à S, chaque sommet est de degré au moins 3 sauf, peut-être, les A_i qui sont chacun de degrés au moins 1. La somme des degrés est alors au moins égale à $3(m-s)+s \geqslant 2m$, ce qui conduit à la même contradiction que précédemment.

Ainsi, dans tous les cas, on obtient une contradiction, ce qui assure qu'effacer les arêtes de C ne brise effectivement pas la connexité du graphe.

Solution de l'exercice 4. On va prouver que le minimum cherché $f(n)$ vérifie $f(n) = [\frac{3n-2}{2}]$, ou encore $f(2n) = 3n-1$ et $f(2n+1) = 3n$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Un graphe ayant les propriétés de l'énoncé sera dit *bon* (même s'il ne contient pas le nombre minimal d'arêtes). Il est facile de trouver un bon graphe d'ordre $2n+1$ en considérant le graphe dont les sommets sont $A, B_1, \ldots, B_{2n}$ et les arêtes sont AB_i pour tout i, et $B_{2i-1}B_{2i}$ pour $i = 1, \ldots, n$ (les ailes d'un moulin). Par suite, $f(2n+1) \leqslant 3n$. Pour construire un bon graphe d'ordre $2n$, on part du bon graphe d'ordre $2n-1$ décrit ci-dessus. On ajoute ensuite le sommet X et les arêtes AX et B_1X. On en déduit que $f(2n) \leqslant 3n-1$. Il reste à prouver que l'on ne peut pas faire mieux.

Clairement, $f(3) = 3$ et $f(4) = 5$.

Soit un bon graphe minimal d'ordre n. Comme il est connexe et que chaque arête appartient à un triangle, chaque sommet est de degré au moins 2. Or, d'après nos majorations et la minimalité, ce graphe possède moins de $\frac{3n}{2}$ arêtes. La moyenne des degrés est donc inférieure à 3, ce qui assure qu'un de sommets est de degré 2. On prouve alors le résultat par récurrence sur n.

Soit $n \geqslant 2$ tel que $f(k) = [\frac{3k-2}{2}]$ pour tout $k \leqslant 2n$. Soit G un bon graphe minimal d'ordre $2n+1$, et X un de ses sommets de degré 2. Alors X est le sommet d'un seul triangle, disons XAB. Par l'absurde, supposons que $f(2n+1) \leqslant 3n-1$. On efface alors X et les arêtes XA et XB, ce qui donne un sous-graphe G' d'ordre $2n$ et pas plus de $3n-3$ arêtes, qui reste clairement connexe. Puisque, d'après l'hypothèse de récurrence, on a $f(2n) = 3n-1$, le graphe G' n'est pas bon, et la seule cause possible est que l'arête AB n'appartienne plus à un triangle. Mais, la connexité de G' et le fait qu'il contienne au moins trois sommets assurent que A ou B est adjacent à un autre sommet, disons qu'il existe l'arête AC. On trace alors l'arête BC pour obtenir un bon graphe d'ordre $2n$ et avec au plus $3n-2$ arêtes. Cela contredit que $f(2n) = 3n-1$. Ainsi $f(2n+1) \geqslant 3n$ et, d'après ci-dessus, c'est que $f(2n+1) = 3n$.

Soit H un bon graphe minimal d'ordre $2n+2$, et X un de ses sommets de degré 2. Alors X est le sommet d'un seul triangle, disons XAB. Par l'absurde, supposons que $f(2n+2) \leqslant 3n+1$. Comme ci-dessus, en effaçant X et les arêtes XA et XB, on obtient un sous-graphe H' connexe d'ordre $2n+1$ et pas plus de $3n-1$ arêtes. Or, d'après ci-dessus, on a $f(2n+1) = 3n$, donc le graphe H' n'est pas bon, et à nouveau la seule cause possible est que l'arête AB n'appartienne plus à un triangle. Si A était de degré 1 dans H' alors, en effaçant A et l'arête AB, on obtiendrait un sous-graphe H'' qui lui serait bon, d'ordre $2n$ et avec au plus $3n-2$ arêtes, en contradiction avec $f(2n) = 3n-1$. Donc A est de degré au moins 2 dans H', et de même pour B. On efface alors l'arête AB pour obtenir un sous-graphe H''' d'ordre $2n+1$ et pas plus de $3n-2$ arêtes. A nouveau, puisque $f(2n+1) = 3n$, le graphe H''' ne peut être bon, mais cette fois chaque arête appartient bien à un triangle. C'est donc que H''' n'est pas connexe. Comme on n'a effacé qu'une seule arête à partir d'un graphe connexe, il ne peut y avoir que deux composantes connexes, d'ordres respectifs a et b. Et chacune de ces composantes est un bon graphe d'où $3n-2 \geqslant f(a)+f(b)$. De plus, puisque $a+b = 2n+1$, ils sont de parités contraires et on peut supposer que $a = 2x$ et $b = 2y+1$. Alors $x+y = n$ et, d'après l'hypothèse de récurrence, on a $3n-2 \geqslant f(a)+f(b) = 3x-1+3y = 3n-1$, contradiction. Ainsi, $f(2n+2) \geqslant 3n+2$ et donc $f(2n+2) = 3n+2$. Cela achève la récurrence et la démonstration.

Arithmétique

Solution de l'exercice 5. *a)* On considère les restes de notre suite de division par 4 : 1, 1, 2, 3, 3, 2, 3, 3, 2, *etc.* On voit que la suite des restes est périodique à partir du troisième terme et, donc, ne s'annule jamais.

b) On va montrer que a_n divise a_{n+6} pour tout $n > 0$. Pour cela on peut considérer la suite modulo a_n :

$$\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & a_n a_{n-1} + 1 \equiv 1 \pmod{a_n} \\ a_{n+2} & = & a_{n+1} a_n + 1 \equiv 1 \pmod{a_n} \\ a_{n+3} & = & a_{n+2} a_{n+1} + 1 \equiv 1 \cdot 1 + 1 = 2 \pmod{a_n} \\ a_{n+4} & = & a_{n+3} a_{n+2} + 1 \equiv 2 \cdot 1 + 1 = 3 \pmod{a_n} \\ a_{n+5} & = & a_{n+4} a_{n+3} + 1 \equiv 3 \cdot 2 + 1 = 7 \pmod{a_n} \\ a_{n+6} & = & a_{n+5} a_{n+4} + 1 \equiv 7 \cdot 3 + 1 = 22 \pmod{a_n}. \end{array}$$

Ainsi, le nombre $a_{n+6} - 22$ est divisible par a_n pour $n > 0$ et puisque il est strictement plus grand que a_n pour $n > 10$, il n'est pas premier.

Solution de l'exercice 6. On denote les longueurs des deux côtés et de la du rectangle par x, y et z. Il s'agit alors de montrer que pour toute solution de l'équation diophantienne $x^2 + y^2 = z^2$, le produit xy est divisible par 12. Puisque le carré d'un entier ne peut donner que 0 ou 1 modulo 3, l'un au moins des x et y est divisible par 3 (sinon $z^2 = x^2 + y^2 \equiv 1 + 1 = 2 \mod 3$). Ensuite, si x et y sont pairs ou l'un des x et y est divisible par 4, alors xy est divisible par 4. Supposons maintenant que ce n'est pas le cas, c'est-à-dire que, disons, x est impair et y n'est pas divisible par 4 (donc, y est impair ou $y = 4k + 2$). On rappelle qu'un carré ne peut être que 0, 1, ou 4 modulo 8 et qu'un nombre impair au carré donne toujours 1 modulo 8. On utilise cette astuce pour traiter les deux situations :

- ☞ si y est aussi impair, alors $z^2 = x^2 + y^2 \equiv 1 + 1 = 2 \mod 8$, ce qui n'est pas possible,
- ☞ si $y = 4k + 2$, alors $z^2 = x^2 + y^2 = x^2 + 16k^2 + 16k + 4 \equiv 1 + 4 = 5 \mod 8$, ce qui n'est toujours pas possible.

Donc, xy est divisible par 3 et par 4, c'est-à-dire il est divisible par 12.

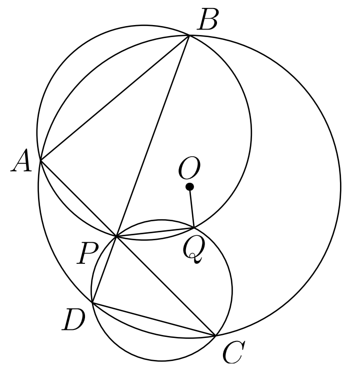
Solution de l'exercice 7. Selon l'algorithme d'Euclide, après un certain nombre de coup, il apparaîtra sur le tableau $\text{PGCD}(25, 36) = 1$. Ainsi la partie se terminera lorsque tous les les nombres entiers de 1 à 36 seront écrits sur le tableau, c'est-à-dire après 34 coups. C'est donc le deuxième qui gagne nécessairement.

Géométrie

Solution de l'exercice 8. Raisonnons à l'aide de vecteurs. L'énoncé à prouver est équivalent à $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \iff AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$. On a

$$\begin{array}{rcl} AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2 & \iff & AB^2 - BC^2 = AD^2 - CD^2 \\ & \iff & (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD}) \\ & \iff & \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}) \cdot \overrightarrow{AC} \\ & \iff & \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD}) = 0 \\ & \iff & \overrightarrow{AC} \cdot (2\overrightarrow{DB}) = 0 \\ & \iff & (AC) \perp (BD). \end{array}$$

Solution de l'exercice 9. On a trois cercles sur la figure, on est donc dans une situation rêvée pour chasser les angles. On a $\widehat{AQD} = \widehat{AQP} + \widehat{PQD} = \widehat{ABP} + \widehat{ACD} = 2\widehat{ABP} = \widehat{AOD}$. Par conséquent les points A, O, Q et D sont cocycliques, d'où $\widehat{OQP} = \widehat{OQA} + \widehat{AQP} = \widehat{ODA} + \widehat{ABD} = \widehat{ODA} + \frac{1}{2}\widehat{AOD} = \frac{\pi}{2}$ car le triangle AOD est isocèle en O, d'où la conclusion.



Équations fonctionnelles

Solution de l'exercice 10. Lorsque $OABC$ est un rectangle (un parallèlogramme suffit), on a $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$. On en déduit facilement que les fonctions coordonnées sont solutions. De plus, le théorème de Pythagore montre qu'il y a une autre solution de nature différente : c'est la fonction $M \mapsto OM^2$. Enfin, on remarque qu'une combinaison linéaire de solutions reste solution. À la lumière des observations précédentes, on commence par isoler dans une éventuelle solution f les parties « paires » et « impaires » comme dans l'exercice **??** : pour tout $M \in \mathcal{E}$, on définit $g(M) = \frac{f(M)+f(M')}{2}$ et $h(M) = \frac{f(M)-f(M')}{2}$ où M' est la symétrique de M par rapport à O. La fonction g vérifie alors $g(M) = g(M')$ (en un sens, elle est paire), alors que h satisfait $h(M) = -h(M')$ (elle pourrait donc être qualifiée d'impaire). De plus, on a $f = g + h$.

Commençons par déterminer la forme de h. Pour cela définissons, $a = f(I)$ (resp. $b = f(J)$) où I (resp. J) est le point de coordonnées $(1, 0)$ (resp. $(0, 1)$). Nous allons montrer par récurrence sur n la propriété H_n suivante : pour tout point M de coordonnées (i, j) avec $|i + j| \leqslant n$, on a $f(M) = ax_M + by_M$. Commençons par prouver H_1. C'est vrai par hypothèse si M est l'un des trois O, I ou J. C'est également vrai, par imparité, si M est le symétrique de l'un de ces points par rapport à O. Si maintenant M est un point vérifiant l'hypothèse de H_1, notons A et C les projetés de M sur les axes de coordonnées. Le quadrilatère $OAMC$ est à l'évidence un rectangle, ce qui entraîne par l'hypothèse de l'énoncé $f(M) = f(A) + f(C)$. En remarquant que A et C sont des points pour lesquels, H_1 a déjà été démontré, la démonstration de l'initialisation de la récurrence se termine sans problème. Passons maintenant à l'hérédité : supposons H_n et démontrons H_{n+1}. En utilisant le même argument que précédemment (c'est-à-dire en projetant sur les axes de coordonnées), on se rend compte qu'il suffit de montrer la conclusion de H_{n+1} pour les quatre points de coordonnées $(n + 1, 0)$, $(-n - 1, 0)$, $(0, n + 1)$ et $(0, -n - 1)$. Nous traitons seulement le premier, les autres étant analogues. Pour cela, on définit les points $A(n, n)$, $B(n+1, n-1)$, $C(1, -1)$, $A'(0, n-1)$ et $C'(n+1, 0)$. On vérifie directement que $OABC$ et $OA'BC'$ sont des rectangles, ce qui permet d'écrire $f(B) = f(A) + f(C) = f(A') + f(C')$, soit :

$$f(C') = f(A) + f(C) - f(A').$$

Les points A, C et A' relèvent de l'hypothèse de récurrence, ce qui permet de conclure en remplaçant ces quantités par leurs valeurs.

Occupons-nous maintenant de la fonction g. Posons $c = f(I)$ et $d = f(J)$. Par le même raisonnement que précédemment, nous montrons par récurrence que :

$$g(M) = \frac{c+d}{2} OM^2 - \frac{c-d}{2} \big[(-1)^{x_M} - (-1)^{y_M}\big].$$

Au final, on trouve une famille de solutions paramétrées par quatre nombres réels α, β, γ, δ qui sont :

$$f(M) = \alpha x_M + \beta y_M + \gamma OM^2 + \delta\big[(-1)^{x_M} - (-1)^{y_M}\big].$$

Réciproquement, on vérifie que ces fonctions satisfont bien les conditions de l'énoncé.

Solution de l'exercice 11. Soit f une solution éventuelle. Pour $x = y = 0$, il vient $f(0) = 0$. Pour $x = 0$, on déduit que, pour tout réel y :

$$f\left(y^n\right) = (f(y))^n \tag{III.8}$$

Soit $a \geqslant 0$ un réel. Il existe un réel y tel que $a = y^n$, et donc, pour tout réel x d'après (III.8) on a :

$$f(x+a) = f(x) + (f(y))^n = f(x) + f(a) \tag{III.9}$$

En particulier, pour $x = -a$, on déduit que f est impaire. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^+$. Alors $f(x-a) = -f(-x+a) = -(f(-x)+f(a)) = f(x) - f(a)$. Compte-tenu de (III.9), on en déduit que, pour tous réels x et a, on a $f(x+a) = f(x) + f(a)$. C'est l'équation de Cauchy. On sait qu'alors, pour tout réel x et tout rationnel r, on a $f(xr) = rf(x)$ et, en particulier $f(r) = rf(1)$. Mais l'équation fonctionnelle donne plus d'information que l'équation de Cauchy, et c'est ainsi que l'on va résoudre le problème. Il s'agit donc d'exploiter la présence de la puissance dans l'équation initiale. Soient $r \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a donc $f\left((r+x)^n\right) = (f(r)+f(x))^n$. Or :

$$f\left((r+x)^n\right) = f\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k r^k x^{n-k}\right) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k r^k f\left(x^{n-k}\right)$$

et :

$$(f(r)+f(x))^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (f(r))^k (f(x))^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k r^k (f(1))^k (f(x))^{n-k}$$

d'où :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k r^k f\left(x^{n-k}\right) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k r^k (f(1))^k (f(x))^{n-k}.$$

Considérant x fixé, les deux polynômes (en r) ci-dessus coïncident sur tous les rationnels, et donc ils sont égaux et on peut identifier les coefficients. En particulier, pour $k = n-2$ et pour $k = n-1$, il vient :

$$f\left(x^2\right) = (f(x))^2 (f(1))^{n-2} \quad \text{et} \quad f(x) = f(x)(f(1))^{n-1} \tag{III.10}$$

pour tout x. Pour $x = 1$, on en déduit que $f(1) = 0$ ou $f(1) = 1$ ou, si n est impair, $f(1) = -1$. Si $f(1) = 0$, de (III.10), il vient $f(x) = 0$ pour tout réel x, et réciproquement, la fonction nulle est bien une solution. Si $f(1) = 1$, de (III.10) et puisque tout réel positif est un carré, il vient $f \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}^+$. Soient alors x, y des réels tels que $0 \leqslant x \leqslant y$. Alors $x^2 \leqslant y^2$, et ainsi :

$$0 \leqslant f\left(y^2 - x^2\right) = f\left(y^2\right) - f\left(x^2\right) = (f(y)-f(x))(f(y)+f(x))$$

Et alors $f(y) \geqslant f(x)$, ce qui assure que f est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme elle est impaire, elle est donc croissante sur $\mathbb{R}$. Or, on a déjà vu qu'une solution monotone de l'équation de Cauchy est linéaire. Comme ici $f(1) = 1$, c'est donc que f est l'identité qui, réciproquement, est bien une solution. Finalement, si n est impair et $f(1) = -1$, on pose $g = -f$. La fonction g vérifie alors l'équation fonctionnelle initiale et $g(1) = 1$. Le cas précédent nous indique que g est l'identité et donc que f est définie par $f(x) = -x$ pour tout réel x. Réciproquement, cette dernière est bien une solution du problème.

En conclusion, les solutions sont la fonction nulle, l'identité et, dans le cas où n est impair, la fonction $x \mapsto -x$.

Inégalités

<u>*Solution de l'exercice 12.*</u> D'après l'inégalité du réordonnement on a $a^3+b^3 \geqslant a^2b+b^2a$ et donc
$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} \leqslant \frac{1}{a^2b+b^2a+abc} = \frac{c}{abc(a+b+c)}.$$
De manière analogue on a
$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc} \leqslant \frac{c}{abc(a+b+c)}+\frac{a}{abc(a+b+c)}+\frac{b}{abc(a+b+c)}$$
ce qui donne l'inégalité de droite. Pour l'inégalité de gauche on va utiliser les inégalités de moyennes. Tout d'abord, d'après l'inégalité entre moyenne harmonique et moyenne arithmétique on a
$$\frac{3}{\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}} \leqslant \frac{2a^3+2b^3+2c^3+3abc}{3}.$$
Finalement d'après l'inégalité entre moyenne géométrique et moyenne arithmétique on a
$$3abc \leqslant a^3+b^3+c^3$$
ce qui combiné avec l'inégalité précédente donne
$$\frac{3}{a^3+b^3+c^3} \leqslant \frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}.$$

<u>*Solution de l'exercice 13.*</u> Commençons par effectuer le changement de variable $x = 1/a, y = 1/b, z = 1/c$, on est ammené à montrer que
$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}$$
avec $xyz = 1$. Par l'inégalité de Jensen appliquée à la fonction $x \to 1/x$ on obtient
$$x\frac{x}{y+z}+y\frac{y}{x+z}+z\frac{z}{x+y} \geqslant (x+y+z)\frac{x+y+z}{(y+z)+(x+z)+(x+y)}.$$
Pour conclure, il suffit de noter que par l'inégalité arithmético-géométrique on a
$$x+y+z \geqslant 3\sqrt[3]{xyz} = 3.$$

<u>*Solution de l'exercice 14.*</u> On va utiliser ici l'inégalité arithmético-géométrique à poids : si $\alpha, \beta, \gamma\delta$ sont des paramètres strictement positifs alors
$$\frac{\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta t}{\alpha+\beta+\gamma+\delta} \geqslant \sqrt[\alpha+\beta+\gamma+\delta]{x^\alpha y^\beta z^\gamma t^\delta}$$
la difficulté étant de trouver les paramètres. Ils doivent vérifier les équations suivantes :
$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \alpha & + & \beta & + & \gamma & + & \delta & = & 1 \\ 4\alpha & + & \beta & & & & & = & 2 \\ & & 4\beta & + & \gamma & & & = & 1 \\ & & & & 4\gamma & + & \delta & = & 1 \\ \alpha & & & & & + & 4\delta & = & 1 \end{array}\right.$$
Par cette méthode on obtient que
$$\frac{23a^4b+7b^4c+11c^4d+10d^4a}{51} \geqslant \sqrt[51]{a^{102}b^{51}c^{51}d^{51}} = a^2bcd$$
ce qui en sommant donne le résultat.

4 En test

4.1 Le test de mi-parcours

Exercice 1. Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier, dont les diagonales $[AC]$ et $[CE]$ sont divisées respectivement par des points interieurs M et N de telle sorte que

$$\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = \lambda.$$

Déterminer λ lorsque B, M et N sont alignés.

Exercice 2. Soient s et t des entiers strictement positifs.
a) On suppose $\textsc{Ppcm}(s, s+6) = \textsc{Ppcm}(t, t+6)$. Montrer que $s = t$.
b) Pour quels entiers $n > 0$, peut-on déduire $s = t$ de $\textsc{Ppcm}(s, s+n) = \textsc{Ppcm}(t, t+n)$?

Exercice 3. Un ensemble X d'entiers strictement positifs est dit *beau* si, pour tous $a, b \in X$ (éventuellement égaux), un et un seul des deux nombres $a+b$ et $|a-b|$ appartient à X. Combien existe-t-il de beaux ensembles qui contiennent 2008 ?

Exercice 4. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tous x, y réels

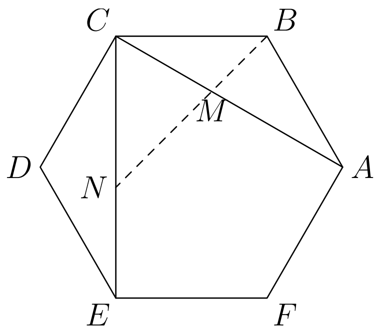
$$f(x + f(y)) = f(x) + f(y)^2 + 2xf(y).$$

Exercice 5. Montrer que pour tous réels positifs a, b et c, on a :

$$\frac{a^3}{a^2+4b^2} + \frac{b^3}{b^2+4c^2} + \frac{c^3}{c^2+4a^2} \geqslant \frac{a+b+c}{5}.$$

4.2 Les solutions

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>.



D'après l'énoncé, $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CN} = \lambda\overrightarrow{CE}$. Donc

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA} + \lambda\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \lambda\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{BC} = (\lambda - 1)\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{BC}.$$

L'hexagone étant régulier, on a $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BA}$, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BN} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{BC} + \lambda\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BC} + \lambda\overrightarrow{CD} + \lambda\overrightarrow{DE} \\ &= \overrightarrow{BC} + \lambda(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) + \lambda\overrightarrow{BA} = -2\lambda\overrightarrow{AB} + (\lambda + 1)\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

Or si les deux vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BN}$ sont colinéaires, alors $\overrightarrow{BM} = \alpha\overrightarrow{BN}$ pour un certain réel α. Ainsi, on a

$$(\lambda - 1)\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{BC} = \alpha(-2\lambda\overrightarrow{AB} + (\lambda + 1)\overrightarrow{BC})$$

et donc

$$(\lambda - 1 + 2\alpha\lambda)\overrightarrow{AB} = (-\lambda + \alpha(\lambda + 1))\overrightarrow{BC}.$$

Mais les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ n'étant pas colinéaires, nécessairement, $\lambda - 1 + 2\alpha\lambda = 0$ et $-\lambda + \alpha(\lambda + 1) = 0$. On a évidemment $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$, donc ces relations sont équivalentes à

$$\alpha = \frac{-2\lambda}{\lambda - 1} = \frac{\lambda + 1}{\lambda}.$$

Il s'ensuit que $(\lambda - 1)(\lambda + 1) + 2\lambda.\lambda = \lambda^2 - 1 + 2\lambda^2 = 3\lambda^2 - 1 = 0$. On sait que $\lambda > 0$, et par conséquent, $\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}$

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>. Montrer que l'implication est valable pour tout $n > 0$. On suppose donc $\text{PPCM}(s, s+n) = \text{PPCM}(t, t+n)$ et on veut montrer que $s = t$. Il suffit de montrer que $\text{PGCD}(s, s+n) = \text{PGCD}(t, t+n)$. En effet, une fois cela fait, on pourra écrire :

$$s(s+n) = \text{PPCM}(s, s+n)\text{PGCD}(s, s+n) = \text{PPCM}(t, t+n)\text{PGCD}(t, t+n) = t(t+n)$$

à partir de quoi il découle facilement $s = t$.

Pour démontrer l'égalité des PGCD, on décompose n en facteurs premiers : $n = p_1^{n_1} \cdots p_d^{n_d}$. On a $\text{PGCD}(s, s+n) = \text{PGCD}(s, n)$; c'est donc un diviseur de n. Ainsi, on peut écrire

$$\text{PGCD}(s, s+n) = p_1^{m_1} \cdots p_d^{m_d}$$

avec $m_i \leqslant n_i$ pour tout i. Nous allons montrer que $p_i^{m_i}$ divise t pour tout i. Supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas, et notons p^v la plus grande puissance de p qui divise t. On a donc $v < m_i$. Alors p^{v+1} divise n, d'où il suit que la plus grande puissance de p divisant $t + n$ est encore p^v. C'est finalement aussi, la plus grande puissance de p divisant $\text{PGCD}t, n$. Ainsi la plus grande puissance de p divisant

$$\text{PPCM}(t, t+n) = \frac{t(t+n)}{\text{PGCD}(t, t+n)} = \frac{t(t+n)}{\text{PGCD}(t, n)}$$

est p^v. Par ailleurs, p^{m_1} divise s et $s+n$. Il en résulte que p^{m_i} divise $\text{PPCM}(t, t+n) = \text{PPCM}(s, s+n) = \frac{s(s+n)}{\text{PGCD}(s,n)}$. Ceci contredit l'hypothèse $v < m_i$ que nous avons faite. On en déduit que t est divisible par $p_i^{m_i}$, et comme ceci est vrai pour tout i, t est aussi divisible par $\text{PGCD}(s, s+n)$. Comme ce dernier nombre divise aussi à l'évidence n, il suit que $\text{PGCD}(s, s+n)$ divise $\text{PGCD}(t, t+n)$. De même, on démontre la divisibilité dans l'autre sens, puis finalement $\text{PPCM}(s, s+n) = \text{PPCM}(t, t+n)$ comme annoncé.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>. Soit X un ensemble beau et non vide. Pour tout $a \in X$, en choisissant $a = b$ et puisque $0 \notin X$, on en déduit que $2a \in X$. Mais, puisque $2a - a = a \in X$, c'est que $a+2a = 3a \notin X$. Mais $4a \in X$ (comme ci-dessus, avec $2a$ au lieu de a) et, comme $4a-a = 3a \notin X$, on a alors $5a \in X$. Une récurrence immédiate permet alors d'affirmer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, on a $ka \in X$ si et seulement si $k \neq 0 \pmod 3$. Soient x, y deux éléments de X, avec $x = p3^t$ et $y = q3^s$, où p, q sont des entiers non divisibles par 3. Supposons que $t < s$. D'après ce qui précède, on a $pq3^s = py \in X$, et $pq3^s = q3^{s-t}x \notin X$, contradiction. Par suite, tous les éléments de X sont divisibles par la même puissance de 3. Notons-la 3^a. Soit m le plus petit élément de X. On va prouver que tout élément de X est un multiple de X.

Par l'absurde : supposons qu'il existe $n \in X$ qui ne soit pas divisible par m. Quitte à choisir, on suppose n minimal, et on pose $n = p3^a$ et $m = q3^a$, où p, q sont des entiers non divisibles par 3. Alors, puisque $|n-m|$ et $|n-2m|$ sont strictement inférieurs à n et non divisibles par m, il ne peuvent appartenir à X. Cela assure que, par contre, $n+m$ et $n+2m$ sont tous les deux dans X. Ainsi $n = p3^a, n+m = (p+q)3^a$ et $n+2m = (p+2q)3^a$ sont dans X, mais l'un des nombres $p, p+q, p+2q$ est divisible par 3, ce qui conduit à un élément de X divisible par 3^{a+1}, en contradiction avec ce qui précède.

Finalement, X est l'ensemble des nombres de la forme km, où k est un entier positif non divisible par 3. En particulier X est déterminé de manière unique par m. Puisque 2008 n'est pas divisible par 3, il existe autant de beaux ensembles contenant 2008 que de diviseurs positifs de 2008, soit donc 8.

Solution de l'exercice 4. Première solution. La fonction nulle convient bien, ainsi que la fonction $f(x) = x^2 + c$ où $c \in \mathbb{R}$ est une constante. Réciproquement, supposons que f est non nulle et soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \neq 0$. En faisant $y = a$, il vient pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(a + f(y)) - f(x) = f(a)^2 + 2xf(a)$. Ainsi, pour tout réel t il existe de réels x et y tels que $f(x) - f(y) = t$. En faisant $x = -f(y)$ cela donne $f(-f(y)) = f(y)^2 + f(0)$. Finalement, en remplaçant x par $-f(x)$ et en utilisant l'égalité précédente : $f(f(y) - f(x)) = (f(y) - f(x))^2 + f(0)$. D'après le premier point, on a donc $f(t) = t^2 + f(0)$ pour tout réel t.

Deuxième solution. Pour $x = 0$ on obtient $f(f(y)) = f(y)^2 + f(0)$ pour tout réel y. En remplaçant x par $f(x)$: $f(f(x) + f(y)) = (f(x) + f(y))^2 + f(0)$. On voit donc venir les solutions $f(x) = x^2 + c$ où c est une constante. Ces fonctions sont bien solutions, ainsi que la fonction nulle. On pose $g(x) = f(x) - x^2$. L'équation fonctionnelle s'écrit alors, après calculs :

$$\text{pour tous réels } x, y \qquad g(x + g(y) + y^2) = g(x). \tag{III.11}$$

En particulier, pour tout réel x :

$$g(g(x) + x^2) = g(0). \tag{III.12}$$

Raisonnons par l'absurde en supposant que g ne soit pas constante. Il existe alors un réel a tel que $g(a) \neq g(0)$. D'après (III.12), pour tout réel x on a $g(x) + x^2 \neq a$ et d'après (III.11) pour tous réels x et y : $g(x) + x^2 \neq a + g(y) + y^2$ ou encore

$$g(x) - g(y) + x^2 - y^2 \neq a. \tag{III.13}$$

On choisit $x = y + g(u) + u^2$ où u est arbitraire. Alors pour tout u, y, d'après (III.13) : $(y + g(u) + u^2)^2 - y^2 \neq a$, ou encore

$$2y(g(u) + u^2) \neq a - (g(u) + u^2)^2.$$

Comme f n'est pas la fonction nulle, il existe u tel que $f(u) \neq 0$ et donc $g(u) \neq -u^2$. Pour ce u, l'équation $2y(g(u) + u^2) = a - (g(u) + u^2)^2$ admet une solution en y. Contradiction. Ainsi, g est constante et par suite pour tout réel x, on a $f(x) = x^2 + c$ où c est une constante.

Solution de l'exercice 5. On remarque que $\frac{a^3}{a^2+4b^2} = \frac{a^3+4ab^2-4ab^2}{a^2+4b^2} = a - \frac{4ab^2}{a^2+4b^2}$. Ainsi on pourra réécrire notre inégalité de manière suivante :

$$a + b + c - \frac{a+b+c}{5} \geqslant \frac{4ab^2}{a^2+4b^2} + \frac{4bc^2}{b^2+4c^2} + \frac{4ca^2}{c^2+4a^2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{a+b+c}{5} \geqslant \frac{ab^2}{a^2+4b^2} + \frac{bc^2}{b^2+4c^2} + \frac{ca^2}{c^2+4a^2}.$$

On va maintenant estimer chaque terme de la partie droite séparément :

$$\begin{aligned}\frac{ab^2}{a^2+4b^2} &= \frac{1}{\frac{a}{b^2}+\frac{1}{a}+\frac{3}{a}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\frac{a}{b^2}\cdot\frac{1}{a}}+\frac{3}{a}} = \frac{1}{\frac{2}{b}+\frac{3}{a}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}} \leqslant \frac{1}{25}(2b+3a),\end{aligned}$$

où la dernière inégalité découle de l'inégalité entre la moyenne harmonique et la moyenne arithmétique. De même, on a $\frac{bc^2}{b^2+4c^2} \leqslant \frac{1}{25}(2c+3b)$ et $\frac{ca^2}{c^2+4a^2} \leqslant \frac{1}{25}(2a+3c)$ et on obtient

$$\frac{ab^2}{a^2+4b^2}+\frac{bc^2}{b^2+4c^2}+\frac{ca^2}{c^2+4a^2} \leqslant \frac{1}{25}(2b+3a+2c+3b+2a+3c) = \frac{a+b+c}{5}.$$

Donc, l'inégalité initiale est vraie pour tous a, b, $c > 0$.

Remarque. L'inégalité ne sera plus valable, si l'on déplace le coefficient 4 dans les dénominateurs, c'est-à-dire l'inégalité suivante

$$\frac{a^3}{4a^2+b^2}+\frac{b^3}{4b^2+c^2}+\frac{c^3}{4c^2+a^2} \geqslant \frac{a+b+c}{5}$$

est satisfaite pour certaines valeurs de a, b, $c > 0$, mais *pas* pour toutes.

IV. Les exercices de la seconde mi-temps

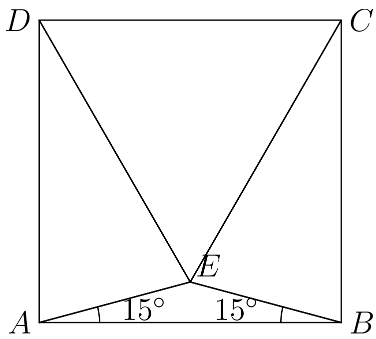
1 En TD

Les exercices suivants sont classés par thème, et à l'intérieur de chaque thème, plus ou moins classés par ordre de difficulté croissante.

1.1 Les énoncés

Géométrie

Exercice 1.



Sur la figure ci-dessus, $ABCD$ est un carré et les angles marqués valent 15°. Montrer que le triangle CDE est équilatéral.

Exercice 2 (*Une propriété importante du triangle équilatéral*). Soit ABC un triangle équilatéral et Γ son cercle circonscrit. Soit M un point quelconque du plan. Montrez l'inégalité

$$MA + MB \geqslant MC,$$

avec égalité si et seulement si M appartient à l'arc de Γ situé entre A et B et ne contenant pas C.

Exercice 3 (*Une propriété des bissectrices d'un triangle*). Soient ABC un triangle quelconque, et I le centre de son cercle inscrit. Soit Γ son cercle circonscrit. Notons M_A la seconde intersection de la bissectrice intérieure issue de A avec le cercle Γ.
(i) Montrer que le point M_A appartient à la médiatrice du segment $[BC]$.
(ii) Montrer que le cercle de centre M_A passant par B et C passe aussi par le point I.

Exercice 4 (*Identités de la médiane et du parallélogramme*). *(i)* Soit ABC un triangle et A' le milieu du côté BC. Montrer l'égalité suivante

$$4AA'^2 + BC^2 = 2AB^2 + 2AC^2.$$

(ii) Soit $ABCD$ un parallélogramme. Montrer l'égalité

$$2AB^2 + 2BC^2 = AC^2 + BD^2.$$

Exercice 5 (*Cercle et droite d'Euler*). Soit ABC un triangle, A', B', C' les milieux des côtés $[BC], [CA], [AB]$ du triangle. Soit H_A, H_B, H_C les pieds des hauteurs issues respectivement de A, B, C. Soit O le centre du cercle circonscrit à ABC, G son centre de gravité et H son orthocentre. Enfin soit P_A, P_B, P_C les milieux respectifs des segments $[AH], [BH], [CH]$.
(i) Montrer que l'homothétie h de centre G et de rapport $-1/2$ envoie le triangle ABC sur le triangle $A'B'C'$. En déduire que les points O, G, H sont alignés et qu'on a l'égalité $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

La droite (OH) est appelée *droite d'Euler* du triangle ABC.
(ii) Soit Ω le milieu de $[OH]$ et soit Γ l'image du cercle circonscrit à ABC par h. Montrer que Ω est le centre de Γ et que les points $A', B', C', H_A, H_B, H_C$ sont sur Γ.
(iii) Soit h' l'homothétie de centre H et de rapport $1/2$. Montrer que h' envoie O sur Ω. En déduire que les milieux respectifs P_A, P_B, P_C de $[AH]$, $[BH]$, $[CH]$ appartiennent au cercle Γ.

Le cercle Γ est appelé *cercle d'Euler* ou *cercle des neuf points* du triangle ABC.

Exercice 6 (*OIM 2008-1*). Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus, et soit H son orthocentre. Le cercle passant par H dont le centre est le milieu de $[BC]$ coupe la droite (BC) en A_1 et A_2. De même, le cercle passant par H et dont le centre est le milieu de $[CA]$ coupe (CA) en B_1 et B_2, et le cercle passant par H et dont le centre est le milieu de $[AB]$ coupe (AB) en C_1 et C_2.

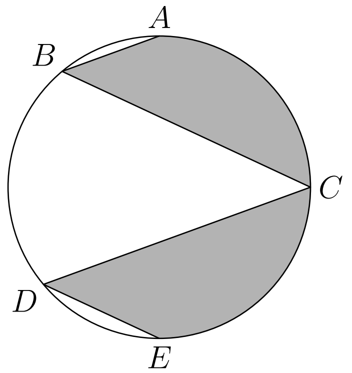
Montrer que $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ sont cocycliques.

Exercice 7 (*Théorème de Napoléon*). Soit ABC un triangle. On construit extérieurement trois triangles équilatéraux ABC_1, AB_1C et A_1BC de centres respectifs A_0, B_0, C_0. Montrer que le triangle $A_0B_0C_0$ est équilatéral.

Exercice 8. Soit ABC un triangle, et (Γ) le cercle passant par B, C et le centre O du cercle circonscrit. Les droites (AB) et (AC) recoupent (Γ) en D et E. Soit K le point de (Γ) diamétralement opposé à O. Montrer que $ADKE$ est un parallélogramme.

Exercice 9. Soit ABC un triangle, I le centre du cercle inscrit. On suppose que $AB+BI = AC$. Montrer que $\widehat{ABC} = 2.\widehat{BCA}$.

Exercice 10. Une ligne brisée $ABCDE$ partage un disque en deux morceaux : A, B, C, D et E sont cinq points du cercle, et les angles $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$, $\widehat{CDE}$ valent tous trois $\frac{\pi}{4}$.



Montrer que les deux morceaux de disque ainsi délimités ont la même aire.

Exercice 11. Dans un triangle ABC, la bissectrice intérieure de l'angle en C recoupe le cercle circonscrit en R et les médiatrices de $[BC]$ et $[CA]$ en P et Q respectivement. On appelle S et T les milieux de $[BC]$ et $[CA]$. Montrer que les triangles RQT et RPS ont même aire.

Exercice 12. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe, dont les diagonales AC et BD se coupent en O. Montrer que les triangles ABO, BCO, CDO, DAO ont même périmètre si et seulement si le quadrilatère $ABCD$ est un losange.

Exercice 13. Soient a, b, c les longueurs des trois côtés d'un triangle, α, β et γ les trois angles opposés. On suppose que : $3\alpha + 2\beta = 180^\circ$. Montrer que $a^2 + bc = c^2$.

Exercice 14. Soit I le centre du cercle inscrit dans un triangle ABC. Le cercle passant par B et tangent en I à (IC) recoupe en un point J le cercle passant par C et tangent en I à (IB). Montrer que A, B, C et J sont cocycliques.

Exercice 15. Dans un triangle ABC, on appelle A', B' et C' les pieds des hauteurs issues respectivement de A, B et C, H l'orthocentre et H' le milieu de $[AH]$.(BH) coupe $(A'C')$ en M, $(B'H')$ coupe (AB) en P. Montrer que (MP) est perpendiculaire à (BC).

Exercice 16. Un cercle (Γ) de centre O coupe un second cercle (Γ') en A et B. Sur l'arc de (Γ) intérieur à (Γ'), on choisit un point C. Les droites (AC) et (BC) recoupent (Γ') en D et E respectivement. Montrer que (DE) est perpendiculaire à (OC)

Exercice 17. Sur le côté (AB) d'un triangle ABC, on place deux points D et E tels que :

$$\left(\frac{AD}{DB}\right) \cdot \left(\frac{AE}{EB}\right) = \left(\frac{AC}{CB}\right)^2$$

Montrer que les angles $\widehat{ACD}$ et $\widehat{BCE}$ sont égaux.

Exercice 18. A l'intérieur d'un triangle équilatéral ABC, le point P vérifie : $PA = 3$, $PB = 4$ et $PC = 5$. Calculer la longueur du côté du triangle équilatéral.

Exercice 19. Soit ABC un triangle, D le pied de la hauteur issue de A. Les bissectrices intérieures issues de B et C coupent (AD) respectivement en E et F. Montrer que, si $BE = CF$, ABC est isocèle.

Exercice 20. Soit I le centre du cercle inscrit dans un triangle ABC, D, E et F les pieds des bissectrices (AI), (BI), (CI). Soient X, Y et Z trois points quelconques sur les segments $[EF]$, $[FD]$ et $[DE]$ respectivement. Montrer que :

$$d(X, AB) + d(Y, BC) + d(Z, CA) \leqslant XY + YZ + ZX$$

Arithmétique

Exercice 21. Trouver un nombre congru à 1 modulo 7, 2 modulo 11 et 3 modulo 13.

Exercice 22. Soit $N = 56241242$. N est-il un carré ? N est-il divisible par 7 ?

Exercice 23. Prouver que pour tout $n \geqslant 2$, $3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17.

Exercice 24. Soit p un nombre premier et n un nombre entier plus grand (au sens large) que p. A combien est congru $n^{n!}$ modulo p ? Que dire si on ne suppose plus p premier ?

Exercice 25. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $2x^2 \equiv 2xy + y^2 \pmod 6$.

Exercice 26. L'équation diophantienne $t^8 = 4 + r^4 + s^2$ admet-elle 0, un nombre fini non-nul ou une infinité de solutions ?

Exercice 27. 7 divise-t-il $2222^{5555} + 5555^{2222}$?

Exercice 28. Trouver les couples $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $1 + 2^n + 2^{n+1} = m^2$.

Exercice 29. Montrer que si p est premier et $a \not\equiv 0 \pmod p$ alors l'ordre de a divise $p - 1$.

Exercice 30. Montrer qu'il y a un unique triplet (k, m, n) d'entiers strictement positifs tel que $3^n + 4^m = 5^k$.

Exercice 31. Soit $p \geqslant 2$ un nombre premier. Montrer que tout entier est congru modulo p à une somme de deux carrés.

Exercice 32 (*d'après Mexique, 2005*). Montrer que 1 est le seul entier strictement positif premier avec tous les entiers de la forme $2^n + 3^n + 6^n - 1$.

Exercice 33 (*Inde, 1996*). Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $15a + 16b$ et $16a - 15b$ soient tous deux des carrés d'entiers. Trouver la plus petite valeur pouvant être prise par le minimum de ces deux carrés.

Pour l'exercice suivant, on admettra le théorème d'Euler :

Théorème 1.1. *Si n et m sont premiers entre eux, l'ordre de m modulo n divise $\varphi(n)$, où $\varphi(n)$ désigne la fonction caractéristique d'Euler de n,* i.e. *le nombre de nombres entre* 1 *et n qui sont premiers avec n.*

Exercice 34 (*Roumanie, 1978*). Soient m et n des entiers tels que $n > m \geqslant 1$. Dans la représentation décimale, les trois derniers de 1978^m et 1978^n sont les mêmes.

Trouver m et n tels que $m + n$ soit minimal.

Exercice 35. Montrer que la somme $1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n$ est divisible par n, si n est impair.

Exercice 36. Soient A la somme des chiffres du nombre 4444^{4444} et B la somme des chiffres de A. Trouver la somme des chiffres du nombre B.

Exercice 37. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie récursivement par $a_0 = 2$, $a_1 = 5$ et

$$a_{n+1} = (2 - n^2)a_n + (2 + n^2)a_{n-1} \quad \text{pour } n > 0.$$

Est-ce qu'il existe trois indices p, q, r tels que $a_p \cdot a_q = a_r$?

Exercice 38. Prouver que si $m, n > 0$ sont deux entiers premiers entre eux, alors le nombre $m^2 + n^2$ n'est divisible par aucun entier de type $4k + 3$.

Exercice 39. Prouver que l'équation $x^2 = y^3 + 7$ n'a pas de solutions en nombres entiers.

Exercice 40. Montrer que pour tout entier $n > 0$, le nombre $\left[(2 + \sqrt{3})^n\right]$ est impair.

Exercice 41. Prouver que pour tout entier $n > 0$, il existe n entiers consécutifs, dont chacun est divisible par au moins deux nombres premiers distincts.

Exercice 42. Montrer que parmi 2008 nombres, on peut toujours en trouver dont la somme est divisible par 2008 (une somme peut éventuellement n'être constituée que d'un seul nombre).

Exercice 43. Montrer que $11^{100} - 1$ est divisible par 1000.

Exercice 44. Combien peut-il y avoir de Vendredi 13 dans une année (non bissextile) ?

Exercice 45. Montrer que le produit de 5 nombres consécutifs ne peut pas être un carré.

Exercice 46. Résoudre l'équation $28^x = 19^y + 87^z$ pour $x, y, z \in \mathbb{N}$.

Exercice 47. Montrer qu'il existe un multiple de 2009 dont l'écriture décimale ne contient que des chiffres 1.

Exercice 48 (*OIM 1991*). Quel est le PGCD des nombres $a^{37} - a$ lorsque a parcourt $\mathbb{N}$.

Exercice 49. Trouver huit entiers strictements positifs $n_1, n_2, \ldots, n_8$ ayant la propriété suivante : pour tout entier k, $-2007 \leqslant k \leqslant 2007$, il existe huit entiers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_8$ appartenant tous à $\{-1, 0, 1\}$, tels que

$$k = \alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + ... + \alpha_8 n_8.$$

Exercice 50. Déterminer toutes les solutions entières (x, y) de l'équation diophantienne $x^3 - y^3 = 2xy + 8$.

Exercice 51. Trouver toutes les paires de nombres (n, k) tel que dans le système décimal n^n s'écrive avec k chiffres et k^k s'écrive avec n chiffres.

Exercice 52. Trouver tous les nombres A de trois chiffres tels que la moyenne des nombres obtenus en permutant les chiffres soit égale à A.

Exercice 53. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers n tels que $n^3 + n^5$ soit une somme de deux carrés.

Exercice 54. On considère la suite de Fibonacci, définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Montrer qu'il existe trois entiers a, b, c tels que $F_n \equiv c(a^n - b^n) \pmod{19}$. Pour quelles valeurs de n F_n est-il divisible par 19 ?

Exercice 55. Montrer que pour tout réel x et tout entier $k > 1$,

$$[x] + \left[x + \frac{1}{k}\right] + \left[x + \frac{2}{k}\right] + \cdots + \left[x + \frac{k-1}{k}\right] = [kx]$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x.

Exercice 56. Soient b, m et n trois entiers tels que $b > 1$ et $m > n$. Montrer que si $b^m - 1$ et $b^n - 1$ ont les mêmes facteurs premiers, $b^n + 1$ est une puissance de 2.

Exercice 57. *a)* Montrer que s'il existe un triplet d'entiers positifs (x, y, z) tels que : $x^2+y^2+1 = xyz$, alors $z = 3$.
b) Trouver tous les triplets d'entiers positifs vérifiant cette équation.

Exercice 58. Trouver tous les couples d'entiers (a, b) tels que $a^2 + 4b$ et $b^2 + 4a$ soient tous deux des carrés parfaits.

Exercice 59. Soit S_n l'ensemble des entiers compris entre 1 et 2^n. Montrer que l'on peut partitionner S_n en deux sous-ensembles disjoints $A = \{a_1, a_2, ...a_p\}$ et $B = \{b_1, b_2, ...b_q\}$ (avec bien évidemment $p + q = 2^n$) tels que pour tout k compris entre 1 en $n - 1$,

$$\sum_{a_i \in A} (a_i)^k = \sum_{b_i \in B} (b_i)^k$$

Exercice 60. Trouver toutes les valeurs de $n > 0$ pour lesquelles

$$(n+3)^n = \sum_{k=3}^{n+2} k^n$$

Combinatoire – Algèbre

Exercice 61. Combien y a-t-il de sous-ensembles d'un ensemble de cardinal n ?

Exercice 62. Montrer que le nombre de diviseurs de n (y compris 1 et n) est impair si et seulement si n est le carré d'un nombre entier.

Exercice 63. On dispose de n elfes et de n gobelins. On souhaite les aligner mais il est interdit de mettre deux gobelins l'un à coté de l'autre. Combien de dispositions sont possibles ?

Exercice 64. On a n objets à ranger dans n emplacements. Mais certains objets sont semblables. Il y a k types d'objets différents et il y a n_i objets du $i^{\text{ème}}$ type. On a donc $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Combien y a-t-il de rangements de ces objets ?

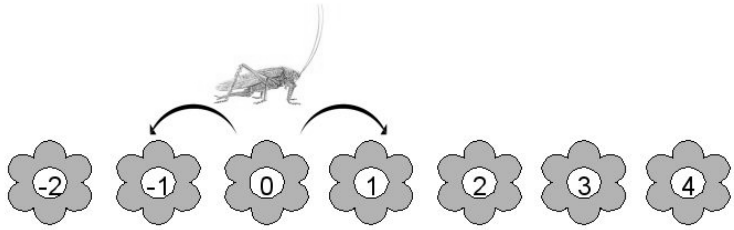
Exercice 65. Soient n et k deux nombres entiers naturels. De combien de façons est-il possible de choisir k nombres entiers naturels $i_1, i_2, \ldots, i_k$ tels que $i_1 + i_2 + \cdots + i_k = n$?

Exercice 66. Combien de tirages différents peut-on faire si l'on tire des boules différentes *et qu'on les remet* après chaque tirage sans se soucier de l'ordre ?

Exercice 67 (*Concours général 90*). On dispose de $n \geqslant 4$ couleurs. Combien de tétraèdres différents peut-on peindre en peignant chaque face avec une et une seule couleur ?

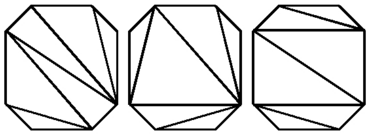
Exercice 68. Trouver une expression comparable à celle du binôme de Newton pour $(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n$.

Exercice 69. Dans le champ mathematicus il y a un alignement infini de fleurs.



Une sauterelle se déplace de fleur en fleur. A chaque saut, elle peut passer sur la fleur d'à coté (si elle est sur la fleur n elle peut passer sur la fleur $n-1$ ou $n+1$). Au départ la sauterelle est sur la fleur 0. De combien de façons peut-elle sauter k fois sachant qu'après ses k sauts, elle doit revenir sur la fleur 0 ? De combien de façons peut-elle sauter k fois sachant qu'après ses k sauts, elle doit revenir sur la fleur 0 sans jamais être passée sur une fleur strictement négative ?

Exercice 70. De combien de manières différentes un polygone à n côtés peut être partagé en triangles en reliant ses sommets par des segments de droite ?



Exercice 71. Calculer

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i^2 j^2.$$

Exercice 72. Calculer

$$u_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \min(i,j)$$

Avec min la fonction qui donne le plus petit des deux nombres.

Exercice 73. Calculer

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{p} p+q.$$

Exercice 74 (*L'identité de Vandermonde*). Montrer que si $k \leqslant \min(m,n)$ alors

$$\binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \ldots + \binom{n}{k}\binom{m}{0} = \binom{m+n}{k}$$

Exercice 75. Combien y a-t-il de permutations n'ayant qu'un seul cycle ?

Exercice 76. Soit p une fonction associée à une permutation. On appelle ordre de cette permutation le plus petit entier k tel que $p^{(k)} = Id$. Quelle est le plus grand ordre pour une permutation de taille 11 ?

Exercice 77. Quelle est le plus petit k tel que l'on ait $p^{(k)} = Id$ pour toutes les permutations de longueur n fixée (on note p pour la fonction correspondant à la permutation).

Exercice 78. On appelle dérangement une permutation de taille n telle que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ on ait $p(i) \neq i$. Combien y a-t-il de dérangements de taille n ?

Exercice 79. On dit qu'une permutation $(x_1, x_2, ..., x_{2n})$ possède la propriété $\mathfrak{P}$ s'il existe un i tel que $|x_i - x_{i+1}| = n$. Démontrer qu'il y a plus de permutations qui ont la propriété $\mathfrak{P}$ que de permutations qui ne l'ont pas.

Exercice 80. On a un groupe de n filles $F_1, F_2, ..., F_n$ et $2n-1$ garçons $G_1, G_2, ..., G_{2n-1}$. La fille F_i connaît les garçons $G_1, ..., G_{2i-1}$ et aucun autre. On souhaite faire des couples pour faire danser les filles et les garçons. Montrer que le nombre de façons de former $r \leqslant n$ couples de telle sorte que chaque fille connaisse le garçon est :

$$\binom{n}{r} \frac{n!}{(n-r)!}$$

Exercice 81. Déterminer s'il existe ou pas, dans le plan, 100 droites deux à deux distinctes ayant exactement 2008 points d'intersection distincts.

Exercice 82. Montrer que les nombres $1, 2, ..., 2008$ peuvent être coloriés de 4 couleurs différentes de sorte que aucune progression arithmétique de 10 termes ne contienne que des nombres d'une seule couleur.

Exercice 83. M est un sous-ensemble de $\{1, 2, ..., 15\}$ tel que le produit de 3 éléments distincts de M ne soit jamais un carré. Trouver le nombre maximal d'éléments que peut avoir M.

Exercice 84. Soit $ABCDEFGH$ un octogone régulier. Un pion est placé au départ sur A et se déplace sur un des voisin à chaque tour (quand le pion est sur A il peut aller sur B ou H). Le jeu se termine lorsque le pion atteint pour la première fois le sommet E. On désigne par a_n le nombre de "parties" de exactement n coups (qui se termine donc en E). Montrer alors que

$$a_{2k-1} = 0 \text{ et } a_{2k} = \frac{x^{k-1} - y^{k-1}}{\sqrt{2}}$$

avec $x = 2 + \sqrt{2}$ et $y = 2 - \sqrt{2}$.

Exercice 85. Trente-six stagiaires ont été enlevés par le diabolique Xavier qui, dans sa grande bonté, leur laisse une chance de se sortir de son piège. Il les fait entrer un par un dans une grande pièce qui contient 36 tiroirs, chacun de ces tiroirs contenant le nom d'un stagiaire (les noms sont supposés deux à deux distincts). Si en ouvrant moins de 18 tiroirs le mathématicien trouve son nom il passe dans une autre pièce où il doit attendre ses amis. Sinon, Xavier tue tout le monde. Trouver une stratégie qui confèrent aux mathématiciens au moins 30% de chance de survivre.

Exercice 86. Soit f un polynôme unitaire du second degré. Montrer que si f a une racine entière, alors les deux racines sont entières.

Exercice 87. Montrer que toute racine rationnelle d'un polynôme f unitaire à coefficients entiers est un entier qui divise $f(0)$.

Exercice 88. Soit P un polynôme à coefficients entiers ayant au moins 13 racines entières distinctes. Montrer que si $n \in \mathbb{Z}$ n'est pas racine de P, alors $|P(n)| \geqslant 7 \times (6!)^2$ et donner un exemple où il y a égalité.

Exercice 89. Existe-t-il trois polynômes du second degré f, g, h tels que l'équation $f(g(h(x))) = 0$ ait les solutions 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ?

Exercice 90. On considère les trinômes $x^2 + px + q$ tels que $1 \leqslant p, q \leqslant 2008$. Quels sont les plus nombreux : ceux qui ont deux racines entières, ou ceux n'ayant pas de racine réelle ?

Exercice 91 (*OIM 2008*). *a)* Montrer que

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geqslant 1$$

pour tous nombres réels x, y, z, différents de 1 et vérifiant $xyz = 1$.
b) Montrer qu'il existe une infinité de triplets de nombres rationnels x, y, z, différents de 1 et vérifiant $xyz = 1$, pour lesquels l'inégalité ci-dessus est une égalité.

Exercice 92. Soit m un entier naturel. Calculer $\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2m+1}}$ et $\sum_{k=1}^{m} \cot^2 \frac{k\pi}{2m+1}$.

En déduire $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. (Utiliser $\cot\theta \leqslant \frac{1}{\theta} \leqslant \frac{1}{\sin\theta}$ lorsque $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.)

Exercice 93. Un polygone régulier $\mathcal{P}$ ayant n sommets est inscrit dans un disque D. Déterminer les points de D dont le produit des distances aux sommets de $\mathcal{P}$ est maximal.

Exercice 94. Existe-t-il trois réels a, b, c tels que les deux trinômes $ax^2 + bx + c$ et $(a+1)x^2 + (b+1)x + (c+1)$ aient deux racines entières ?

Exercice 95. Existe-t-il une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(f(x)) = x^2 - 2$ pour tout x ?

Exercice 96. Déterminer les fonctions f de $\mathbb{Q}_+^*$ dans $\mathbb{Q}_+^*$ vérifiant $f(x+1) = f(x) + 1$ et $f(x^3) = f(x)^3$ pour tout $x \in \mathbb{Q}_+^*$

Exercice 97. Soit a et b deux entiers strictement positifs. Montrer que si $4ab-1$ divise $(4a^2-1)^2$, alors $a = b$.

Exercice 98. Soit a et b des entiers naturels non nuls tels que $ab + 1$ divise $a^2 + b^2$. Montrer que $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ est un carré parfait.

Exercice 99 (*Critère d'Eisenstein*). Soit p un nombre premier et soit $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ un polynôme à coefficients entiers. On suppose que p divise $a_0, \ldots, a_n$ et que p^2 ne divise pas a_0.

Montrer que f est irréductible, c'est-à-dire ne peut s'écrire comme produit de deux polynômes non constants à coefficients entiers.

Exercice 100. Soit p premier. Montrer que $x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$ est irréductible.

Exercice 101. Soit n un entier supérieur à 1. Montrer que $x^n + 5x^{n-1} + 3$ est irréductible.

Exercice 102. Trouver tous les polynômes $P(x)$ à coefficients réels qui vérifient l'égalité $P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = 2\,P(a+b+c)$ pour tous les réels a, b, c tels que $ab + bc + ca = 0$.

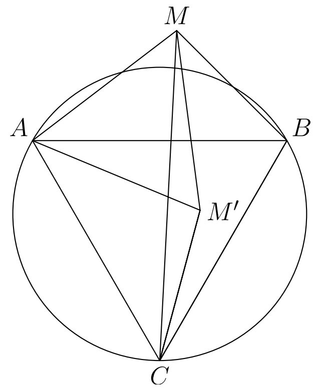
Exercice 103. Soit a un réel non nul et, pour tout entier n, $S_n = a^n + a^{-n}$. On suppose qu'il existe un entier naturel p tel que S_p et S_{p+1} sont entiers. Montrer que S_n est entier pour tout n.

1.2 Les solutions

Géométrie

Solution de l'exercice 1. L'idée cruciale est de travailler à rebours. Supposons que le triangle CDE est équilatéral est montrons que l'angle $\widehat{EAB}$ vaut $15°$. Comme le point E est sur la médiatrice du segment $[AB]$, il est déterminé de manière unique par l'angle $\widehat{EAB}$, donc on peut bien travailler à rebours. Si CDE est équilatéral, on a alors $DA = DE$, donc le triangle ADE est isocèle, or l'angle $\widehat{ADE}$ vaut $30°$, donc $\widehat{DAE} = \widehat{AED} = 75°$, et par conséquent $\widehat{EAB} = 90° - \widehat{EAD} = 15°$.

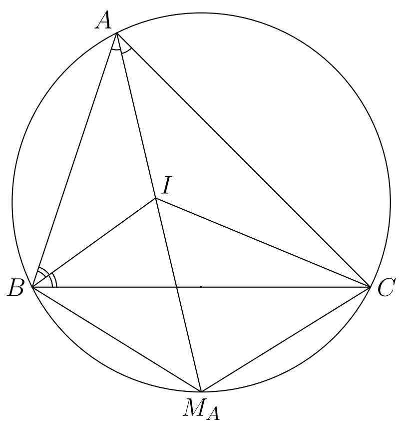
Solution de l'exercice 2.



On oriente ABC comme sur la figure. Soit r la rotation de centre A et d'angle $-\pi/3$. Soit M' l'image de M. Comme r envoie B sur C on a $MB = M'C$. Or le triangle AMM' est équilatéral, donc on a $MA = AM' = MM'$. Par conséquent l'inégalité de l'énoncé est équivalente à $MM' + M'C \geqslant MC$ qui n'est autre que l'inégalité triangulaire dans le triangle CMM'.

On a égalité si, et seulement si les points M, M' et C sont alignés dans cet ordre, or l'angle $\widehat{AMM'}$ vaut $\pi/3$, donc nécessairement M doit être sur l'arc de cercle regardant l'arc AC sous un angle de $\pi/3$. Les conditions étant symétriques en A et B, M doit également regarder BC sous un angle de $\pi/3$, donc M doit appartenir à l'arc AB du cercle circonscrit à ABC. Réciproquement on vérifie que tous les points de cet arc marchent (c'est-à-dire que l'alignement à lieu dans le bon ordre).

Solution de l'exercice 3. *(i)* Par cocyclité on a $\widehat{M_ABC} = \widehat{M_AAC}$ et $\widehat{M_AAB} = \widehat{M_ACB}$. Or AM_A est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$, donc on a aussi $\widehat{M_AAC} = \widehat{M_AAB}$. Par conséquent le triangle M_ABC est isocèle en M_A, donc on a $M_AB = M_AC$, et donc le point M_A appartient à la médiatrice du côté BC.



(ii) On a

$$\begin{aligned}
\widehat{BIM_A} &= \pi - \widehat{IBM_A} - \widehat{BM_AI} \\
&= \pi - \widehat{IBC} - \widehat{CBM_A} - \widehat{BIM_AA} \\
&= \pi - \widehat{IBC} - \widehat{IAC} - \widehat{BCA} \\
&= \pi - \widehat{ABC}/2 - \widehat{BAC}/2 - \widehat{BCA} \\
&= \widehat{ABC}/2 + \widehat{BAC}/2 \\
&= \widehat{IBC} + \widehat{CBM_A} \\
&= \widehat{IBM_A}.
\end{aligned}$$

Par conséquent le triangle BIM_A est isocèle en M_A, d'où $IM_A = BM_A$, et donc le cercle centré en M_A et passant par B et C passe également par I.

Solution de l'exercice 4. *(i)* Motivés par la présence de carrés de longueurs, on se précipite sur des produits scalaires comme la vérole sur le clergé breton. On obtient alors

$$\begin{aligned}
2AB^2 + 2AC^2 &= 2(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B})^2 + 2(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C})^2 \\
&= 2AA'^2 + 4\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{A'B} + 2A'B^2 + 2AA'^2 + 4\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{A'C} + 2A'C^2 \\
&= 4AA'^2 + 4\overrightarrow{AA'} \cdot (\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C}) + 2A'B^2 + 2A'C^2.
\end{aligned}$$

Or A' est le milieu de BC, donc on a $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = 0$ et $A'B^2 = A'C^2 = BC^2/4$, d'où $2AB^2 + 2AC^2 = 4AA'^2 + BC^2$.

(ii) Le seconde égalité se montre de la même façon.

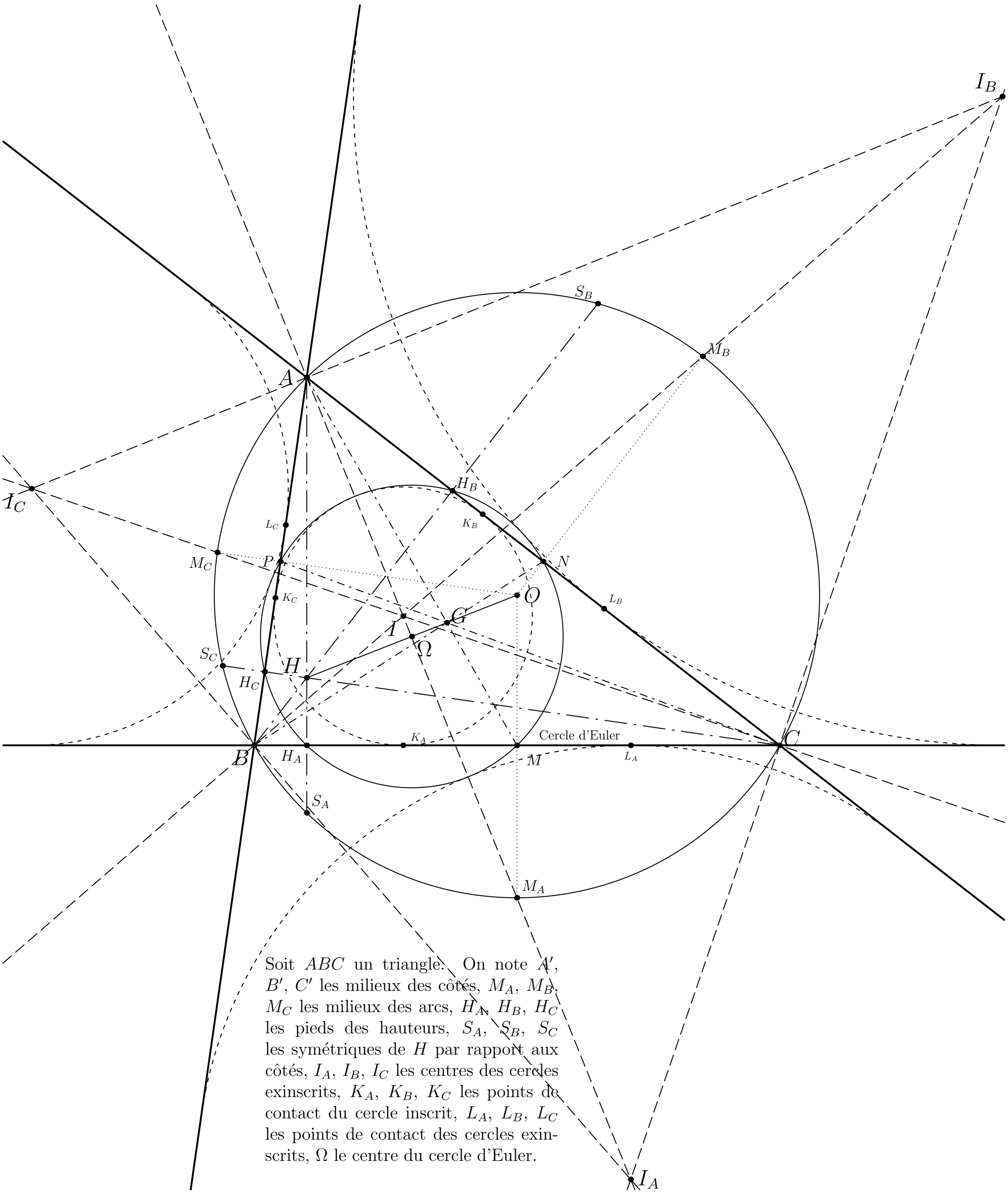
Solution de l'exercice 5. Pour cet exercice, on fait une grande figure, qui est la figure 1 page 82.
(i) On sait que le point G est situé aux 2/3 de chaque médiane du triangle, donc h envoie A en A', B en B' et C en C'. Comme la hauteur (AH) est parrallèle à la médiane $(A'O)$, h envoie la première sur la seconde. Donc le point de concours des hauteurs H est envoyé par h sur le point de concours de médiatrices O. Les points O, G, H sont alors alignés, et on a $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$, d'où $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

(ii) D'après la définition de Ω on a $\overrightarrow{GO} = -2\overrightarrow{G\Omega}$, donc h envoie O en Ω, et par conséquent Ω est le centre de l'image Γ du cercle circonscrit par h. Les points A, B, C sont par définition sur le cercle circonscrit à ABC, donc leurs images par h, les points A', B', C', sont sur le cercle Γ. Comme Ω est le milieu du segment $[OH]$, donc il est équidistant des droites (AH) et (OA'), par conséquent on a $\Omega H_A = \Omega A'$. Par conséquent H_A est sur Γ et de même pour les points H_B et H_C.

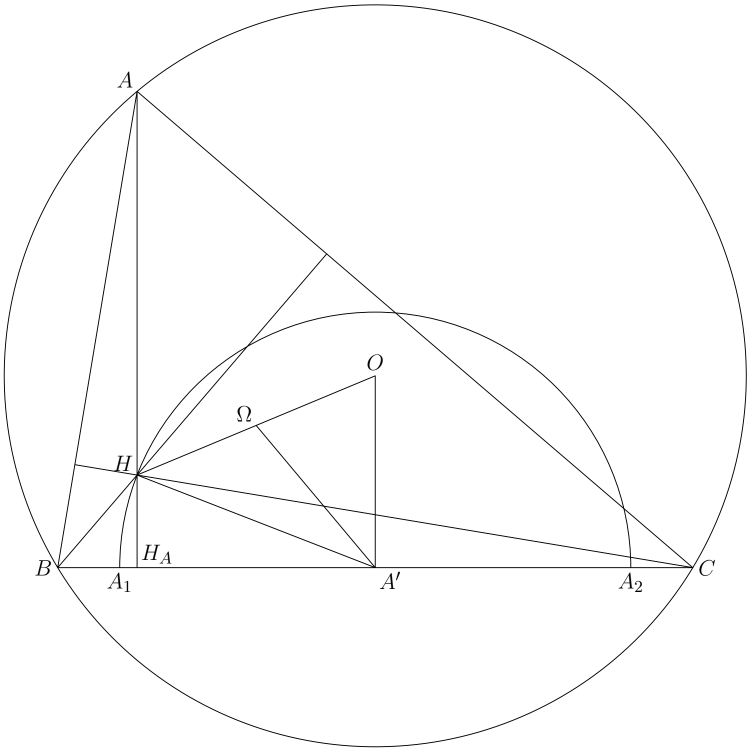
(iii) Comme on Ω est le milieu de $[HO]$, l'homothétie h' envoie O en Ω. Par conséquent h' envoie aussi le cercle circonscrit à ABC sur Γ. Or P_A est l'image de A par h', donc P_A est sur le cercle Γ, de même que les points P_B et P_C.

Solution de l'exercice 6.

FIG. 1 – Triangle et ses éléments remarquables



Soit ABC un triangle. On note A', B', C' les milieux des côtés, M_A, M_B, M_C les milieux des arcs, H_A, H_B, H_C les pieds des hauteurs, S_A, S_B, S_C les symétriques de H par rapport aux côtés, I_A, I_B, I_C les centres des cercles exinscrits, K_A, K_B, K_C les points de contact du cercle inscrit, L_A, L_B, L_C les points de contact des cercles exinscrits, Ω le centre du cercle d'Euler.



Soit A', B', C' les milieux respectifs de $[BC], [CA], [AB]$. Comme $A'A_1 = A'A_2$, si les points sont cocycliques, le centre du cercle en question doit être sur la médiatrice de $[A_1A_2]$, c'est-à-dire sur la médiatrice de $[BC]$. Par conséquent, le centre du cercle recherché ne peut être que O, le centre du cercle circonscrit à ABC. Montrons donc l'égalité $OA_1 = OA_2 = OB_1 = OB_2 = OC_1 = OC_2$. Comme on a un triangle rectangle $OA'A_1$, on passe aux carrés pour appliquer le théorème de Pythagore, et on obtient

$$OA_1^2 = OA'^2 + A'A_1^2 = OA'^2 + A'H^2.$$

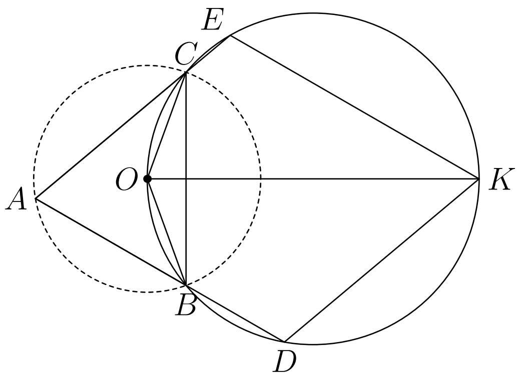
Là, on se rappelle que le milieu Ω de $[OH]$ est un point particulier : c'est le centre du cercle d'Euler. On applique alors l'identité de la médiane. On a alors

$$OA'^2 + A'H^2 = 2OH^2 + \frac{1}{2}\Omega A'^2.$$

Or $\Omega A'$ est le rayon du cercle d'Euler, et OH et dépend pas du choix A_1. On en déduit que la longueur OA_1 ne dépend pas du choix de A_1. Par conséquent les six points de l'énoncé sont équidistants de O, et donc ils sont cocyliques.

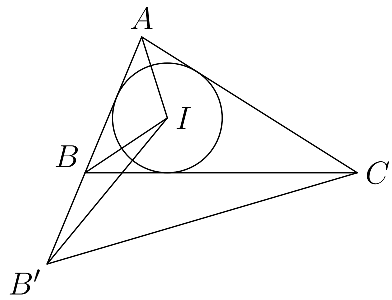
Solution de l'exercice 7. Soit I le centre du cercle inscrit dans ABC. Rappelons que le point A_0 est équidistant de B, C et I. De même B_0 est équidistant de C et I, et C_0 est équidistant de B et I. On en déduit que la droite (A_0B_0) est la médiatrice du segment $[CI]$ et que (A_0C_0) est la médiatrice de $[BI]$. Considérons les symétries s_B, s_C par rapport aux droites (A_0C_0) et (A_0B_0) respectivement. On a $s_B(B) = I$ et $s_C(I) = C$, donc $s_C \circ s_B(B) = C$. Or $s_C \circ s_B(A_0) = A_0$ et l'angle $\widehat{BA_0C}$ vaut 120°, donc $s_C \circ s_B$ est une rotation d'angle 120°. Come l'angle de la composée de deux symétries est le double de l'angle entre les deux axes, on en déduit $\widehat{B_0A_0C_0} = 120°$.

Solution de l'exercice 8.



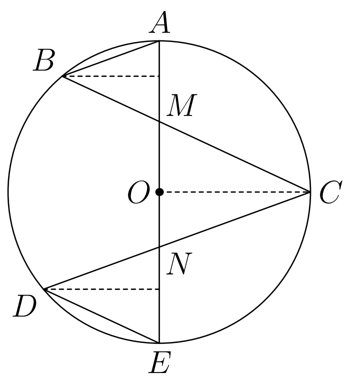
La médiatrice de $[BC]$ passe par O, centre du cercle circonscrit à ABC, mais aussi par le centre de (Γ), qui passe lui aussi par B et C. Elle passe donc par K : (OK), médiatrice de $[BC]$, est bissectrice du triangle isocèle OBC. Or l'angle au centre $\widehat{BOC}$ est le double de l'angle inscrit $\widehat{BAC}$, d'où : $\widehat{BOK} = \widehat{KOC} = \widehat{BAC}$. Les angles inscrits $\widehat{BOK}$ et $\widehat{BDK}$ sont supplémentaires, donc $\widehat{CAB} + \widehat{ADK} = \pi$, ce qui prouve que (DK) et (AC) sont parallèles. Et par un raisonnement identique, on prouve que (KE) et (AB) sont parallèles.

Solution de l'exercice 9.



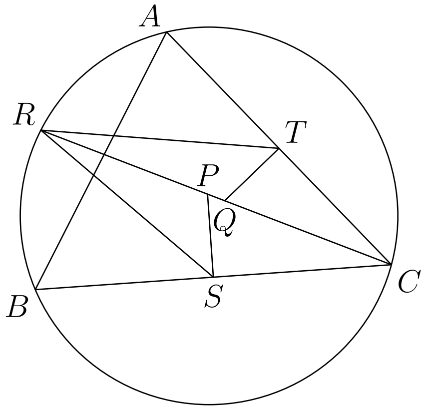
On ne peut pas dire grand-chose d'une somme de longueurs lorsque les segments ne sont pas alignés : on va donc créer un alignement qui nous permette de conclure. Le côté AB est plus court que AC. Prolongeons la demi-droite $[AB)$ et plaçons y un point B' tel que $AB' = AC$. Alors $BB' = BI$, *i.e.* le triangle $B'BI$ est isocèle, et $\widehat{BB'I} = \widehat{B'IB} = \frac{1}{2}\widehat{ABI} = \frac{1}{4}\widehat{ABC}$ car (BI) est bissectrice de $\widehat{ABC}$. Or (AI), bissectrice de $\widehat{BAC}$, est axe de symétrie du triangle isocèle $AB'C$, d'où $\widehat{BB'I} = \widehat{ACI} = \frac{1}{2}\widehat{ACB}$ car (CI) est bissectrice de $\widehat{ACB}$. D'où $\widehat{ABC} = 2\,\widehat{ACB}$.

Solution de l'exercice 10.



Appelons O le centre du cercle. L'angle au centre étant le double de l'angle inscrit, comme $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{4}$, $\widehat{AOC} = \frac{\pi}{2}$, tout comme $\widehat{COE} = \frac{\pi}{2}$: $[AE]$ est un diamètre. Appelons M et N les intersections de ce diamètre avec les cordes $[BC]$ et $[CD]$: le problème revient à prouver que la somme des aires de ABM et NDE est égale à l'aire de MCN. Or les triangles ABM et MCN sont semblables, puisque les angles $\widehat{ABM}$ et $\widehat{MCN}$ valent par hypothèse $\frac{\pi}{4}$ et que $\widehat{BMA} = \widehat{CMN}$. On peut en dire autant des triangles MCN et NDE. Leurs surfaces sont donc proportionnelles aux carrés de leurs hauteurs. Or si l'on appelle R le rayon du cercle, β, γ, δ les angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{AOC}$ et $\widehat{AOD}$, les hauteurs des triangles valent $R\sin\beta$, $R\sin\gamma$ et $R\sin\delta$. Il reste à prouver que $\sin^2\beta + \sin^2\delta = \sin^2\gamma$, ce qui est vrai vu que $\gamma = \frac{\pi}{2}$ et l'angle au centre $\widehat{BOD}$ vaut lui aussi $\frac{\pi}{2}$, donc $\sin\delta = \sin(\frac{\pi}{2} + \beta) = \cos\beta$.

Solution de l'exercice 11. Cet exercice a été posé à l'Olympiade 2007, et tout le monde ne l'a pas résolu. Or il existe de nombreuses solutions différentes, dont certaines sont théoriquement à la portée d'un élève de quatrième. Nous en mentionnerons quatre, mais en commençant par des préliminaires valables pour trois des quatre démonstrations : les médiatrices des cordes $[AC]$ et $[BC]$ se coupent au centre du cercle, que nous appellerons O. Dans les triangles rectangles CTQ et CSP, $\widehat{CQT} = \frac{\pi}{2} - \widehat{TCQ} = \frac{\pi}{2} - \widehat{PCB} = \widehat{CPS}$, puisque (CR) est bissectrice de $\widehat{ACB}$, donc le triangle OPQ est isocèle. La médiatrice de $[RC]$ passe elle aussi par O, et c'est l'axe de symétrie du triangle isocèle OPQ. Il en résulte notamment que $PC = RQ$ et $QC = RP$.



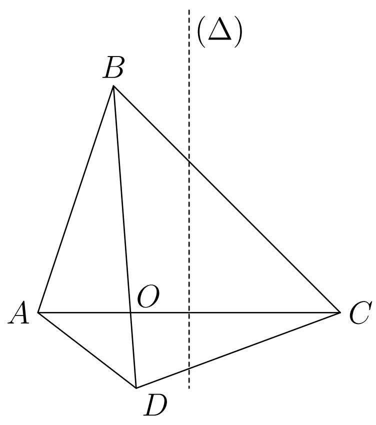
Solution 1. L'aire du triangle RPS vaut $\frac{1}{2}\, RP{\cdot}PS\sin(\widehat{RPS})$, alors l'aire de RQT vaut $\frac{1}{2}\, RQ \cdot QT\sin(\widehat{RQT})$. Or les deux angles sont égaux, et $\frac{PS}{PC} = \sin\widehat{PCS} = \frac{QT}{QC}$, donc $PS{\cdot}QC = PC{\cdot}QT$, d'où le résultat, vu que $RP = QC$ et $RQ = PC$.
Solution 2. Si l'on appelle B' et A' les projections orthogonales de R sur BC et AC respectivement, les triangles rectangles RCB' et RCA' sont isométriques, puisque (RC) est bissectrice, donc $B'C = A'C$. Or on a également $RA' = RB'$, et même $RA = RB$, puisque R est le milieu de l'arc $\widehat{AB}$, et les angles inscrits $\widehat{RBC}$ et $\widehat{RAC}$ sont supplémentaires : les triangles rectangles $RB'B$ et $RA'A$ sont eux aussi isométriques, d'où $AA' = BB'$. Donc $2A'C = 2B'C = AC + BC$. Si l'on pose $a = AC$ et $b = BC$, la hauteur issue de R du triangle RPS est égale à $B'S = \frac{a}{2}$, puisque $CS = \frac{b}{2}$, et la base $PS = \frac{b}{2}tan(\widehat{RCB})$, donc l'aire de RPS vaut $\frac{ab}{8}tan(\frac{\widehat{ACB}}{2})$, et on peut en dire autant de l'aire de RQT. Cette solution n'utilise pas les préliminaires.
Solution 3. L'angle au centre $\widehat{BOR}$ est le double de l'angle inscrit $\widehat{BCR}$, donc $\widehat{BOR} = \widehat{BOR} = \widehat{ROA} = \widehat{BAC} = \widehat{POQ}$, puisque (PO) et (OQ) sont perpendiculaires à (BC) et (AC). Donc la rotation de centre O et d'angle $\widehat{BAC}$ transforme B en R, R en A et P en Q. Les triangles BRP et RAQ sont donc isométriques, et en particulier, ils ont même aire. Or T étant le milieu de AC, d'après le théorème de Thalès la hauteur issue de T du triangle RQT vaut la moitié de la hauteur issue de A du triangle RQA. Ces triangles ayant même base, $\text{Aire}(RQT) = \frac{1}{2}\text{Aire}(RQA) = \frac{1}{2}\text{Aire}(RPB) = \text{Aire}(RPS)$
Solution 4. La symétrie par rapport à la médiatrice commune (Δ) de $[RC]$ et $[PQ]$ transforme T en un point T' appartenant à (OP) tel que $\widehat{T'RC} = \widehat{RCA} = \widehat{BCR}$, d'où l'on déduit que (RT')

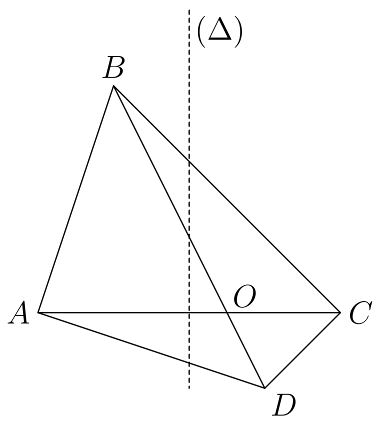
est parallèle à (BC). Les triangles $T'BS$ et RBS ont donc même aire : d'après le théorème du papillon, les triangles $T'PC$ et RPS ont eux aussi même aire, et $T'PC$ est symétrique de TQR par rapport à (Δ), d'où l'égalité cherchée.

Solution de l'exercice 12. Insistons sur le fait que « si » et « seulement si » nécessitent deux démonstrations distinctes, et qu'habituellement l'une d'elles est nettement plus facile que l'autre. En l'occurrence, montrer que les triangles ont même périmètre si le quadrilatère est un losange est immédiat : un losange est un parallélogramme ayant ses quatre côtés égaux, et les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu commun. Si l'on pose $u = OA = OC$, $v = OB = OD$, et $w = AB = BC = CD = DA$, chacun des quatre triangles ont pour périmètre $u + v + w$.

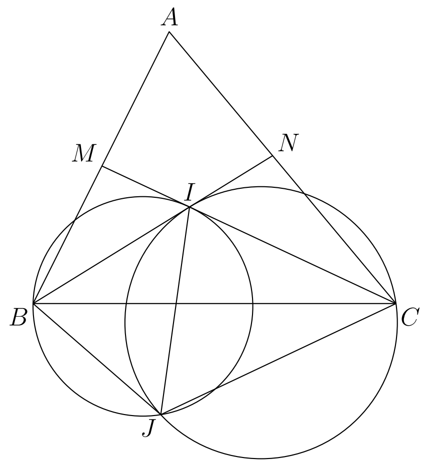
La difficulté est donc de montrer que, réciproquement, les triangles ont même périmètre seulement si le quadrilatère est un losange. Et une approche assez naturelle est le raisonnement par l'absurde. Montrons par exemple que si $AB < BC$, deux des triangles au moins n'ont pas même périmètre. Soit (Δ) la médiatrice de $[AC]$; c'est le lieu des points équidistants de A et C, et elle divise le plan en deux demi-plans : l'un (celui qui contient A) est le lieu des points plus proches de A que de C, l'autre est le lieu des points plus proches de C que de A. L'inégalité $AB < BC$ signifie donc que B et A sont du même côté de (Δ). Si O est lui aussi dans ce même demi-plan, $OA < OC$, donc le périmètre de AOB est strictement inférieur au périmètre de BOC. Si O est dans l'autre demi-plan, comme la droite (BO) ne peut pas couper une deuxième fois (Δ), D est du même côté de (Δ) que O, donc $OA > OC$ et $DA > DC$, ce qui prouve que le périmètre du triangle DAO est strictement supérieur au périmètre du triangle DCO, d'où la contradiction cherchée.

Solution de l'exercice 13. Appelons A, B, C les sommets du triangle ($BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$), et D le point du segment $[AB]$ tel que $AD = b$. La relation $3\alpha + 2\beta = 180°$ entraîne que dans le triangle isocèle ACD, les angles à la base valent chacun $\alpha + \beta$. Mais elle entraîne également que $\gamma = 2\alpha + \beta$ de sorte que l'angle $\widehat{DCB} = \alpha$. Le triangle CBD a donc les mêmes angles que ABC, ces triangles sont semblables et l'on a : $\frac{CB}{AB} = \frac{BD}{BC}$, soit $\frac{a}{c} = \frac{c-b}{a}$, ce qui équivaut bien à $a^2 + bc = c^2$. Un raisonnement analogue pouvait être fait en introduisant le point E de $[AC)$ tel que $AE = c$: les triangles AEB et BEC sont semblables (et isocèles).



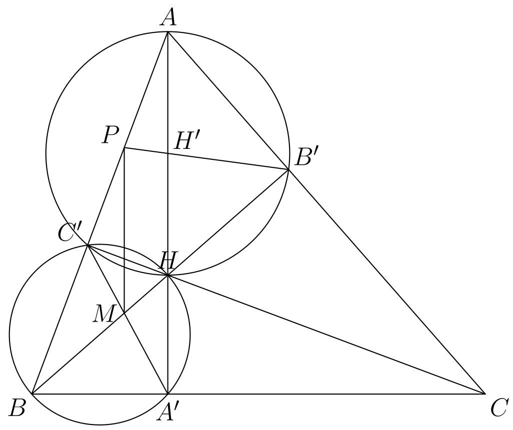


Solution de l'exercice 14.



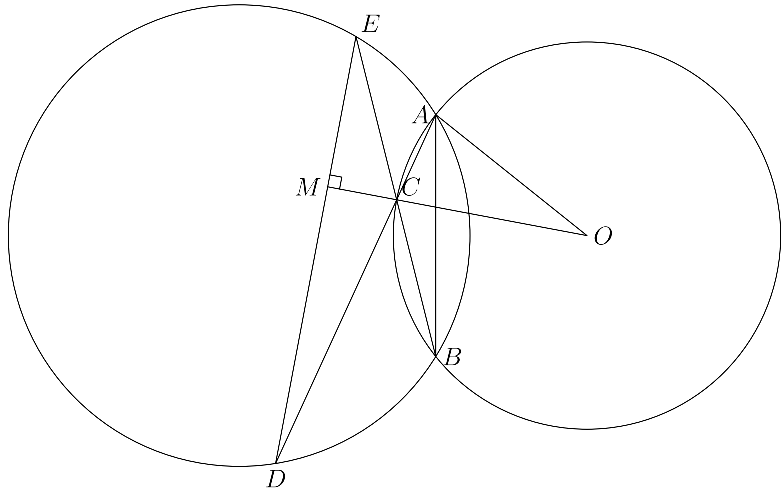
Pour raisonner rigoureusement, indépendamment des cas de figure, il faut utiliser des angles de droites : les quatre points A, B, C, J sont cocycliques si et seulement si $(AB, AC) = (JB, JC)$, l'angle de droite (AB, AC) désignant l'angle (modulo π), orienté, dont il faut faire tourner la droite (AB) pour la rendre parallèle à (AC). Or nous avons deux cercles : dans le premier, passant par B, l'angle formé par (IB) et la tangente (IC), cas limite d'angle inscrit, intercepte l'arc $\widehat{BI}$, tout comme l'angle inscrit (JB, JI). Donc $(IB, IC) = (JB, JI)$. De même dans le second cercle, $(JI, JC) = (IB, IC)$ car c'est (IB) qui est tangente au cercle. Or les angles de droites s'additionnent comme des vecteurs (relation de Chasles), à savoir $(JB, JC) = (JB, JI) + (JI, JC) = 2(IB, IC)$. Or $(IB, IC) = (IB, BC) + (BC, IC) = \frac{(AB,BC)}{2} + \frac{(BC,CA)}{2} = \frac{(AB,CA)}{2}$. Il en résulte que $(JB, JC) = 2(IB, IC) = (AB, AC)$, et cette dernière égalité suffit à prouver que J, A, B, C sont cocycliques.

Solution de l'exercice 15.



Pour partir à la chasse aux angles, on utilise notamment des cercles et des triangles isocèles. Mais la figure manque de cercles, notamment (MP) semble pendu dans le vide, il faudrait trouver un cercle passant par M et P. En revanche, on a un triangle isocèle $H'HB'$, puisque l'angle $\widehat{AB'H}$ étant droit par hypothèse, B' est sur le cercle de diamètre $[AH]$, donc de centre H'. C'est ce que les Allemands appellent le théorème de Thalès. Il en résulte que l'angle de droites $(B'H', B'H) = (B'H, AH)$, or cet angle-ci est connu : $(B'H, AH) = (AC, BC)$ car $(B'H)$ est perpendiculaire à (AC) et (AH) à (BC). L'angle de deux droites est égal à l'angle de leurs perpendiculaires. Ce même angle, que nous appellerons γ, se retrouve en bien des endroits de la figure, notamment $(C'A, C'A') = (CA, CA') = \gamma$ car A' et C', qui voient le segment $[AC]$ sous un angle droit, sont de ce fait sur le cercle de diamètre $[AC]$. On en déduit que $(C'P, C'M) = (B'P, B'M) = \gamma$, ce qui suffit à prouver que M, P, C', B' sont sur un même cercle. Il en résulte que $(MB', MP) = (C'B', C'P) = (C'B', C'B)$ car $(C'P)$ est la même droite que $(C'B)$, et une fois de plus, $(C'B', C'B) = (CB', CB) = \gamma$ car B' et C' sont sur le cercle de diamètre $[BC]$). En fin de compte, $(MB', MP) = \gamma = (B'H, AH)$, or M, B' et H sont sur la même droite : dès lors, (MP) est parallèle à (AH), donc perpendiculaire à (BC), ce qui achève la démonstration.

Solution de l'exercice 16. Problème simple de chasse aux angles : on appelle M l'intersection de (OC) et (ED), et on cherche à prouver que le triangle CMD est rectangle.

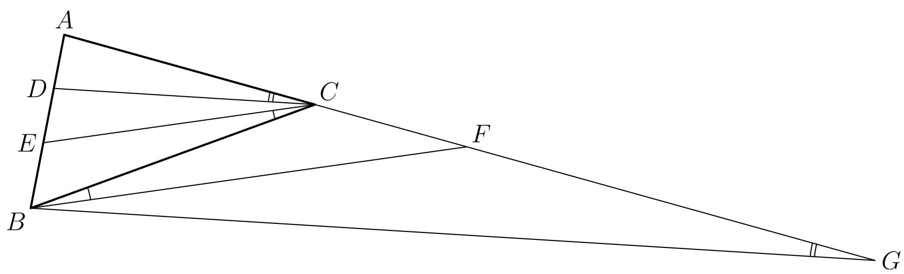


Or deux cercles sont donnés. Dans (Γ'), les angles inscrits $\widehat{EDA}$ et $\widehat{EBA}$ sont égaux, et (Γ), l'angle inscrit $\widehat{CBA}$ vaut la moitié de l'angle au centre $\widehat{COA}$. On a

$$\widehat{DCM} = \widehat{ACO} = \frac{\pi - \widehat{COA}}{2}$$

car c'est un angle à la base du triangle isocèle OAC. Donc $\widehat{MDC} + \widehat{DCM} = \frac{\pi}{2}$, ce qui prouve que le troisième angle du triangle MDC est droit, donc que (DE) est perpendiculaire à (OC).

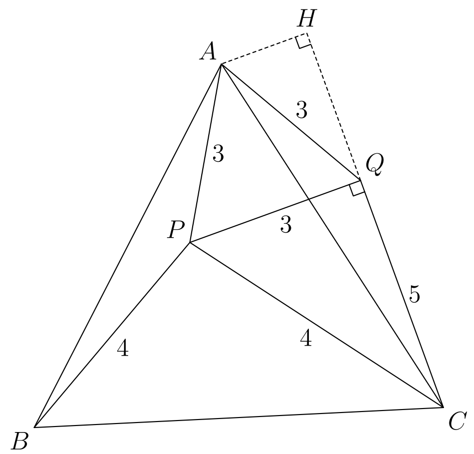
Solution de l'exercice 17. Ce résultat est une généralisation du théorème connu selon lequel le pied de la bissectrice issue de C, que nous appellerons J, vérifie $\frac{AJ}{JB} = \frac{AC}{CB}$. Ce dernier peut se démontrer, entre autres, à l'aide du théorème de Thalès, en traçant la parallèle en B à la bissectrice (CJ), qui coupe en K la droite (AC) et fait apparaître un triangle isocèle BCK. Ici, nous tracerons les parallèles issues de B aux droites (CD) et (CE), qui coupent (CA) en F et G respectivement.



Le parallélisme implique les égalités d'angles $\widehat{ECB} = \widehat{CBF}$ et $\widehat{ACD} = \widehat{CGB}$. Les angles $\widehat{ECB}$ et $\widehat{ACD}$ sont égaux si et seulement si $\widehat{CGB} = \widehat{BCF}$, donc si et seulement si les triangles CGB et BCF (qui ont en outre un angle commun $\widehat{BCF}$) sont semblables. Donc si et seulement si, compte tenu de l'angle commmun, $\frac{BC}{CG} = \frac{CF}{BG}$. Or d'après Thalès, $\frac{CF}{CA} = \frac{EB}{EA}$, d'où $\frac{CF}{BC} = \frac{EB}{AE} \cdot \frac{BC}{CB}$.

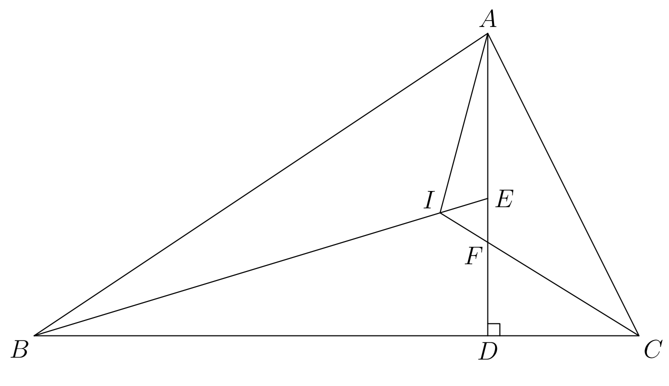
De même, $\frac{AC}{CG} = \frac{AD}{DB}$, d'où : $\frac{BC}{CG} = \frac{CB}{AC} \cdot \frac{AD}{DB}$. Ces deux fractions sont égales si et seulement si $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{AE}{EB} = (\frac{AC}{CB})^2$, ce qui répond bien au problème.

Solution de l'exercice 18. Cet exercice met en oeuvre une technique qu'il faut connaître : utiliser une rotation pour faire apparaître un nouveau point. En effet, on ne peut pas faire grand-chose directement avec ces trois distances, alors que si l'on avait les trois côtés d'un triangle, cela déterminerait le triangle de façon unique. Considérons la rotation de 60° de centre A, qui transforme B en C. Elle transforme P en un point Q, et le triangle APB en un triangle isométrique AQC.



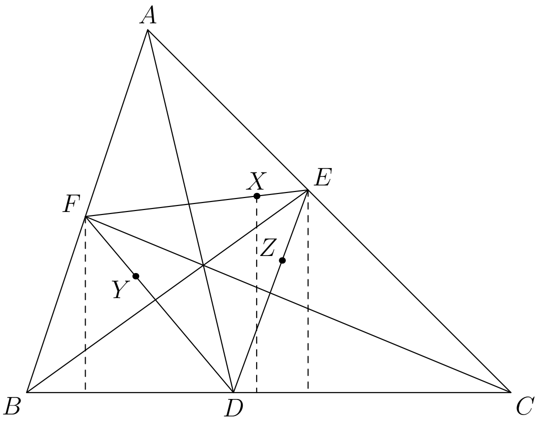
Donc $QA = 3$ et $QC = 4$. Le triangle APQ est isocèle, et $\widehat{PAQ} = \frac{\pi}{3}$, ce qui prouve qu'il est équilatéral. On en déduit que $PQ = 3$. On connaît donc toutes les longueurs des côtés du triangle PQC, on reconnaît d'ailleurs le triangle rectangle de côtés 3, 4, 5. A est sur la médiatrice de $[PQ]$, et la hauteur du triangle équilatéral APQ vaut $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Si la projection orthogonale de A sur QC est H, CH vaut donc $4 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$ et $AH = \frac{3}{2}$. Donc $AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$, ce qui achève la démonstration. Ce résultat n'est pas simplifiable.

Solution de l'exercice 19.



Il est évident, par symétrie, que si le triangle ABC est isocèle en A, $BE = CF$. C'est donc bien dans l'autre sens que le problème se pose, à savoir : $BE = CF \Rightarrow AB = AC$. Supposons $AB > AC$: alors, $\widehat{ABC} < \widehat{ACB}$. Cette relation importante, vraie dans tout triangle, se démontre en traçant un triangle isocèle $A'BC$ de sommet A' appartenant à (AB). Si $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$, A' est à l'extérieur de AB et $AB + A'A = A'B = A'C < A'A + AC$. Pour en revenir à notre problème, appelons I le point d'intersection des bissectrices (BE) et (CF). On a donc, dans les triangles rectangles DAB et DAB, $\widehat{BAD} > \widehat{DAC}$, ce qui signifie que I et B se trouvent du même côté de AD. Donc $DE > DF$, et comme $BD > DC$, $BE > CF$. De même, l'hypothèse $AB < AC$ conduirait à $BE < CF$. Donc l'égalité n'est vérifiée que si le triangle ABC est isocèle en A.

Solution de l'exercice 20.



L'idée essentielle de cet exercice, c'est que sur une droite, la distance d'un point M à une autre droite (Δ), qu'on notera $d(M,\Delta)$ varie linéairement en fonction de la position de M. C'est une conséquence du théorème de Thalès : si P et Q sont d'un même côté de (Δ) et M entre P et Q, en menant par M la parallèle à Δ, $\frac{d(M,\Delta)-d(P,\Delta}{MP} = \frac{d(M,\Delta)-d(Q,\Delta}{MQ}$, soit : $PQ.d(M,\Delta) = MP.d(Q,\Delta) + MQ.d(P,\Delta)$. Or, comme tout point d'une bissectrice, E vérifie : $d(E,BC) = d(E,BA)$. Donc que X soit en E ou en F, on a : $d(X,BC) = d(X,BA) + d(X,CA)$. Si X est sur le segment $[EF]$, qui ne coupe pas (BC), $EF.d(X,BC) = EX.d(F,BC) + FX.d(E,BC) = EX\,(d(F,BA) + d(F,CA)) + FX\,(d(E,BA) + d(E,CA)) = (EX.d(F,BA) + FX.d(E,BA)) + (EX.d(F,CA) + FX.d(E,CA)) = EF.d(M,BA) + EF.d(M,CA)$. En définitive, la relation

$$d(X,BC) = d(X,BA) + d(X,CA)$$

vérifiée par les deux points E et F, d'un même côté de (BC), est vérifiée par tout point X du segment $[EF]$. On a de même :

$$d(Y,CA) = d(Y,AB) + d(Y,BC)$$

$$d(Z,AB) = d(Z,BC) + d(Z,CA)$$

Or $XY \geqslant d(Y,CA) - d(X,CA)$ car $|d(Y,CA) - d(X,CA)|$ est la projection de XY sur la perpendiculaire à CA. Pareillement, $YZ \geqslant d(Z,AB) - d(Y,AB)$ et $ZX \geqslant d(X,BC) - d(Z,BC)$. En additionnant ces trois inégalités et en remplaçant $d(X,BC)$, $d(Y,CA)$ et $d(Z,AB)$ par les valeurs trouvées précédemment, on trouve bien l'inégalité cherchée.

Arithmétique

Solution de l'exercice 21. Le théorème chinois nous assure qu'une solution existe mais sans nous la donner. Mais l'aspect algorithmique de sa preuve par récurrence va nous aider à trouver la solution.

Comme x est congru à 1 modulo 7, on peut écrire $x = 1 + 7n$, mais comme ce nombre est aussi congru à 2 modulo 11, on a $x = 1 + 7n \equiv 2 \pmod{11}$ et comme $7 \times 8 \equiv 1 \pmod{11}$, on a $n \equiv 8 \pmod{11}$. On a ainsi $x \equiv 1 + 7 \times 8 \times (2 - 1) \equiv 57 \pmod{7 \times 11}$.

Maintenant, x doit être congru à 57 modulo 77 et à 3 modulo 13. Comme avant, x peut s'écrire comme $x = 57 + 77k$ et on a nécessairement $x = 57 + 77k \equiv 3 \pmod{13}$. Or on a $77 \times 12 \equiv 1 \pmod{13}$ et donc $k \equiv 12 \times (3 - 57) \equiv 5 \pmod{13}$. Le nombre $x = 57 + 77 \times 12 \times (3 - 57) = -49839$ vérifie donc la condition demandée. On peut aussi prendre 211 car $-49839 \equiv 211 \pmod{7 \times 11 \times 13}$.

Solution de l'exercice 22. Quand on voit le mot carré, on pense à *modulo 4*. On cherche donc à combien N est congru modulo 4. Les deux derniers chiffres nous indiquent que $N \equiv 2 \pmod 4$. Mais comme un carré est toujours congru à 0 ou 1 modulo 4, on sait que N n'est pas un carré. On calcule les congruences des puissances de 10 modulo 7. On en déduit que $N \equiv 2\times 1+4\times 3+2\times 2+1\times 6+4\times 4+2\times 5+6\times 1+5\times 3 \pmod 7$. Or, $2\times 1+4\times 3+2\times 2+1\times 6+4\times 4+2\times 5+6\times 1+5\times 3 = 71 \equiv 1 \pmod 7$. Ainsi, N n'est pas divisible par 7.

Solution de l'exercice 23. Solution laborieuse de Sébastien. On regarde les nombres $3 \times 5^{2n-1}$, 2^{3n-2} et $3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ modulo 17 pour les premiers n.

n	$2^{3n-2} \pmod{17}$	$3 \times 5^{2n-1} \pmod{17}$	$3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} \pmod{17}$
1	2	15	0
2	16	1	0
3	9	8	0
4	4	13	0
5	15	2	0
6	1	16	0
7	8	9	0
8	13	4	0
9	2	15	0

Comme la période des puissances de 25 et 8 est de longueur 9, le résultat est démontré.
Solution brillante de Xavier. Si on pose $m = n - 1$ alors

$$3\times 5^{2n-1}+2^{3n-2} = 3\times 5^{2m+1}+2^{3m+1} \equiv 15\times 25^m+2\times 8^m \equiv 15\times 8^m+2\times 8^m \equiv 17\times 8^m \equiv 0 \pmod{17}.$$

Solution de l'exercice 24. On sait que $n \geqslant p - 1$. On peut donc écrire $n! = m(p-1)$.

Par la suite, on considérera uniquement des congruences modulo p. On a deux cas. Si p divise n, la réponse est 0. On se place dans le cas où n et p sont premiers entre eux. D'après, le petit théorème de Fermat, $n^{p-1} \equiv 1$. On en déduit que $n^{n!} \equiv (n^{p-1})^m \equiv 1^m \equiv 1$.

On ne suppose plus p premier. On commence par étudier la congruence de $k^{n!}$ modulo p pour k un diviseur premier de n. k, étant premier, est premier avec p. Il a donc un ordre o inférieur à p donc à n. On peut donc écrire $n! = mo$. On a $k^{n!} \equiv (k^o)^m \equiv 1^m \equiv 1$. En décomposant n en facteurs premiers, on en déduit que si p et n sont premiers entre eux, $n^{n!} \equiv 1$.

Solution de l'exercice 25. On veut savoir quand 6 divise $2x^2 - 2xy - y^2$. On factorise ceci sous la forme $(x-y)(2x+y)$. Ceci est divisible par 6 si et seulement si l'un des deux l'est ou l'un est divisible par 2 et l'autre par 3.

On n'a qu'un nombre fini de cas à traiter. Par exemple, si 3 divise $2x + y$ et 2 divise $x - y$, on a $2x + y = 3k$ et $x - y = 2l$. Par conséquent, $x = k + 2l/3$ (on soustrait deux fois la seconde relation à la première) et $y = k - 4l/3$ (en substituant). Il est facile de voir qu'en faisant varier k dans $\mathbb{Z}$ et l dans $3\mathbb{Z}$, on obtient exactement les solutions de notre équation.

Solution de l'exercice 26. On voit des carrés dans une équation diophantienne : on pense donc à regarder modulo 4, 8 et 16. Ici, c'est modulo 16 qu'il faut regarder.

On vérifie facilement que les carrés ne peuvent être congrus modulo 16 qu'à 0,1,4 ou 9, les quatrième puissance qu'à 0, 1 ou 9 et les huitièmes puissances qu'à 0 ou 1. En traitant tous les cas, on voit qu'on a toujours une contradiction, prouvant que notre équation ne peut pas avoir de solution.

Solution de l'exercice 27. Dans cette correction, toutes les congruences seront modulo 7. On note $N = 2222$ et $M = 5555$. On veut savoir si $K = N^M + M^N \equiv 0 \pmod 7$. On a $N = 317 \times 7 + 3$, donc $N \equiv 3 \pmod 7$ et $N^M \equiv 3^M \pmod 7$. Or, $3^6 \equiv 3^2 3^2 3^2 \equiv 8$. De même, $M^N \equiv 4^N$ et $4^6 \equiv 1$. Comme $N = 370 \times 6 + 2$, $4^N \equiv 4^2 \equiv 2$. Or $5 + 2 = 7 \equiv 0$. La réponse est donc affirmative.

Solution de l'exercice 28. On commence par alléger l'écriture (réflexe primordial en général) : l'équation s'écrit $1 + 3 \times 2^n = m^2$. L'entier m est impair. On l'écrit donc $2k + 1$. L'équation devient alors

$$1 + 3 \times 2^n = 4k^2 + 4k + 1.$$

On la réécrit ainsi :

$$4k(k + 1) = 3 \times 2^n.$$

Pour $n = 1$ ou 2, la résolution est aisée (nombre fini de cas). Si $n \geqslant 3$, on a $k(k + 1) = 3.2^{n-2}$. J'affirme ceci n'est possible que pour $k = 0$, 1, 2 ou 3. En effet, soit $k \geqslant 4$. On peut supposer k pair : on le note $2k'$. On a $2k'(2k' + 1) = 3.2^m$. Par parit'e, 2k'+1 vaut 1 ou 3, ce qui suffit pour conclure.

Solution de l'exercice 29. On appelle ordre le plus petit nombre n tel que $a^n \equiv 1 \pmod p$. On note d l'ordre de a. D'après le petit théorème de Fermat, on a $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Si d ne divisait pas pas $p - 1$, on aurait que $\textsc{Pgcd}(p - 1, d) < d$. D'après le théorème de Bézout il existerait deux entiers k et n tels que $(p - 1)k + nd = \textsc{Pgcd}(p - 1, d)$. On aurait donc $a^{k(p-1)} \equiv 1 \pmod p$ et $a^{nd} \equiv 1 \pmod p$ par définition de d, d'où $a^{k(p-1)} a^{nd} \equiv a^{\textsc{Pgcd}(p-1,d)} \equiv 1 \pmod p$. Ainsi d ne serait pas l'ordre car $\textsc{Pgcd}(p - 1, d) < d$. Ceci est absurde, et il en résulte que d divise $p - 1$.

Solution de l'exercice 30. Nous allons montrer que le seul triplet solution est $(2, 2, 2)$. On considère l'équation modulo 3, $3^n + 4^m \equiv 0 + 1^m \equiv 1 \pmod 3$ et d'autre part $5^k \equiv (-1)^k \pmod 3$ donc $(-1)^k = 1 \pmod 3$, donc k est pair, on note donc $k = 2r$. On a donc que $3^n = 5^{2r} - 2^{2m} = (5^r - 2^m)(5^r + 2^m)$. Or $(5^r - 2^m) + (5^r + 2^m) = 2 \times 5^r$ n'est pas un multiple de 3, donc $(5^r - 2^m)$ ou $(5^r + 2^m)$ n'est pas un multiple de 3. Donc nécessairement $5^r - 2^m = 1$ et $5^r + 2^m = 3^n$.

On considère à nouveau ces égalités modulo 3. On a donc $(-1)^r - (-1)^m \equiv 1 \pmod 3$ et $(-1)^r + (-1)^m \equiv 0 \pmod 3$. Donc $2(-1)^r \equiv 1 \pmod 3$ et $2(-1)^m \equiv -1 \pmod 3$ donc m est pair et r est impair. Supposons alors $m > 2$ et regardons modulo 8. On a $5^r + 2^m \equiv 5^r \equiv 5 \pmod 8$. Or, $3^n \equiv 1$ ou $3 \pmod 8$ et comme on a $5^r + 2^m = 3^n$ il y a une contradiction. Donc $m = 2$, puis $n = k = 2$.

Solution de l'exercice 31. Le résultat est facile si $p = 2$ (tout nombre est congru à $0 = 0^2 + 0^2$ ou $1 = 1^2 + 0^2$). Supposons maintenant que $p \geqslant 3$.

Soit n un entier. Toutes les congruences considérées sont modulo p. On considère les ensembles $\{n - k^2 + lp; (k, l) \in \mathbb{N}^2\}$ et $\{k^2 + lp; (k, l) \in \mathbb{N}^2\}$. On veut montrer qu'il s'intersectent. Il suffit de prouver qu'ils s'intersectent dans $\{0, \ldots, p - 1\}$. On note les intersections de ces ensembles avec $\{0, \ldots, p - 1\}$ $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

On va montrer que $\mathcal{B}$ a (au moins) $\frac{p+1}{2}$ éléments. Ceci suffit car on peut en déduire que $\mathcal{A}$ a aussi (au moins) $\frac{p+1}{2}$ éléments. L'existence d'un élément commun découle du fait que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont dans $\{0, \ldots, p - 1\}$ qui a p éléments.

Pour prouver ce qu'on veut, il suffit de montrer que si $a^2 \equiv b^2$, $a \not\equiv 0$ et $b \not\equiv 0$, alors $a \equiv b$ ou $a \equiv -b$. On sait que $(b - a)(b + a) \equiv 0$. Supposons $a \not\equiv b$. Alors, $b - a$ est inversible modulo p (il fallait bien que l'hypothèse de primalité serve quelque part). En multipliant notre relation par un inverse de $b - a$, on obtient, $b + a \equiv 0$, c'est-à-dire ce qu'on voulait.

Solution de l'exercice 32. Il suffit de montrer qu'aucun nombre premier n'est premier avec tous les $2^n + 3^n + 6^n - 1$. La conclusion s'ensuivra pour tous les entiers strictement supérieurs à 1. Tout d'abord, 2 n'est pas premier avec $2 + 3 + 6 - 1 = 10$ et 3 n'est pas premier avec $2^2 + 3^3 + 6^2 - 1 =$

3^3+39. Soit p un nombre premier distinct de 2 et 3. Ainsi, p est premier avec 2, 3 et 6, et d'après le petit théorème de Fermat, $6 \times (2^{p-2}+3^{p-2}+6^{p-2}-1) = 3 \times 2^{p-1} + 2 \times 3^{p-1} + 6^{p-1} - 6 \equiv 3 \times 1 + 2 \times 1 + 1 - 6 \equiv 0 \pmod p$. En utilisant à nouveau le fait que p est premier avec 6, on en déduit que p divise $2^{p-2}+3^{p-2}+6^{p-2}-1$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 33. Soient u et v des entiers tels que $15a+16b = u^2$ et $16a-15b = v^2$. On a alors $15u^2+16v^2 = (16^2+15^2)a$ et $16u^2-15v^2 = (16^2+15^2)b$. On calcule $16^2+15^2 = 481 = 13 \times 37$, donc en particulier, $15u^2+16v^2 \equiv 0 \pmod{13}$ et $15u^2-16v^2 \equiv 0 \pmod{13}$. On étudie à présent les congruences de u^2 et v^2 modulo 13. Les carrés modulo 13 sont 0, ± 1, ± 3 et ± 4, donc $15v^2 \equiv 0, \pm 2, \pm 5$ ou ± 6, et $16u^2 \equiv 0, \pm 1, \pm 3$ ou ± 4. On en déduit qu'on ne peut avoir $16u^2 \equiv 15v^2 \pmod{13}$ que si $u \equiv v \equiv 0 \pmod{13}$. Ainsi, $13|u$ et $13|v$. On peut montrer de même que $37|u$ et $37|v$, donc $481|u$ et $481|v$.

Par ailleurs, si $a = 481 \times 31$ et $b = 481$, on a $15a+16b = 481 \times (15 \times 31 + 16) = 481^2$ et $16a - 15b = 481 \times (16 \times 31 - 15) = 481^2$. De ces deux considérations, on déduit que le couple $(u,v) = (481, 481)$ convient et est minimal, et donc le minimum cherché est 481^2.

Solution de l'exercice 34. Le fait que les trois derniers chiffres de 1978^n et 1978^m soient les mêmes en base 10 s'exprime par la congruence $1978^n \equiv 1978^m \pmod{1000}$, ce qui, d'après le théorème chinois, est équivalent au système

$$\begin{cases} 1978^n \equiv 1978^m \pmod{2^3} \\ 1978^n \equiv 1978^m \pmod{5^3} \end{cases} \iff \begin{cases} 2^n \equiv 2^m \pmod{2^3} \\ 103^n \equiv 103^m \pmod{5^3} \end{cases}.$$

La première équation de ce dernier système est vérifiée si et seulement si $n > m \geqslant 3$. En outre, 103 et $5^3 = 125$ sont premiers entre eux, donc la deuxième équation est équivalente à $103^{n-m} \equiv 1 \pmod{125}$ d'après le théorème de Gauss. Soit δ l'ordre de 103 modulo 125. D'après le théorème d'Euler, δ divise $\varphi(125)$. Les entiers premiers avec $125 = 5^3$ sont ceux qui ne sont pas divisibles par 5, il y en a donc $125 - \frac{125}{5} = 100$. Par conséquent, δ divise 100.

Supposons que $\delta \neq 100$. Alors, on aurait $103^{100/2} \equiv 1 \pmod{125}$ ou $103^{100/5} \equiv 1 \pmod{125}$. Mais $103^{50} \equiv 3^{50} \equiv (-1)^{25} \equiv -1 \pmod 5$ donc $103^{50} \not\equiv 1 \pmod{125}$, et $103^{20} \equiv (103^4)^5 \equiv 6^5 \equiv 26 \not\equiv 1 \pmod{125}$.

L'ordre de 103 modulo 125 est donc 100, et on en déduit que $n - m \geqslant 100$. Comme de plus, $n > m \geqslant 3$, la valeur minimale de $n+m$ est obtenue pour $m = 3$ et $n = 103$.

Solution de l'exercice 35. Pour tout entier k, d'après le binôme de Newton, on a $(n-k)^n \equiv (-1)^n k^n = -k^n \pmod n$ pour n impair. Donc,

$$\begin{aligned} 1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n &= (1^n + (n-1)^n) + (2^n + (n-2)^n) + \\ &+ \ldots + (\left(\frac{n-1}{2}\right)^n + \left(\frac{n+1}{2}\right)^n) \equiv 0 \pmod n. \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 36. Pour tout entier positif n on désigne par $s(n)$ la somme de ses chiffres et par $t(n)$ le nombre de ses chiffres. Évidemment l'inégalité $s(n) \leqslant 9 \cdot t(n)$ est toujours satisfaite et l'égalité est atteinte si et seulement si $n = 99\ldots9$. De plus, on a la congruence suivante :

$$s(n) \equiv n \pmod 9. \tag{IV.1}$$

En effet, soit $n = \overline{a_k \ldots a_1 a_0} = a_k 10^k + \ldots + a_1 10^1 + a_0$. Puisque $10^i = (9+1)^i \equiv 1 \pmod 9$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, on obtient $n \equiv a_k + \ldots + a_1 + a_0 = s(n) \pmod 9$. Dans notre cas on a $4444^{4444} < (10^4)^{4444} < (10^4)^{5000} = 10^{20000}$, d'où $t(4444^{4444}) \leqslant 20001$. D'après l'inégalité ci-dessus, $A = s(4444^{4444}) \leqslant 9 \cdot t(n) \leqslant 180009$, en particulier $t(A) \leqslant 6$ et, donc, $B = s(A) \leqslant 9 \cdot t(A) \leqslant 54$.

Soit $B = \overline{a_1a_0}$, alors $a_1 \leqslant 5$ et $a_0 \leqslant 9$, d'où on obtient $t(B) = a_1 + a_0 \leqslant 14$. Appliquons maintenant (IV.1) :

$$s(B) \equiv B = s(A) \equiv A = s(4444^{4444}) \equiv 4444^{4444} = (4437+7)^{4444} \equiv 7^{4444} \pmod 9.$$

Les puissances de 7 donnent les restes modulo 9 suivants : $7^0 = 1$, $7^1 = 7$, $7^2 \equiv 4$, $7^3 \equiv 1$, $7^4 \equiv 7$, $7^5 \equiv 4$, *etc.* Donc, $7^{4444} = 7^{3\cdot 1481+1} \equiv 7 \pmod 9$. Finalement, $s(B) \equiv 7 \pmod 9$ et puisque $s(B) < 15$, on obtient $s(B) = 7$.

Solution de l'exercice 37. Un carré est congru à 0 ou 1 modulo 3. On peut alors prouver par récurrence que $a_n \equiv 2 \pmod 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque $2 \cdot 2 \equiv 1 \pmod 3$, la réponse de l'exercice est négative.

Solution de l'exercice 38. Supposons le contraire, c'est-à-dire que $m^2 + n^2$ est divisible par un nombre de type $4k+3$. Vu que le produit de deux premiers de type $4k+1$ est de type $4k+1$, on conclut que m^2+n^2 est divisible par un premier $p = 4k+3$ où $k \in \mathbb{N}$. Alors $m^2 \equiv -n^2 \pmod p$ et comme $\frac{p-1}{2} = 2k+1$ est impair, on obtient $m^{p-1} \equiv -n^{p-1} \pmod p$. Or, les nombres m et n étant premiers avec p (car ils sont premiers entre eux et p divise m^2+n^2), d'après le petit théorème de Fermat on a

$$m^{p-1} \equiv n^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

Donc, $n^{p-1} \equiv -n^{p-1} \pmod p$, d'où p divise $2n^{p-1}$, ce qui n'est pas possible et donne la contradiction attendue.

Solution de l'exercice 39. Supposons que (x, y) soit une solution de $x^2 = y^3 + 7$. Si y est pair, alors x^2 est congru à $7 \equiv 3$ modulo 4, ce qui n'est pas possible, car x^2 est un carré. Donc, y est impair, $y = 2n+1$. Dans ce cas on a

$$x^2 + 1 = y^3 + 8 = (y+2)(y^2 - 2y + 4) = (y+2)((y-1)^2 + 3) = (y+2)(4n^2+3)$$

c'est-à-dire $x^2 + 1^2$ est divisible par un nombre de type $4k+3$. Cela contredit l'exercice précédant.

Solution de l'exercice 40. D'après le binôme de Newton, on voit bien que pour tout entier $n > 0$ le nombre

$$(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = 2 \cdot (2^n + C_n^2 \cdot 2^{n-2}3 + C_n^4 \cdot 2^{n-4}3^2 + \ldots)$$

est un entier, qui est, de plus, pair. Puisque $0 < (2-\sqrt{3})^n < 1$ pour tout $n > 0$, on a

$$\left[(2+\sqrt{3})^n\right] = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n - 1$$

ce qui montre que $(2+\sqrt{3})^n$ est impair.

Solution de l'exercice 41. Soient $p_1, p_2, \ldots, p_{2n}$ des nombres premiers distincts. D'après le lemme chinois il existe un entier N tel que

$$\begin{array}{rcl} N & \equiv & 0 \pmod{p_1p_2} \\ N & \equiv & -1 \pmod{p_2p_4} \\ & \cdots & \\ N & \equiv & -n+1 \pmod{p_{2n-1}p_{2n}}. \end{array}$$

Alors pour tout $0 \leqslant k < n$ le nombre $N + k$ est divisible par $p_{2k+1}p_{2k+2}$. Donc, la suite $N, N+1, \ldots, N+n-1$ est voulue.

Solution de l'exercice 42. On note $a_1, a_2, \dots, a_{2008}$ les nombres. On considère alors les sommes $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$ jusqu'à $S_{2008} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2008}$. Si l'une de ces sommes est divisible par 2008, on a fini. Sinon ces sommes ont au plus 2007 restes possibles par division euclidienne par 2008, et il existe S_i et S_j différents (on suppose par exemple $i < j$), tels que $S_i \equiv S_j \pmod{2008}$. On a donc $S_j - S_i = s_{i+1} + \cdots + s_j \equiv 0 \pmod{2008}$ puis le résultat souhaité.

Solution de l'exercice 43. D'après la formule du binôme de Newton :

$$11^{100} = (10+1)^{100} = \sum_{i=0}^{100} \binom{100}{i} 10^i = 1 + 10\binom{100}{1} + 100\binom{100}{2} + \sum_{i=3}^{100} \binom{100}{i} 10^i.$$

Or $\binom{100}{1} = 100$ et $\binom{100}{2} = \frac{100.99}{2} = 4950$. D'où :

$$11^{100} - 1 = 10 \times 100 + 100 \times 4950 + \sum_{i=3}^{100} \binom{100}{i} 10^i = 1000 \left(1 + 495 + \sum_{i=3}^{100} \binom{100}{i} 10^{i-3}\right)$$

et $11^{100} - 1$ est divisible par 1000.

Solution de l'exercice 44. Dans les jours de l'année les 13 de chaque mois occupent les rangs : 13, 44, 72, 103, 133, 164, 194, 225, 256, 286, 317, 347. Pour savoir à quel jour de la semaine chaque jour correspond il suffit alors de passer ces valeurs modulo 7 : on obtient 6, 2, 2, 5, 0, 3, 5, 1, 4, 6, 2, 4. Si le jour 1 de l'année (le 1er janvier) est un vendredi alors il n'y aura qu'un vendredi 13 en août. Si le jour 4 est un vendredi il y aura 2 vendredi 13, en septembre et en décembre, si le jour 2 est un vendredis alors il y aura 3 vendredi 13. D'autre part, on remarque qu'il est impossible qu'il n'y ait pas de vendredi 13 ou qu'il y en ait plus de 3.

Solution de l'exercice 45. Supposons que a, b, c, d, e soient des entiers strictement positifs consécutifs tels que $abcde$ soit le carré d'un entier. Si un des nombres contient un facteur premier supérieur à 5, alors, nécessairement ce facteur doit avoir un exposant pair, car il n'apparaît que dans un seul des nombres du produit. Ainsi selon la puissance des facteurs 2 et 3 dans chaque nombre, chacun des nombres a, b, c, d, e est :

☞ un carré parfait ou,

☞ deux fois un carré parfait ou,

☞ trois fois un carré parfait ou,

☞ six fois un carré parfait.

D'après le principe des tiroirs, il existe au moins deux nombres dans la même catégorie. Si les deux nombres sont tous les deux dans le deuxième, le troisième ou le quatrième cas, alors leur différence est au moins 6, ce qui est impossible car a, b, c, d, e sont des entiers consécutifs. Si les deux nombres sont dans le premier cas, alors il sont tous les deux des carrés parfaits. Il est donc impossible que e dépasse 5 car les seuls carrés qui sont à une distance inférieure à 5 sont 1 et 4, or $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ et 120 n'est pas un carré. Il est donc impossible que le produit de 5 nombres consécutifs strictements positifs soit un carré parfait.

Remarque. Paul Erdös a montré que le produit de $k > 1$ nombres consécutifs n'est jamais un carré.

Solution de l'exercice 46.

Nous allons essayer de restreindre le plus possible l'ensemble des solutions. Supposons que (x, y, z) soit une solution de l'équation. Comme on a supposé que y et $z \geqslant 0$ on a nécessairement $x > 0$. De plus si $x = 1$ il faudrait que l'on ait $28 = 19^y + 87^z$ donc nécessairement $z =$

0 et il est impossible de trouver y pour satisfaire l'égalité, donc $x \geqslant 2$. Comme $x \geqslant 2$ on a $19^y + 87^z = 28^x \equiv 0 \pmod{16}$, or on a $87^z \equiv 7^z \equiv 7$ ou $1 \pmod{16}$ selon la parité de z, et de plus $19^y \equiv 3^y \equiv 1, 3, 9$ ou $11 \pmod{16}$ pour respectivement $y \equiv 0, 1, 2$ ou $3 \pmod 4$. Ainsi la seule possibilité est que z soit impair et $y \equiv 2 \pmod 4$. Regardons maintenant modulo 9, l'équation devient : $1^x \equiv 1^y + 6^z \pmod 9$, donc z ne peut pas être égal à 0 ou à 1. Et comme z est impair on a $z \geqslant 3$. Comme $z \geqslant 3$ alors 87^z est divisible par $3^3 = 27$. Donc modulo 27, l'équation devient $1 \equiv 19^y \pmod{27}$, or on a $19^2 \equiv 10 \pmod{27}$ et $19^3 \equiv 1 \pmod{27}$. Donc, y est un multiple de 3 et comme $y \equiv 2 \pmod 4$, on a même $y \equiv 6 \pmod{12}$. Modulo 7 l'équation devient $0 \equiv 5^y + 3^z \pmod 7$, comme y est multiple de 6 et $5^6 \equiv 1 \pmod 7$, on a donc $3^z \equiv -1 \pmod 7$, ce qui impose que $z \equiv 3 \pmod 6$. Enfin, regardons modulo 13, l'équation devient $2^x \equiv 6^y + 9^z \pmod{13}$. Comme y vérifie $y \equiv 6 \pmod{12}$ on a $6^y \equiv -1 \pmod{13}$. De plus, on sait que z est un multiple de 3, on a donc $9^z \equiv 1 \pmod{13}$. L'équation devient $2^x \equiv 0 \pmod{13}$, ce qui est impossible.

Il n'y a donc pas de solution entière à cette équation.

Solution de l'exercice 47. La clef de cette solution est le principe des tiroirs (si vous n'y aviez pas pensé ne lisez pas la suite et réfléchissez encore un peu). Considérons les nombres $a_1 = 1$, $a_2 = 11$, $a_3 = 111$, $a_4 = 1\,111$, et ainsi de suite jusqu'à a_{2010} (qui contient 2010 fois le nombre 1). D'après le principe des tiroirs, deux de ces nombres ont le même reste par une division par 2009. Disons alors que a_p et a_q sont ces deux nombres (avec $p > q$). On a donc $a_p \equiv a_q \pmod{2009}$ d'où $a_p - a_q = 111\ldots11100\ldots00 \equiv 0 \pmod{2009}$. Or $a_p - a_q = 111\ldots11100\ldots00 = a_{p-q}10^q$. Or comme 2009 est premier avec 10 (et donc 10^q) et comme 2009 divise $a_{p-q}10^q$, il divise aussi, d'après le lemme de Gauss, a_{p-q}.

Solution de l'exercice 48. Notons d le PGCD recherché. Pour qu'un nombre premier p divise $a^{37} - a$ il faut que l'on ait $a^{37} - a \equiv 0(\text{mod p})$, autrement dit $a^{37} \equiv a(\text{mod p})$. Si a n'est pas un multiple de p on a donc $a^{36} \equiv 1(\text{mod p})$ (car a possède un inverse modulo p puisque p est premier). Pour que p soit facteur de d, il faut (et il suffit) que pour tout a non multiple de p on ait $a^{36} \equiv 1(\text{mod p})$ et donc que $\varphi(p)$ divise 36. Comme p est premier, on a $\varphi(p) = p - 1$. Cherchons les nombres premiers p tels que $p - 1$ divise 36, il n'y a que 2, 3, 5, 6, 13, 19 et 37. Ainsi les seuls facteurs (qui apparaissent avec un degré d'au moins 1) de d sont 2, 3, 5, 7, 13, 19 et 37.

D'autre part, montrons que pour tout p premier il est impossible que p^2 divise d. En effet, puisque p^2 ne divise pas $p^{37} - p = p(p^{36} - 1)$, p^2 ne peut pas diviser d. Donc, puisque l'on connaît les facteurs et que l'on sait qu'ils ne peuvent pas apparaître avec un degré 2, on a $d = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 \times 19 \times 37 = 1645020$.

Solution de l'exercice 49. On prend $n_i = 3^{i-1}$. Pour un nombre k tel que $0 \leqslant k \leqslant 3^8 - 1 = 6560$, la décomposition de k en base 3 nous donne l'existence de $\beta_1, \ldots, \beta_8 \in \{0, 1, 2\}$ tels que $k = \beta_1 n_1 + \cdots + \beta_8 n_8$. Si on soustrait à cette décomposition $3^0 + 3^1 + \cdots + 3^7 = 3280$ on a $k - 3280 = (\beta_1 - 1)n_1 + \cdots + (\beta_8 - 1)n_8$ et bien entendu $(\beta_1 - 1), \ldots, (\beta_8 - 1) \in \{-1, 0, 1\}$. Donc pour $i = k - 3280$ tels que $-3280 \leqslant i = k - 3280 \leqslant 3280$, il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_8 \in \{-1, 0, 1\}$ tels que $i = n_1\alpha_1 + \cdots + n_8\alpha_8$.

Solution de l'exercice 50. Soit (x, y) une solution. Si $x = 0$ alors $-y^3 = 8$ et donc $y = -2$. Si $y = 0$ alors $x^3 = 8$ et donc $x = 2$. Distinguons cinq cas :

- ☞ Si $x = 0$ alors $-y^3 = 8$ et donc $y = -2$.
- ☞ Si $y = 0$ alors $x^3 = 8$ et donc $x = 2$.
- ☞ Si $x > 0$ et $y < 0$, on a $x^3 < 8$ car $x^3 = y^3 + 2xy + 8$, donc $x = 1$ donc $y^3 + 2y + 7 = 0$ mais cette équation n'a pas de solution entière, et donc ce cas est impossible.
- ☞ Si $x < 0$ et $y > 0$ alors on a $y^3 - x^3 = -2xy - 8 < -2xy$ et $y^3 - x^3 = y^3 + (-x)^3 > y^2 + (-x)^2 \geqslant -2xy$ ce qui est impossible.

☞ Si $xy > 0$, alors $x^3 - y^3 = 2xy + 8 > 0$, donc $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2) > 0$ et ceci implique que $x - y > 0$. On distingue alors encore deux cas :
– Si $x - y = 1$ alors

$$2xy + 8 = (x-y)(x^2+xy+y^2) = x^2+xy+y^2 = (x-y)^2 + 3xy = 1 + 3xy$$

et comme $x = y + 1$, on trouve $2(y+1)y + 8 = 1 + 3(y+1)y$ puis donc $y^2 + y - 7 = 0$. Cette dernière équation n'a pas de solution entière.
– Si $x - y \geqslant 2$ alors

$$2xy+8 = x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2) = (x-y)((x-y)^2+3xy) \geqslant 2(4+3xy) = 8+6xy.$$

On a donc que $2xy + 8 \geqslant 8 + 6xy$ et donc $xy \leqslant 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

Les seules solutions sont donc $(0, -2)$ et $(2, 0)$.

Solution de l'exercice 51. On suppose que (n, k) est une solution. Par symétrie on peut supposer $n \geqslant k$. Si $n > k$, alors on a $n^n > k^k$ mais n^n a k chiffres et donc strictement moins de chiffres que k^k, ce qui est absurde. De même $n < k$ est absurde et donc $k = n$. Il faut donc trouver les nombres n tels que n^n s'écrive avec n chiffres. Si $n \geqslant 10$ on a $n^n \geqslant 10^n$ et comme 10^n s'écrit avec $n+1$ chiffres alors n^n ne peut pas s'écrire avec n chiffres. Donc $n < 10$. On essaie alors les différentes valeurs entre 1 et 9 et on trouve que les seules solutions sont $(1, 1)$, $(8, 8)$ et $(9, 9)$.

Solution de l'exercice 52. On écrit $A = 100a + 10b + c$. Les nombres correspondants à une permutation des chiffres de A sont donc $100a+10b+c$, $100a+10c+b$, $100b+10a+c$, $100b+10c+a$, $100c+10a+b$ et $100c+10b+a$. La moyenne de ces chiffres est $\frac{1}{6}(222a+222b+222c) = 37(a+b+c)$. Pour que le nombre soit égal à la moyenne des nombres obtenus par permutation des chiffres, il faut (et suffit) donc que $37(a+b+c) = 100a+10b+c$, c'est-à-dire $63a = 27b + 36c$ ou encore $7a = 3b + 4c$ en divisant par 9. De plus on a $a \in \{1, 2, ..., 9\}$ et $b, c \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$.

☞ Si $b = 0$ on a $7a = 4c$ et donc la seule solution est $a = 4$, $c = 7$;

☞ Si $b = 1$ on a $7a = 3 + 4c$ et les deux seules solutions sont alors $a = c = 1$ et $a = 5$, $c = 8$;

☞ *etc* pour b allant jusque 9.

Au final, les solutions sont 111, 222, 333, 370, 407, 444, 481, 518, 555, 592, 629, 666, 777, 888 et 999.

Solution de l'exercice 53. La solution la plus simple, à laquelle l'auteur du problème n'avait pas pensé, consiste à choisir pour n un carré parfait. A vrai dire, il suffit que n soit une somme de deux carrés, car le produit de deux sommes de deux carrés est une somme de deux carrés. En utilisant les entiers de Gauss, nombres complexes de la forme $a + bi$ avec a et b entiers, $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (a+bi)(a-bi)(c+di)(c-di) = [(a+bi)(c+di)][(a-bi)(c-di)] = [(ac-bd)+(ad+bc)i][(ac-bd)-(ad+bc)i] = (ac-bd)^2+(ad+bc)^2$, et en regroupant différemment les termes du produit, c'est aussi égal à $(ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$.

Solution de l'exercice 54. On sait exprimer ainsi les suites récurrentes de ce type dans l'ensemble des réels : on cherche deux suites géométriques vérifiant la relation de récurrence, en l'occurrence $\left(1+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n$ et $\left(1-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n$ et toute autre suite vérifiant cette relation de récurrence s'exprime comme combinaison linéaire de ces deux suites géométriques, avec des coefficients adaptés aux deux premières valeurs. Il en va de même dans le corps $\mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$ des classes d'entiers modulo 19. Calculer $\sqrt{5}$ dans cet ensemble, c'est chercher des n tels que $n^2 \equiv 5 \pmod{19}$, en l'occurrence $n = 9$ et $n = -9 \equiv 10 \pmod{19}$. Comme dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ peut s'écrire $(2x-1)^2 = 5$, soit : $x = \frac{1+9}{2} = 5$ ou $x = \frac{1-9}{2} = -4 = 15 \pmod{19}$. On a bien : $5^2 \equiv 5 + 1 \pmod{19}$, ce qui prouve que si $u_n \equiv 5^n$ et $u_{n-1} \equiv 5^{n-1}$, $u_{n+1} \equiv 5^{n+1}$, et de même pour 15. La suite de Fibonacci peut donc s'écrire $F_n = c \cdot 15^n + d \cdot 5^n$, $F_0 = 0$ entraîne $d = -c$, et $F_1 = 1$ entraîne $c = 2$, car dans $\mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$, $2 \times 10 = 1$.

Solution de l'exercice 55. Cette relation sert notamment pour $k = 2$, et l'exercice force à manipuler des parties entières. Le calcul explicite n'est pas difficile, mais nous utiliserons une démonstration inhabituelle et intéressante : par récurrence. En principe, on ne peut pas utiliser de récurrence lorsqu'on travaille sur des nombres réels, mais là, exceptionnellement, nous ferons une récurrence sur $|[kx]|$. En d'autres termes, nous supposerons que le résultat est vrai pour $-n \leqslant [kx] \leqslant n$, et nous démontrerons qu'il reste vrai pour $-(n+1) \leqslant [kx] \leqslant n+1$. Initialisons la récurrence : $[kx] = 0$ si et seulement si $0 \leqslant x < \frac{1}{k}$. Ceci entraîne bien que tous le $x + \frac{i}{k}$ sont nuls. Si maintenant l'hypothèse est vraie pour n, choisissons x tel que $[kx] = n+1$, et posons $y = x - \frac{1}{k}$; y vérifiant l'hypothèse de récurrence, on a $\left(x - \frac{1}{k})\right) + x + \cdots + \left(x + \frac{k-2}{k})\right) = [kx - 1]$. Or $\left(x + \frac{k-1}{k})\right) = \left(x - \frac{1}{k})\right) + 1$, d'où le résultat. Même calcul pour $[kx] = -(n+1)$, mais il est nécessaire de faire les deux du fait qu'on ne travaille pas seulement sur des nombres positifs, mais aussi sur les nombres négatifs.

Solution de l'exercice 56. C'est un exercice difficile de liste courte d'Olympiade. Il nécessite de voir d'une part que si $d = \text{PGCD}(m,n)$, $\text{PGCD}((b^m-1),(b^n-1)) = b^d - 1$. Ce résultat classique se démontre à partir du théorème de Bézout : il existe u et v tels que $um - vn = d$. Or $b^n - 1$ divise $b^{vn} - 1$, donc $b^{vn+d} - b^d$, et $b^m - 1$ divise $b^u m - 1$. Donc tout diviseur commun de $b^n - 1$ et $b^m - 1$ divise la différence $b^d - 1$, et ce dernier est lui-même un diviseur commun : c'est donc bien le plus grand.

La seconde remarque, c'est que si $m = kd$, $b^{kd} - 1 = (b^d - 1)(b^{(k-1)d} + b^{(k-2)d} + \cdots + b^d + 1)$. Si un nombre premier p divise ce second terme, il divise $b^m - 1$, donc par hypothèse $b^n - 1$, donc le PGCD, qui est $b^d - 1$. Comme $b^d \equiv 1 \pmod p$, $b^{(k-1)d} + b^{(k-2)d} + \cdots + b^d + 1 \equiv k \mod p$, ce qui prouve que p divise k. Mais quel est l'exposant de p dans la décomposition en facteurs premiers de k ? Au moins égal à l'exposant de p dans la décomposition en facteurs premiers de $S = b^{(k-1)d} + b^{(k-2)d} + \cdots + b^d + 1$. C'est précisément là le point délicat de la démonstration, et je n'ai pas eu le temps de le résoudre proprement dans le présent poly, ce qui laisse cette démonstration inachevée. Si l'on prouve que pour k impair, l'exposant de p ne peut pas être supérieur dans S que dans k, alors les facteurs premiers de S ne peuvent pas tous être facteurs premiers de k, vu que $S > k$, ce qui contredit l'hypothèse. Seul reste le cas où k est pair : S est alors divisible par $b^d + 1$, et tout facteur premier de $b^d + 1$ doit être facteur premier de $b^d - 1$, donc $b_d + 1$ doit être une puissance de 2. En outre, on a nécessairement $d = n$, car $\frac{n}{d}$ est premier avec k (donc impair), donc le raisonnement ci-dessus prouve que $\frac{b^n-1}{b^d-1}$ a des diviseurs qui ne divisent pas $\frac{n}{d}$, donc qui ne divisent pas $b^m - 1$, à moins bien évidemment que $n = d$.

Solution de l'exercice 57.
a) L'idée essentielle, c'est que si (x,y,z) est solution de l'équation, alors $((zx-y),x,z)$ est également solution, ce qui se vérifie aisément par le calcul. Or $zx - y > 0$, vu que l'équation peut s'écrire : $x^2 + 1 = (zx-y)y$. Si $x < y$, $(zx-y)x < (zx-y)y = x^2+1$, donc $(zx-y)x \leqslant x^2 < xy$, et l'on construit ainsi une suite de solutions (x_k, y_k) telle que le produit $x_k y_k$ décroisse jusqu'à ce que $x_n = y_n$. Or pour avoir $x = y$, il faut que $2x^2 + 1 = zx^2$, soit $(z-2)x^2 = 1$, ce qui n'est possible que pour $z = 3$. Pour toute autre valeur de z, les produits $x_k y_k$ de la suite ainsi construite devraient décroître indéfiniment, ce qui n'est pas possible car il s'agit d'entiers positifs, d'où (technique de la descente infinie) il n'existe pas de solution.
b) Pour $z = 3$, la suite se stabilise en $x = y = 1$, et on vérifie bien que $(1,1,3)$ est solution. Mais il existe une infinité d'autres solutions : si $(x_n, x_{n-1}, 3)$ est solution, la relation de récurrence $x_{n+1} = 3x_n - x_{n-1}$ définit une nouvelle solution $(x_{n+1}, x_n, 3)$. La suite (x_n) ainsi définie contient un terme sur deux de la suite de Fibonacci, et on vérifie aisément que l'on obtient ainsi toutes les solutions (du fait qu'à partir d'une solution quelconque, ce même algorithme nous conduit

obligatoirement à la solution $(1, 1, 3)$, et que le même algorithme permet de remonter les solutions à l'envers).

Solution de l'exercice 58. Un calcul élémentaire nous fait trouver une solution générale : $a > 0, b = 1 - a$ ou inversement, une solution triviale : $a = 0, b = k^2$ ou inversement, plus quelques solutions particulières : $a = b = -4$, $a = -6, b = -5$ ou inversement.

Solution de l'exercice 59. Pour $n = 2$, $A_2 = \{1, 4\}$ et $B_2 = \{2, 3\}$. Puis, à partir de A_n et B_n on construit A_{n+1} en y incluant tous les éléments de A_n et tous les $2^n + b_i$ pour b_i appartenant à B_n, et B_{n+1} en y incluant tous les éléments de B_n et tous les $2^n + a_j$ pour a_j appartenant à A_n. Les propriétés demandées se prouvent aisément par récurrence sur n.

Solution de l'exercice 60. En réalité, le membre de droite de l'égalité est rapidement plus petit que celui de gauche, et c'est ainsi que nous allons résoudre l'équation diophantienne. Plus précisément, on remarque, simplement en développant le membre de droite par la formule de binôme de Newton, que

$$(n+1)k^n < \left(k + \frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(k + \frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

Ainsi en faisant la somme, on obtient

$$(n+1)\sum_{k=3}^{n+2} k^n < \left(n + \frac{5}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} < \left(n + \frac{5}{2}\right)^{n+1}$$

Après quelques calculs, on obtient

$$\begin{aligned} (n+3)^{-n}\sum_{k=3}^{n+2} k^n &< \frac{2n+5}{2n+2}\left(1 + \frac{1}{2n+5}\right)^{-n} \\ &\leqslant \frac{2n+5}{2n+2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{n}{2n+5}} = \frac{(2n+5)^2}{(3n+5)(2n+2)}. \end{aligned}$$

Pour $n > 4$, on se rend compte que le dernier quotient est strictement supérieur à 1 et donc que l'égalité de l'énoncé ne peut être satisfaite. Il reste à tester les petites valeurs : on trouve comme ceci les seules solutions qui sont $n = 2$ et $n = 3$.

Combinatoire – Algèbre

Solution de l'exercice 61. Le problème peut être résolu de plusieurs manières.

On peut simplement se contenter de faire le lien avec les suites de 0 et de 1 de longueur n (il y en a 2^n) qui sont une forme de représentation d'un sous ensemble puisqu'on peut, par exemple, dire que le sous ensemble associé à une suite est construit tel que le $i^{\text{ème}}$ élément soit dans le sous ensemble si et seulement si le $i^{\text{ème}}$ terme de la suite est 1. Pour chaque suite il existe donc un ensemble et pour chaque ensemble il existe une unique suite. Il y a donc exactement 2^n sous ensembles d'un ensemble de cardinal n.

Une autre méthode de démonstration consiste à raisonner par récurrence sur n. Nous laissons au lecteur le soin de rédiger la démonstration qui ne devrait pas présenter de difficulté.

Solution de l'exercice 62. Pour chaque diviseur d de n, on fait correspondre n/d. Pour d, il existe bien un seul nombre n/d et inversement si on a $a = n/d$ on a $d = n/a$.

Si n n'est pas le carré d'un entier, pour tout diviseur d de n alors d et n/d sont différents et n/d est aussi un diviseur de n. On a donc formé des paires de diviseurs, et il existe donc un nombre pair de diviseurs de n.

Si n est un carré d'un entier, pour tous les diviseurs d tels que $\sqrt{n} \neq d$ on peut faire des paires, entre d et n/d. Enfin, il ne reste qu'un diviseur qui est $\sqrt{n}$ et n a un nombre impair de diviseurs.

Solution de l'exercice 63. Intéressons-nous aux deux premiers individus. Il est impossible de finir par deux elfes puisque sinon parmi les $2n-2$ derniers individus on aurait n gobelins et $n-2$ elfes et donc il y aurait nécessairement deux elfes l'un à coté de l'autre (cela se montre facilement par récurrence sur n). Les deux personnages sont donc soit, un elfe puis un gobelin soit un gobelin puis un elfe.

On note v_n le nombre d'alignements différents que l'on peut faire avec n elfes et n goblins en commençant par un elfe et un gobelin, et u_n le nombre d'alignements faisables en commençant par un gobelin et un elfe.

On a donc $u_{n+1} = u_n + v_n$ car si le deuxième personnage est un elfe le troisième peut être un elfe ou un gobelin. De même on a $v_{n+1} = u_n$ et donc $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.

Comme $u_0 = u_1 = 1$, (u_n) est la suite de Fibonacci.

Le nombre de rangements de n elfes et de n gobelins est donc $u_n + v_n = u_n + u_{n-1} = u_{n+1}$.

Solution de l'exercice 64. Le plus simple est sans doute de considérer les objets tous différents dans un premier temps. Il y a donc $n!$ manières de les ranger. Mais les mêmes solutions sont comptées plusieurs fois car certains objets sont indentique. Si on considère que seuls les n_i objets du $i^{\text{ème}}$ type sont indiscernables (et tous les autres sont distincts) alors on compte $n_i!$ fois chaque solution car chaque permutation d'objets du $i^{\text{ème}}$ type est possible. Ainsi on compte $n_1!n_2!\cdots n_k!$ fois la même solution quand les objets tous différents. Il y a donc

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

rangements differents de ces objets.

On retrouvera ce nombre dans l'exercice 68.

Solution de l'exercice 65. L'idée consiste à transformer légèrement le problème. On considère une série de $n-(k-1) = n-k+1$ cases dans lesquelles on va placer $k-1$ cubes délimiteurs. A chacune de ces configurations correspond une somme : i_1 est le nombre de cases avant le premier cube délimiteur et le nombre i_k est le nombre de case entre le $k-1^{\text{ème}}$ délimiteur et la fin du casier. Réciproquement, pour chaque somme, il existe un seul arrangement des cases et des blocs délimiteurs. Ainsi il y a autant de sommes de k nombres dont la somme est n que de choix de

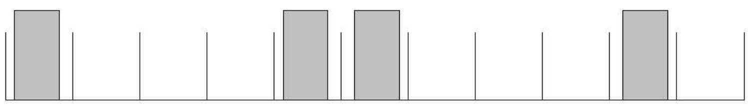


FIG. 2 – Un exemple pour $n = 7$ et $k = 5$, la somme correspondante est $7 = 0 + 3 + 0 + 3 + 1$

$k-1$ cases parmi $n-k+1$. Il y a donc $\binom{n-k+1}{k-1}$ sommes possibles.

Solution de l'exercice 66. Ce problème est très proche du précédent, car il faut regrouper en n paquets les k tirages. Ainsi il y a $\binom{n+k-1}{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!.(n+k-1-n+1)!} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!.k!} = \binom{n+k-1}{k}$.

Ce nombre s'appelle généralement le nombre de combinaisons avec répétition et se note généralement : $\Gamma_n^k = \binom{n+k-1}{k}$.

Solution de l'exercice 67. On note $1, 2, \ldots, n$ les couleurs (on a donc un ordre sur les couleurs). Nous allons distinguer les differents cas, en fonction du nombre de couleurs utilisées.

☞ Si on utilise 4 couleurs différentes, toutes les faces sont de couleurs différentes. On place la plus petite couleur (celle qui a le plus petit numéro) vers le bas et l'on place la seconde couleur face à nous. Il reste alors 2 possibilités pour choisir la place des 2 dernières couleurs. Il existe donc 2 (et seulement 2) tétraèdres qui ont les 4 mêmes couleurs. Il y a donc $2\binom{n}{4}$ tétraèdres avec 4 couleurs.

☞ Si on utilise 3 couleurs, il y a nécessairement une couleur qui se répète, notons la i. On place alors les deux faces de couleur i vers le bas et l'autre vers nous, les deux autres faces peuvent donc être peintes de 2 manières différentes. Donc il y a $2\binom{n}{3}$ tétraèdres de 3 couleurs différentes.

☞ Si on utilise 2 couleurs, soit une couleur apparaît 3 fois, soit les deux couleurs apparaissent 2 fois. Si une des 2 couleurs est représentée 3 fois, alors en plaçant la couleur représentée une seule fois vers le bas on remarque qu'il n'y a qu'une seule manière de peindre le tétraèdre. Si chaque couleur est représentée 2 fois et si l'on place la plus petite couleur vers le bas et face à nous on remarque que la position de l'autre couleur est ainsi fixée. Il n'existe donc qu'une manière de peindre un tétraèdre avec deux couleurs qui se répètent deux fois chacunes. Il y a donc $2\binom{n}{2}$ tétraèdres peints avec 2 couleurs.

☞ Si on utilise une seule couleur, il n'y a bien sûr qu'un tétraèdre par couleur. Il y a donc $\binom{n}{1} = n$ tétraèdres d'une seule couleur.

Le nombre de tétraèdres possibles est donc :

$$2(\binom{n}{4} + \binom{n}{3} + \binom{n}{2}) + n = 2(\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \frac{n(n-1)}{2}) + n$$

$$= n(\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{12} + \frac{(n-1)(n-2)}{3} + (n-1) + 1).$$

<u>*Solution de l'exercice 68.*</u> Nous allons montrer par récurrence sur m que

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_m^{k_m}$$

avec

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}.$$

Pour $m = 2$ on retrouve la formule du binôme de Newton.

Supposons alors que la formule soit vraie pour m, on a donc :

$$(x_1 + \cdots + (x_m + x_{m+1}))^n = \sum_{k_1+k_2+\cdots+K=n} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, K} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_{m-1}^{k_{m-1}} (x_m + x_{m+1})^K$$

avec la formule du binôme sur $(x_m + x_{m+1})^K$ on a

$$(x_1 + \cdots + (x_m + x_{m+1}))^n = \sum_{k_1+k_2+\cdots+K=n} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, K} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_{m-1}^{k_{m-1}} \sum_{k_m+k_{m+1}=K} \binom{K}{k_m, k_{m+1}} x_m^{k_m} x_{m+1}^{k_{m+1}}.$$

Et par définition des coefficients, on a

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, K} \binom{K}{k_m, k_{m+1}} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots K!} \frac{n!}{k_m!k_{m+1}!} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_{m+1}!} = \binom{n}{k_1, \ldots, k_m, k_{m+1}}$$

Enfin :

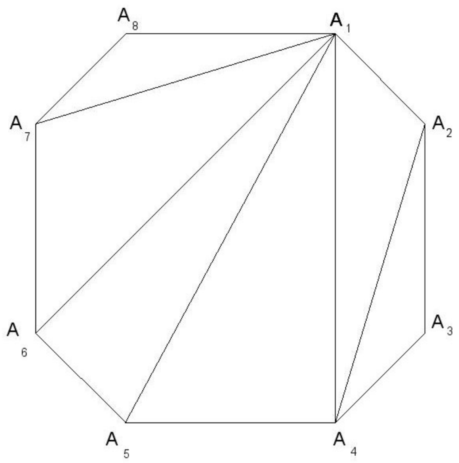
$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m + x_{m+1})^n = \sum_{k_1+\cdots+k_{m+1}=n} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m, k_{m+1}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_{m+1}^{k_{m+1}}.$$

Solution de l'exercice 69. Pour que la sauterelle soit sur la fleur 0 après k sauts il faut qu'il y ait eu autant de sauts vers la gauche que vers la droite, il est donc nécessaire que k soit pair, sinon c'est impossible. Notons alors $k = 2r$.

Il faut et il suffit qu'il y ait autant de sauts vers la droite que vers la gauche il y a donc $\binom{2r}{r}$ façons de faire $2r$ sauts pour que la sauterelle revienne à son point de départ. On pourrait généraliser le résultat en demandant à ce que la sauterelle soit sur la fleur i après ses k sauts (comment ?).

Si on lui impose maintenant de ne jamais passer sur une fleur strictement négative, on remarque facilement que pour tous mots bien parenthésés il correspond un parcours de la sauterelle en transformant une "(" en saut vers la droite et une ")" en un saut vers la gauche. A l'inverse une série de $2r$ sauts finissant sur la fleur 0 correspond a un unique mot bien parenthésé. Ainsi il y a C_r séries de sauts.

Solution de l'exercice 70. Notons T_n le nombre de triangulations d'un polygone à n faces. On a $T_3 = 1$ et $T_4 = 2$. On note les sommets $A_1, \ldots, A_n$ dans le sens des aiguilles d'une montre. On considère alors l'arête $[A_1A_2]$. Si A_k est le troisième angle du triangle alors il reste un polygone de $k-1$ sommets à droite (entre les sommets A_2 et A_k) et un polygone de $n-k+2$ à gauche (entre les sommets A_k et A_1). Donc si on fixe le triangle $A_1A_2A_k$, il existe $T_{k-1}T_{n-k+2}$ triangulations dans lesquelles il y a le triangle $A_1A_2A_k$.



On a donc la relation de récurrence (en posant $T_2 = 1$) :

$$T_n = \sum_{k=3}^{n} T_{k-1}T_{n-k+2}$$

Changeons alors l'ordre de sommation en choisissant $i = k + 3$

$$T_n = \sum_{i=0}^{n-3} T_{i+2}T_{n-i-1}$$

On a donc que $T_n = C_{n-2}$, car $T_2 = T_3 = C_0 = C_1 = 1$ et

$$C_{n-2} = \sum_{i=0}^{(n-2)-1} C_{(i-2)+2}T_{(n-2)-(i-2)-1}$$

Remarque. C'est pour résoudre ce problème que les nombres de Catalan ont été introduits pour la première fois au $18^{\text{ème}}$ siècle par Leonhard Euler. Eugène Charles Catalan fit le lien entre ce problème et celui des comptages de parenthèses. Historiquement les choses se sont donc déroulées à l'inverse de ce que l'on a présenté ici.

Solution de l'exercice 71. On a

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i^2j^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2(\sum_{j=1}^{n} j^2) = (\sum_{i=1}^{n} i^2)(\sum_{j=1}^{n} j^2) = (\frac{n(n+1)(2n+1)}{6})^2$$

Solution de l'exercice 72. On sépare en deux la deuxième somme car

$$\sum_{j=1}^{n} \min(i,j) = \sum_{j=1}^{i} \min(i,j) + \sum_{j=i+1}^{n} \min(i,j) = \sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} i = \frac{i(i+1)}{2} + i.(n-(i+1)+1)$$

On a donc

$$\begin{aligned} u_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \min(i,j) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} + i(n-i) = \sum_{i=1}^{n}(n+\frac{1}{2})i - \frac{i^2}{2} \\ &= (n+\frac{1}{2})\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 73. Nous changeons l'ordre de la somme. Rassemblons les termes pour lesquels $p+q$ est constant. Posons donc $i = p+q$, on a donc :

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{p} p+q &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i+1} i = \sum_{i=0}^{n} i(i+1) = \sum_{i=0}^{n} i^2 + \sum_{i=0}^{n} i \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+4)}{6}. \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 74. Regardons le polynôme $(1+x)^{n+m} = (1+x)^n(1+x)^m$. Dans ce polynôme le coefficient de x^k peut être calculé de deux manières différentes. Avec la partie gauche de l'égalité on aboutit à $\binom{m+n}{k}$ et avec l'autre membre on aboutit à :

$$\sum_{p,r|\ p+r=k} \binom{n}{p}.\binom{m}{r} = \sum_{i=0}^{m+n} \binom{n}{i}.\binom{m}{n-k} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}.\binom{m}{k-i}$$

car on a choisi $\binom{n}{k} = 0$ quand $k > n$.

Solution de l'exercice 75. Pour chaque permutation ayant un seul cycle on peut lui associer son cycle exprimé comme un n-uplet dont le premier nombre est 1. A l'inverse pour chaque n-uplet qui commence par un 1 on peut lui associer la seule permutation ayant ce seul cycle. Il y a donc $(n-1)!$ permutations n'ayant qu'un cycle.

Solution de l'exercice 76. Pour avoir $p^{(i)}(1)$ il faut (et il suffit) que i soit un multiple de la longueur du cycle qui contient 1. Comme la somme de la longueur des cycles d'une permutation de longueur 11 est 11, alors l'ordre maximum est le PPCM maximum que l'on peut atteindre avec des nombres dont la somme vaut 11. Ce PPCM maximum est atteint pour 6 et 5. Donc l'ordre maximum d'une permutation de longueur 11 est $6 \times 5 = 30$.

Solution de l'exercice 77. Si pour toute permutation de longueur n on a $p^{(k)} = Id$ alors pour toute longueur $1 \leqslant i \leqslant n$ de cycle d'une permutation de longueur n le nombre k doit être un multiple de i. Or tous les nombres de $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ peuvent être la longueur d'un cycle d'une permutation de longueur n. En effet, il suffit de prendre la permutation $(2, 3, \dots, i-1, i, 1, i+1, i+2, \dots, n)$ qui a comme cycle $(1, 2, 3, \dots, i)$ qui est de longueur i.

Ce nombre est donc $\text{PPCM}(1, 2, \dots, n)$. Si on note p_i le $i^{\text{ème}}$ nombre premier et α_i le plus grand entier tel que $p_i^{\alpha_i} \geqslant n$, on a donc que $\text{PPCM}(1, 2, \dots, n) = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_i^{\alpha_i} \cdots$.

Solution de l'exercice 78 (O). n va plutôt compter les permutations de taille n qui possédent au moins un i tel que $p(i) = i$. Pour cela on va utiliser le principe d'inclusion et d'exclusion.

Notons A_i l'ensemble des permutations tels que $p(i) = i$. On a alors $\text{Card}(A_i) = (n-1)!$ et pour une intersection de k ensembles A_i disctincts on a $\text{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = (n-k)!$. Donc avec la formule du principe d'inclusion et d'exclusion on a

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \cdots + (-1)^{n-1}$$

Comme il y a $n!$ permutations, le nombre de dérangements est

$$n! - \left(n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1} n!}{n!} = n!(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

Solution de l'exercice 79. Soient $\mathfrak{A}$ l'ensemble des permutations qui possèdent la propriété $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{B}$ l'ensemble de celles qui ne possèdent pas la propriété $\mathfrak{P}$. Il nous suffit de trouver une injection φ de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$.

Soit p l'unique élément de $\{1, 2, \dots, 2n\}$ tel que $x_p \equiv x_1 + n \pmod{2n}$. On a alors

$$\varphi : (x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{2n}) \mapsto (x_2, \dots, x_{p-1}, x_1, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{2n})$$

On remarque donc que tout élément $(y_1, \dots, y_{2n})$ de l'image de φ vérifie $\mathfrak{P}$ car si on choisi $i = p-1$, on a $|y_i - y_{i+1}| = |x_1 - x_p| = n$. Donc φ est injective. Donc $\text{Card}(\mathfrak{A}) \geqslant \text{Card}(\mathfrak{B})$.

Solution de l'exercice 80. Notons $f(n, r)$ le nombre de façons de former r couples compatibles.

Distinguons alors 2 cas

- ☞ Si la fille F_n danse, il y a $r-1$ couples formé avec les $n-1$ premières filles et les $2n-3$ premiers garçons (car $F_1, \dots, F_{n-1}$ ne connaissent que $G_1, \dots, G_{2n-3}$). Il y a exactement $f(n-1, r-1)$ possibilités et pour chaque possibilité F_n peut danser avec $2n-r$ garçons différents. Donc il y a $(2n-r)f(n-1, r-1)$ possibilités si F_n danse.
- ☞ Si F_n ne danse pas, il y a $f(n-1, r)$ façons de former les r couples.

Donc on a $f(n,r) = (2n-r)f(n-1,r-1)+f(n-1,r)$. En outre, on a $f(n,0) = 1$, $f(n,n+1) = 0$ et $f(1,1) = 1$. On vérifie enfin que $\binom{n}{r}\frac{n!}{(n-r)!}$ est bien solution de cette récurrence.

Solution de l'exercice 81. On sait que $2008 = 24\times 72+99-4+99-6+99-7$. Considérons les 99 droites $y = 1, y = 2, \dots, y = 24$ et $x = 1, x = 2, \dots, x = 72$. Elles se rencontrent en $72\times 24 = 1728$ points. La droite $y = x + 20$ coupe les droites précédentes mais les points $(1,21)$, $(1,22)$, $(1,23)$ et $(1,24)$ ont déjà été comptés dans le produit 72×24. Cette droite ajoute donc $99 - 3$ points d'intersections. De même les droites $y = x + 17$ et $y = x + 16$ ajoutent respectivement $99 - 6$ et $99 - 7$ nouveaux points d'intersections. On a donc bien construit 100 droites ayant 2008 points d'intersections.

Solution de l'exercice 82. Nous allons montrer qu'il existe strictement plus de coloriages que de coloriages contenant une progression arithmétique de 10 termes de même couleur. L'existence d'un coloriage tel que aucune progression arithmétique de 10 termes ne contienne que des nombres d'une seule couleur sera alors claire.

Il y a 4^{2008} coloriages avec 4 couleurs. Notons A le nombre de progressions arithmétiques de 10 termes dans $\{1,2,\dots,2008\}$. Le nombre de coloriages contenant une progression arithmétique de 10 termes est donc $4A\times 4^{2008-4}$. Il suffit donc de montrer que $A < 4^9$. Comptons le nombre de progressions arithmétiques de 10 termes qui commence par k, cela correspond à choisir la raison de cette suite et il y a exactement $\lfloor\frac{2008-k}{9}\rfloor$ choix possibles. On a donc :

$$A = \sum_{k=1}^{2008}\lfloor\frac{2008-7}{9}\rfloor < \frac{2007+2006+\cdots+9}{9} = \frac{2007\times 2008}{2\times 9} < \frac{(2^{11})^2}{2\times 2^3} = 4^9.$$

On a donc démontré le résultat.

Solution de l'exercice 83. Le produit de 3 éléments de $\{1,4,9\}$, $\{2,6,12\}$, $\{3,5,15\}$ et $\{7,8,14\}$ est un carré donc aucun d'eux ne peut être un sous-ensemble de M. Comme ils sont disjoint, on a $\mathrm{Card}(M) \leqslant 11$.

Si $10 \notin M$ alors $|M| \leqslant 10$. Sinon $10 \in M$. Dans ce cas, aucun des ensembles $\{2,5\}$, $\{6,15\}$, $\{1,4,9\}$, $\{7,8,14\}$ n'est un sous-ensemble de M. Si $\{3,12\} \not\subseteq M$, on a $|M| \leqslant 10$. Sinon $\{3,12\} \subseteq M$ et donc $1 \notin M$. Enfin, $M \leqslant 10$.

Ainsi, dans tous les cas $M \leqslant 10$. Et finalement on vérifie que $\{1,4,5,6,7,10,11,12,13,14\}$ a la propriété désirée. Donc la valeur maximal de $|M|$ est 10.

Solution de l'exercice 84. On remarque immédiatement que $a_{2k-1} = 0$ car il faut nécessairement jouer un nombre pair de coups pour rejoindre le point E depuis A. On peut donc s'intéresser seulement aux positions tous les 2 coups. On note alors (c_n) et (g_n) le nombre de parties aboutissant à E pour la première fois, en partant de C et G respectivement. Par symétrie on a $(c_n) = (g_n)$. Si nous arrivons en E pour la première fois après $2n + 2$ coups, alors après les 2 premiers coups ont peut soit être en A (après être passé par B ou F) soit en C ou soit en G. Donc on a la relation :

$$a_{2n+2} = 2a_{2n} + c_{2n} + g_{2n} = 2a_{2n} + 2c_{2n}$$

Ce qui équivaut à

$$c_{2n} = \frac{a_{2n+2}}{2} - a_{2n} \tag{IV.2}$$

De plus comme il est impossible de passer par E, en raisonnant comme avant on a

$$c_{2n+2} = a_{2n} + 2c_{2n}$$

Nous éliminons les c_i dans cette équation avec (IV.2). Nous avons donc :

$$a_{2n+4} - 4a_{2n+2} + 2a_{2n} = 0$$

Le polynôme caractéristique de cette suite récurrente linéaire d'ordre 2 est $X^2 - 4X + 2$ dont les racines sont x et y défini comme dans l'énoncé. Il existe donc α et β tel que $a_{2n} = \alpha x^{n-1} + \beta y^{n-1}$. Comme on a $a_2 = 0$, $\alpha = -\beta$. Comme $a_4 = 2$, $\alpha = 1/\sqrt{2}$. Donc enfin on a

$$a_{2n} = \frac{x^{k-1} - y^{k-1}}{\sqrt{2}}.$$

<u>*Solution de l'exercice 85.*</u> On numérote les stagiaires et les tiroirs. Le système des tiroirs correspond donc à une permutation. On note donc $p(i)$ le contenus du tiroir i. Le mathématicien i ouvre le tiroir i. S'il n'y est pas, il ouvre le tiroir $p(i)$ et il continue ainsi et donc le $k^{\text{ème}}$ tiroir qu'il ouvre est le tiroir $p^{(k)}(i-1)$. Si la permutation n'a que des cycles de longueur plus petite que 18, les stagiaires survivent.

Cherchons quelle est la probabilité qu'une permutation ait un cycle de longueur supérieure à 18. Il y exactement

$$\binom{36}{k}(38-k)!(k-1)!$$

permutations qui ont un cycle de longueur k car il y a $(k-1)!$ permutation de k nombres. Et on a

$$\frac{1}{38!}\sum_{k=18}^{36}\binom{38}{k}(38-k)!(k-1)! = \sum_{k=18}^{36}\frac{1}{k} < 0,68.$$

Donc la probabilité de s'en sortir pour les stagiaires est supérieure à $1 - 0,68 = 0,32$.

<u>*Solution de l'exercice 86.*</u> Ce n'est pas un exercice sérieux ! Évidemment, la somme des racines d'un polynôme $x^2 + ax + b$ est égale à $-a$; (le produit vaut b). Si a est entier et si une racine est entière, l'autre aussi.

De façon générale, il convient de bien connaître les relations entre coefficients et racines d'un polynôme.

Par exemple, si α, β, γ sont les racines de $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (où $a \neq 0$), alors

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} \qquad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a} \qquad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}.$$

<u>*Solution de l'exercice 87.*</u> On note $f(x) = x^n + \cdots + a_1 x + a_0$. Soit $\alpha = p/q$ (écriture irréductible, $q > 0$) une racine rationnelle. Il vient

$$p^n = -q(a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q + \cdots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}).$$

Ainsi q divise p^n. Comme q est premier avec p, donc avec p^n, on conclut $q = 1$, et α est entier. Le fait que α divise $f(0)$ vient de $a_0 = -\alpha(\alpha^{n-1} + \cdots + a_2\alpha + a_1)$.

<u>*Solution de l'exercice 88.*</u> Exercice très facile. On écrit $P(x) = (x - \alpha_1)\cdots(x - \alpha_{13})Q(x)$ avec $Q(x)$ à coefficients entiers (division euclidienne). Si n n'est pas racine de $P(x)$, on constate que $P(n)$ est produit de 14 entiers dont les 13 premiers sont distincts. Le produit de ces 13 entiers a une valeur absolue minimale égale à $1 \times 1 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 6 \times 6 \times 7 = 7 \times (6!)^2$, d'où la conclusion.

L'égalité a lieu par exemple avec $P(x) = (x-7)\prod_{k=1}^{6}\big[(x-k)(x+k)\big]$ et $n = 0$.

<u>*Solution de l'exercice 89.*</u> On va montrer par l'absurde que de tels polynômes n'existent pas. Supposons l'existence de f, g, h. Alors $h(1), \ldots, h(8)$ sont racines du polynôme $f(g(x))$, de degré 4. Comme $h(a) = h(b)$ n'a lieu que si a et b sont symétriques par rapport à l'axe de la parabole

$y = h(x)$, il vient que $h(1) = h(8)$, $h(2) = h(7)$, $h(3) = h(6)$, $h(4) = h(5)$ et la parabole $y = h(x)$ est symétrique par rapport à la droite $x = 9/2$. De plus, on a soit $h(1) < h(2) < h(3) < h(4)$, soit $h(1) > h(2) > h(3) > h(4)$. Maintenant $g(h(1))$, $g(h(2))$, $g(h(3))$, $g(h(4))$ sont racines du polynôme quadratique $f(x)$, donc $g(h(1)) = g(h(4))$ and $g(h(2)) = g(h(3))$ (on utilise le fait que $h(2)$ et $h(3)$ sont entre $h(1)$ et $h(4)$). Ainsi $h(1) + h(4) = h(2) + h(3)$. Si $h(x) = Ax^2 + Bx + C$, cela entraîne $A = 0$, contradiction.

Solution de l'exercice 90. Les plus nombreux sont ceux n'ayant pas de racines réelles. Si $m \leqslant n$ sont les racines entières de $x^2 + ax + b$, alors $m + n = -a$ et $mn = b$. Supposant $1 \leqslant a, b \leqslant 2008$, on doit avoir $-2008 \leqslant m \leqslant n < 0$. Considérons le polynôme $x^2 - nx + mn$: il a des coefficients entiers entre 1 et 2008, et son discriminant vaut $n^2 - 4mn = n(n-4m)$ qui est strictement négatif.

En procédant ainsi, parmi les polynômes de degré 2 à coefficients compris entre 1 et 2008, on associe injectivement à tout polynôme à racines entières un polynôme sans racines réelles. On n'obtient pas tous les polynômes sans racines réelles (par exemple, $x^2 + 2x + 5$ n'a pas de racines réelles, mais n'est pas de la forme $x^2 - nx + mn$), d'où la conclusion annoncée : il y a plus de polynômes sans racines réelles que de polynômes à racines entières.

Solution de l'exercice 91. *a)* Posons $a = \frac{x}{x-1}$, $b = \frac{y}{y-1}$, $c = \frac{z}{z-1}$. Alors a, b, c sont différents de 1 et $x = \frac{a}{a-1}$, $y = \frac{b}{b-1}$, $z = \frac{c}{c-1}$. Il s'agit de montrer $a^2+b^2+c^2 \geqslant 1$ lorsque $abc = (a-1)(b-1)(c-1)$ (et a, b, c différents de 1, ce qui n'intervient pas ici).

La condition s'écrit aussi $a + b + c = ab + bc + ca + 1$ qui entraîne, en mettant au carré $a^2+b^2+c^2 = 1+(ab+bc+ca)^2$. Alors $a^2+b^2+c^2 \geqslant 1$ avec égalité si et seulement si $ab+bc+ca = 0$.
b) D'après les calculs précédents, on doit chercher une infinité de triplets a, b, c de rationnels différents de 1 tels que $a + b + c = 1$ et $ab + bc + ca = 0$. Commençons par trouver des triplets $(1, u, v)$ de rationnels vérifiant la deuxième condition, c'est-à-dire $u+v+uv = 0$: il suffit de prendre u rationnel quelconque différent de -1 et de poser $v = -\frac{u}{u+1}$. Pour en déduire des triplets (a, b, c) convenables, il suffit de diviser $(1, u, v)$ par $s = 1 + u + v$. Pour que cela fonctionne, il reste à voir si s peut être nul, et si les nombres $a = 1/s$, $b = u/s$ et $c = v/s$ peuvent valoir 1. Ces vérifications ne posent aucune difficulté. On a $s = 1 + u - \frac{u}{u+1} = \frac{u^2+u+1}{u+1}$ donc s n'est pas nul. Pour $u \neq -1$, on obtient

$$a = \frac{u+1}{u^2+u+1} \quad b = \frac{u^2+u}{u^2+u+1} \quad c = -\frac{u}{u^2+u+1}.$$

Un examen rapide montre que $a = 1$ a lieu pour $u = 0$, que $c = 1$ entraîne $u = -1$ (exclu au préalable) et que $b \neq 1$. Lorsque u décrit les rationnels différents de 0 et de -1, on obtient une infinité de solutions rationnelles, puisque le rapport $\frac{b}{a} = u$ prend une infinité de valeurs.

Solution de l'exercice 92. Il existe un polynôme P de degré $2m+1$ tel que $P(\sin\theta) = \sin(2m+1)\theta$ pour tout θ. Pour le voir, on observe que $\sin(2m+1)\theta$ est la partie imaginaire de $(\cos\theta + i\sin\theta)^{2m+1}$ qui vaut aussi

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k} (-1)^{m-k} \cos^{2k}\theta \sin^{2(m-k)+1}\theta.$$

Remplaçant $\cos^{2k}\theta$ par $(1-\sin^2\theta)^k$, on obtient P. De façon précise, on a

$$P(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k} (-1)^{m-k} (1-x^2)^k x^{2(m-k)+1}.$$

(L'existence de P peut aussi être démontrée par récurrence sur m.) On vérifie que P est un polynôme impair de degré $2m+1$. Si on écrit $P(x) = a_1x + a_3x^3 + \cdots$, on vérifie, à l'aide de la formule ci-dessus

$$a_1 = \binom{2m+1}{2m} = 2m+1 \quad \text{et} \quad a_3 = -\binom{2m+1}{2m-2} - \binom{2m+1}{2m}\binom{m}{1} = -\frac{2}{3}m(m+1)(2m+1).$$

Par ailleurs, pour tout entier k compris entre $-m$ et m, le réel $\sin \frac{k\pi}{2m+1}$ est racine de P. On a ainsi $2m+1$ racines distinctes, qui constituent donc toutes les racines de P. D'autre part, observant que P est impair, on peut écrire :

$$P(x) = x \prod_{k=1}^{m} (x^2 - \sin^2 \frac{k\pi}{2m+1}) = a_1 x + a_3 x^3 + \cdots$$

En développant, on obtient alors des expressions de a_1 et de a_3 : au signe près, a_1 est le produit des $\sin^2 \frac{k\pi}{2m+1}$, et a_3 est la somme des m produits constitués de $m-1$ facteurs parmi les $\sin^2 \frac{k\pi}{2m+1}$. Finalement

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2m+1}} = -\frac{a_3}{a_1} = \frac{2m(m+1)}{3}.$$

Enfin, avec $\cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta} - 1$, il vient

$$\sum_{k=1}^{m} \cot^2 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{2m(m+1)}{3} - m = \frac{m(2m-1)}{3}.$$

On laisse au lecteur le soin de justifier les inégalités mentionnées dans l'énoncé. Elles entraînent

$$\frac{m(2m-1)}{3} = \sum_{k=1}^{m} \cot^2 \frac{k\pi}{2m+1} \leqslant \sum_{k=1}^{m} \frac{(2m+1)^2}{k^2\pi^2} \leqslant \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2m+1}} = \frac{2m(m+1)}{3}$$

puis

$$\frac{m(2m-1)\pi^2}{3(2m+1)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{2m(m+1)\pi^2}{3(2m+1)^2}.$$

On termine en faisant tendre m vers l'infini : les deux bornes de l'encadrement tendent vers $\pi^2/6$, et le terme central aussi par théorème du pincement.

Solution de l'exercice 93. Dans le plan complexe, ramenons par similitude les sommets du polygone aux racines n-ièmes de l'unité $e^{2ik\pi/n}$, où $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Le produit des distances du point d'affixe z aux sommets de $\mathcal{P}$ vaut

$$\prod_{k=0}^{n-1} |z - e^{2ik\pi/n}| = |z^n - 1|.$$

Le maximum est obtenu lorsque $z^n = -1$, soit $z = e^{(2k+1)i\pi/n}$, et sa valeur est 2. (Si le disque d'origine est de rayon R, la valeur du maximum est $2R^n$).

Solution de l'exercice 94. Non. Sans nuire à la généralité, on suppose que a est pair (sinon on le remplace par $-1-a$). Si $ax^2 + bx + c$ a des racines entières, alors a doit diviser b et c, donc b and c sont pairs. Mais alors le polynôme $(a+1)x^2 + (b+1)x + (c+1)$ a des coefficients impairs. Remarquant qu'un carré impair est congru à 1 modulo 8, on constate que le discriminant de $(a+1)x^2 + (b+1)x + (c+1)$, qui vaut $(b+1)^2 - 4(a+1)(c+1)$, est congru à 5 modulo 8 et n'est donc pas un carré parfait. Cela entraîne que $(a+1)x^2 + (b+1)x + (c+1)$ ne possède pas deux racines entières.

Solution de l'exercice 95. On montre qu'il n'existe pas de telle fonction f. Supposons que f vérifie la condition. Posons $g(x) = x^2 - 2 = f(f(x))$ et $h(x) = g(g(x)) = x^4 - 4x^2 + 2$. La clé est de faire intervenir les points fixes de g et h. Un calcul facile montre que les points fixes de g (c'est-à-dire les solutions de $g(x) = x$) sont -1 et 2 ; l'ensemble S des points fixes de h est $\{-1, 2, a, b\}$ avec

$a = (-1+\sqrt{5})/2$ et $b = (-1-\sqrt{5})/2$. Il est facile de voir que $\{-1, 2\}$ et S sont stables par f : en effet, un point fixe u de g vérifie $g(u) = u$ puis $g(f(u)) = f(f(f(u))) = f(g(u)) = f(u)$ donc $f(u)$ est point fixe de g. Même argument pour h. Comme S est stable par f et comme la restriction de f^4 est l'identité sur S, on voit que f induit une bijection f' de S dans S. Notons g' la bijection induite par g sur S. On voit que $g'(-1) = -1$, $g'(2) = 2$, $g'(a) = b$ et $g'(b) = a$. Or il est facile de constater que la relation $f' \circ f' = g'$ aboutit à une contradiction : comme $\{-1, 2\}$ est stable par f', il en est de même de $\{a, b\}$; alors $f'(a) = a$ et $f'(b) = b$, ou bien $f'(a) = b$ et $f'(b) = a$. Dans les deux cas, $f'(f'(a)) = a$ contradiction avec $g'(a) = b$.

Solution de l'exercice 96. De $f(x+1) = f(x)+1$, on déduit $f(x+n) = f(x)+n$ pour tout entier naturel n. Soit $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+^*$ et soit $u = f(\frac{p}{q})$. On donne deux expressions de $A = f((\frac{p}{q} + q^2)^3)$. D'une part,

$$A = f(\frac{p^3}{q^3} + 3p^2 + 3pq^3 + q^6) = u^3 + 3p^2 + 3pq^3 + q^6$$

puisque $f(\frac{p^3}{q^3}) = f(\frac{p}{q})^3 = u^3$ et que $3p^2 + 3pq^3 + q^6$ est un entier naturel. D'autre part,

$$A = f(\frac{p}{q} + q^2)^3 = (u + q^2)^3 = u^3 + 3u^2q^2 + 3uq^4 + q^6.$$

En écrivant que les deux expressions de A sont égales, il vient

$$3u^2q^2 + 3uq^4 - (3p^2 + 3pq^3) = 0.$$

Il s'agit d'une équation du second degré en u, dont $\frac{p}{q}$ est racine. Comme le produit des racines est strictement négatif, l'autre racine est strictement négative et on conclut que $u = p/q$. Ainsi, $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{Q}_+^*$.

Solution de l'exercice 97. Les entiers $(4a^2-1)^2$ et $(4a^2-4ab)^2$ sont congrus modulo $4ab-1$. On en déduit que $4ab-1$ divise $(4a^2-1)^2$ si et seulement si il divise $4a^2(a-b)^2$. Comme $4ab-1$ est premier avec $4a^2$, on obtient que $4ab-1$ divise $(4a^2-1)^2$ si et seulement si $4ab-1$ divise $(a-b)^2$. Soit S l'ensemble des couples (x, y) d'entiers naturels non nuls distincts tels que $4xy-1$ divise $(4x^2-1)^2$, c'est-à-dire tels que $4xy-1$ divise $(x-y)^2$. On remarque que $(x, y) \in S$ implique $(y, x) \in S$.

Supposons par l'absurde que S n'est pas vide. Considérons alors $(a, b) \in S$ tel que $a+b$ soit minimal. Par symétrie, on peut supposer $a > b > 0$. Soit k tel que $(a-b)^2 = k(4ab-1)$; on a $k > 0$. Soit $P(x)$ le polynôme $(x-b)^2 - k(4bx-1) = x^2 - (4kb+2b)x + b^2 + k$. C'est un polynôme du second degré, unitaire à coefficients entiers, dont a est racine. Comme la somme de ses racines est entière, $P(x)$ admet une seconde racine entière c. La relation $P(c) = 0$ donne $(b-c)^2 = k(4bc-1)$. Le produit ac des racines de P vaut b^2+k, donc $ac > 0$, puis $c > 0$. D'autre part, $P(b) = k(1-4b^2)$, donc $P(b) < 0$ et b est entre les racines de P. Comme $a > b$, il vient $a > b > c > 0$. Finalement $(b, c) \in S$ et $b+c < a+b$, absurde car $a+b$ minimal. La contradiction obtenue montre que S est vide, ce qui conclut.

Remarques. Après avoir établi comme ci-dessus que le problème est symétrique en (a, b), on peut procéder de la façon suivante. Le quotient de $(4a^2-1)^2$ par $4ab-1$ est congru à -1 modulo $4a$, et il existe donc un entier c tel que $(4a^2-1)^2 = (4ab-1)(4ac-1)$. Supposant $(a, b) \in S$ avec $b > a$, il vient aussitôt $0 < c < a$ et $(c, a) \in S$. On conclut par descente infinie (ou en choisissant $a+b$ minimal).

Ce problème d'olympiades, posé à Hanoï en 2007, repose sur une méthode devenue assez classique aux Olympiades. Il s'agit de combiner les propriétés des racines d'un polynôme du second degré à coefficients entiers avec un argument de descente infinie. La méthode est apparue aux Olympiades en 1988, à Canberra. C'est le problème suivant.

Solution de l'exercice 98. Même méthode quadratique que pour le problème précédent. Notant $q = \frac{a^2+b^2}{ab+1}$, on constate que a est racine du polynôme $P(x) = x^2 - qbx + b^2 - q$. L'autre racine est un entier c vérifiant $\frac{b^2+c^2}{bc+1} = q$. La relation $ac = b^2 - q$ (produit des racines de P) montre que $a > b > 0$ implique $b > c \geqslant 0$. Par descente, on aboutit à (u, v) tel que $\frac{u^2+v^2}{uv+1} = q$ et $v = 0$, donc $q = u^2$.

Solution de l'exercice 99. Notons qu'un théorème connu (Gauss) assure que l'irréductiblité de f sur $\mathbb{Z}$ équivaut à son irréductibilité sur $\mathbb{Q}$. Considérons une décomposition $f(x) = g(x)h(x)$ où g et h sont des polynômes à coefficients entiers : il s'agit de montrer que l'un des polynômes est constant. Passons aux classes de congruence modulo p. (On peut aussi continuer de raisonner sur des entiers, voir exposé oral ; mais la méthode des classes de congruence est puissante).

On écrit donc $\overline{f}(x) = \overline{g}(x)\overline{h}(x)$ où maintenant $\overline{f}(x)$, $\overline{g}(x)$ et $\overline{h}(x)$ sont des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, qui est un corps car p est premier. On constate que $\overline{f}(x) = x^n$. On en déduit qu'il existe un entier k entre 0 et n tel que $\overline{g}(x) = x^k$ et $\overline{h}(x) = x^{n-k}$. Si, par l'absurde, on avait $0 < k < n$, alors les termes constants de g et h seraient multiples de p, et le terme constant de f serait multiple de p^2, ce qui n'est pas. On en déduit que $k = 0$ ou $k = n$, ce qu'il fallait démontrer.

Solution de l'exercice 100. On fait le changement de variable $x = y + 1$. On obtient

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1 = \frac{x^p - 1}{x - 1} = \frac{(y+1)^p - 1}{y} = \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} y^{k-1}$$

obtenant un polynôme unitaire en y qui vérifie les hypothèses du critère d'Eisenstein (à l'exception de celui de plus haut degré, les coefficients sont multiples de p ; le coefficient constant n'est pas multiple de p^2).

Remarque. On a utilisé le fait que p divise $\binom{p}{k}$ pour $1 \leqslant k \leqslant p-1$. Cette propriété classique sert dans une des démonstrations du petit théorème de Fermat (quand on établit $a^p \equiv a \mod p$ par récurrence sur a à l'aide de la formule du binôme). Démontrons-la : p divise $p! = k!(p-k)!\binom{p}{k}$ et p est premier avec $k!(p-k)!$ puisque $k \neq 0$ et $k \neq p$; d'après le théorème de Gauss, on conclut que p divise $\binom{p}{k}$.

Solution de l'exercice 101. Ce problème a été posé aux Olympiades internationales en 1993. Le critère d'Eisenstein ne s'applique pas, mais on peut adapter la méthode. On réduit $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$ modulo 3, obtenant $x^n - x^{n-1}$ qui, sur $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ n'admet que des factorisations $\overline{f} = \overline{g}\overline{h}$ du type $\overline{g}(x) = x^k$ et $\overline{h}(x) = x^{n-k-1}(x-1)$, où $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Comme pour le critère d'Eisenstein, on montre que $0 < k < n-1$ est absurde, car sinon $g(0)$ et $h(0)$ seraient multiples de 3, donc $f(0)$ serait multiple de 9, ce qui n'est pas.

Examinons le cas $k = n-1$. Cela signifie que les degrés de $\overline{g}$ et de $\overline{h}$ valent $n-1$ et 1 et il en est de même des degrés de g et h. Ainsi, f aurait un facteur de degré 1, puis une racine entière. On sait (voir plus haut) que cette racine doit diviser le coefficient constant, à savoir 3 ; elle vaut donc ± 1 ou ± 3 (en fait ± 3 est exclu par l'expression de $\overline{h}$, mais peu importe). On vérifie sans difficulté qu'aucun de ces entiers n'est racine de f.

Finalement, on a forcément $k = 0$, ce qui assure l'irréductibilité de f.

Autre solution.

Supposons $f(x) = g(x)h(x)$ avec g et h polynômes non constants à coefficients entiers. Comme $f(0) = 3$, on peut supposer $g(0) = \pm 1$. On écrit $g(x) = x^k + \cdots$. On vérifie que $k > 1$, car 1 et -1 ne sont pas racines de f. Notons $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ les racines complexes de g de sorte que $g(x) = \prod_{j=1}^{k}(x - \alpha_j)$. En faisant $x = 0$, on voit que le produit des α_j vaut ± 1 La clé est alors d'étudier $g(-5)$. D'abord, $g(-5)$ divise $f(-5)$ qui vaut 3 donc $|g(-5)| \leqslant 3$. Ensuite, $g(-5) =$

$(-5-\alpha_1)\cdots(-5-\alpha_r)$ a le même module que $\prod_{j=1}^k(\alpha_j^{n-1}(-5-\alpha_j))$ car $\prod_{j=1}^k \alpha_j = \pm 1$. On en déduit $|g(-5)| = \prod_{j=1}^k |\alpha_j^n + 5\alpha_j^{n-1}| = 3^k \geqslant 9$, ce qui donne la contradiction voulue.

Solution de l'exercice 102. Les solutions sont les polynômes de la forme $P(x) = \alpha x^2 + \beta x^4$.

On vérifie d'abord que $P(x) = x^2$ et $P(x) = x^4$ conviennent. Supposons $ab+bc+ca = 0$. Considérons $P(x) = x^2$. Par développement direct, utilisant $ab+bc+ca = 0$, on obtient

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 2(a+b+c)^2.$$

Pour $P(x) = x^4$, on justifie les deux égalités

$$4(a+b+c)^4 = ((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2)^2 = 2((a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4).$$

La première est obtenue en mettant le cas de x^2 au carré ; la seconde vient, pour $u+v+w = 0$, de la relation $(u^2+v^2+w^2)^2 = 2(u^4+v^4+w^4)$ (appliquée à $u = a-b$, $v = b-c$, $w = c-a$) qu'on démontre en appliquant à la différence des deux membres une identité classique :

$$-u^4 - v^4 - w^4 + 2u^2v^2 + 2v^2w^2 + 2w^2u^2 = (u+v+w)(-u+v+w)(u-v+w)(u+v-w) = 0.$$

On en déduit que tous les polynômes de la forme $P(x) = \alpha x^2 + \beta x^4$ sont solutions du problème. On va montrer que ce sont les seules.

Soit d'abord un monôme $P(x) = x^k$ vérifiant la condition de l'énoncé. En faisant $(a,b,c) = (0,0,0)$, on voit que $k \neq 0$; avec $(a,b,c) = (1,0,0)$, on voit que k est pair. Enfin, avec $(a,b,c) = (6,3,-2)$, posant $u_k = 3^k + 5^k + (-8)^k - 2\cdot 7^k$, on obtient $u_k = 0$. Or, si k est un entier pair supérieur ou égal à 6, on constate que $u_k > 8^k - 2\cdot 7^k > 0$ car

$$\left(\frac{8}{7}\right)^k \geqslant \left(\frac{8}{7}\right)^6 = \frac{64^3}{49^3} > \frac{262144}{125000} > 2.$$

Ainsi, les monômes solutions sont x^2 et x^4.

Soit alors $P(x) = \sum p_k x^k$ une solution de l'équation fonctionnelle. Soient a, b, c trois réels tels que $ab+bc+ca = 0$. Pour tout réel t, le triplet (ta, tb, tc) verifie la même relation et on a donc $P\big(t(a-b)\big) + P\big(t(b-c)\big) + P\big(t(c-a)\big) = 2\,P\big(t(a+b+c)\big)$ puis

$$\sum p_k\big((a-b)^k + (b-c)^k + (c-a)^k\big)t^k = 2\sum p_k (a+b+c)^k t^k.$$

Cela étant vrai pour tout réel t, les coefficients de t^k sont égaux et on a, pour tout k,

$$p_k\big((a-b)^k + (b-c)^k + (c-a)^k\big) = 2p_k(a+b+c)^k.$$

On est ainsi ramené au cas du monôme x^k, ce qui entraîne que $p_k = 0$ pour tout k distinct de 2 et 4, et P est bien de la forme $\alpha x^2 + \beta x^4$.

Seconde solution.

Avec $b = c = 0$, on voit que P est pair. Soit Q le polynôme tel que $P(x) = Q(x^2)$. La relation devient

$$Q((a-b)^2) + Q((b-c)^2) + Q((c-a)^2) = 2Q((a+b+c)^2) = 2Q(a^2+b^2+c^2)$$

Si on pose $x = a-b$, $y = b-c$, on obtient

$$Q(x^2) + Q(y^2) + Q(x^2+2xy+y^2) = 2Q(x^2+xy+y^2). \tag{IV.3}$$

Il est essentiel que remarquer que cette relation est satisfaite pour tout couple de réels (x, y). Si en effet x, y sont des réels quelconques, la recherche de a, b, c réels tels que $ab + bc + ca = 0$ et $x = a - b$, $y = b - c$ revient à résoudre l'équation en b

$$(b + x)(b - y) + b(b + x) + b(b - y) = 0$$

c'est-à-dire $3b^2 + 2(x - y)b - xy = 0$, équation du second degré de discriminant $4(x - y)^2 + 12xy = 4(x^2 + xy + y^2) = (2x + y)^2 + 3y^2$ positif.

À ce stade, on a établi que l'équation fonctionnelle de l'énoncé est équivalente à l'équation fonctionnelle (IV.3) (pour x, y réels quelconques) après changement de fonction inconnue donné par $Q(x^2) = P(x)$. Si on remplace y par $-y$ dans (IV.3), on obtient

$$Q(x^2) + Q(y^2) + Q(x^2 - 2xy + y^2) = 2Q(x^2 - xy + y^2). \tag{IV.4}$$

Faisons la différence des relations (IV.3) et (IV.4). En posant $p = x^2 + y^2$ et $q = xy$ il vient

$$Q(p + 2q) - Q(p - 2q) = 2Q(p + q) - 2Q(p - q) \tag{IV.5}$$

pour tout couple de réels (p, q) tel que $2|q| \leqslant p$ (qui représente une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des réels x, y vérifiant $p = x^2 + y^2$, $q = xy$). Soit $p > 0$. En dérivant trois fois la relation (IV.5) par rapport à q dans l'intervalle $[-p/2, p/2]$, on obtient

$$8Q^{(3)}(p + 2q) + 8Q^{(3)}(p - 2q) = 2Q^{(3)}(p + q) + 2Q^{(3)}(p - q).$$

Avec $q = 0$, on obtient $Q^{(3)}(p) = 0$ pour tout $p > 0$; cela entraîne que Q est de degré 2. Comme $Q(0) = 0$ (avec $x = y = 0$), on obtient la condition nécessaire $Q(x) = \alpha x + \beta x^2$ et donc $P(x) = \alpha x^2 + \beta x^4$.

Réciproquement, on constate que ces polynômes conviennent en vérifiant que $Q(x) = x$ et $Q(x) = x^2$ satisfont à (IV.3), ce qui est un calcul immédiat.

Remarques. D'autres solutions calculatoires analogues à la première sont possibles, mais présentent peu d'intérêt. On peut même remplacer c par $-\frac{ab}{a+b}$ et identifier certains des coefficients des $a^i b^j$ qui apparaissent après avoir chassé les dénominateurs.

La seconde solution permet de généraliser l'exercice au cas où on suppose seulement que P est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation fonctionnelle. Ayant constaté que P est paire, on pose $Q(x) = P(\sqrt{x})$ pour $x \geqslant 0$. La fonction Q est continue sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie, pour u, v positifs

$$Q(u) - 2Q(u + v) + 2Q(u + 3v) - Q(u + 4v) = 0$$

(dans la relation (IV.5), poser $u = p - 2q$, $v = q$). Un argument connu montre alors que Q est C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ (à u fixé, en intégrant cette dernière relation de $v = 0$ à $v = 1$, il vient une relation entre Q et une de ses primitives qui entraîne que Q est C^1 puis, par récurrence, de classe C^k pour tout k). Il suffit alors de reprendre la méthode de dérivation de la seconde solution pour aboutitr à $Q^{(3)} = 0$ sur $\mathbb{R}_+$ et P est encore de la forme $x \mapsto \alpha x^2 + \beta x^4$.

Solution de l'exercice 103. *Préliminaires.* Il est utile de rappeler des propriétés des fractions rationnelles $U_n(x) = x^n + x^{-n}$ et $V_n(x) = x^n - x^{-n}$. On laisse au lecteur le soin de montrer, par exemple par récurrence, qu'il existe des polynômes à coefficients entiers P_n et Q_n tels que $U_n(x) = P_n(U_1(x))$ et $V_n(x) = V_1(x)Q_n(U_1(x))$.

Cela étant, on remarque que $S_n = U_n(a) = P_n(U_1(a)) = P_n(S_1)$. Le problème revient alors à montrer que S_1 est entier. Notons $T_n = a^n - a^{-n} = V_n(a)$. Pour alléger, on suppose, ce qui est loisible, $a \neq \pm 1$ de sorte que T_n est non nul pour tout n. On sait que S_p est entier. D'après les préliminaires, pour tout entier k, on aura $T_{kp} = V_k(a^p) = V_1(a^p)Q_k(U_1(a^p)) = T_p Q_k(S_p)$. Donc $\frac{T_{kp}}{T_p}$ est entier pour tout k. Idem en remplaçant p par $p + 1$. Il s'ensuit que $\frac{T_{p(p+1)}}{T_p}$ et $\frac{T_{p(p+1)}}{T_{p+1}}$ sont entiers. Par ailleurs, pour tout n on a $S_n^2 - T_n^2 = 4$. Comme $S_{kp} = U_k(S_p)$ est entier pour tout k, on voit que $S_{p(p+1)}$ est entier, puis que $T_{p(p+1)}^2 = S_{p(p+1)}^2 - 4$ est entier. Combinant que $T_{p(p+1)}/T_p$, $T_{p(p+1)}/T_{p+1}$, et $T_{p(p+1)}^2$ sont entiers on obtient que T_pT_{p+1} est rationnel. De plus son carré est entier car $T_p^2 = S_p^2 - 4$ et T_{p+1}^2 le sont. Ainsi, T_pT_{p+1} est entier. On remarque en outre qu'il a la même parité que S_pS_{p+1} car leurs carrés ont même parité, vu que $T_p^2T_{p+1}^2 = (S_p^2-4)(S_{p+1}^2-4)$. On termine enfin avec la relation $S_1 = \frac{1}{2}(S_pS_{p+1} - T_pT_{p+1})$, qui montre que S_1 est entier et conclut le problème.

2 En TND

2.1 Les énoncés

Géométrie

Exercice 1. Soit $ABCD$ un quadrilatère. Montrer que les diagonales AC et BD sont perpendiculaires si et seulement si on a $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

Exercice 2. Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus. Les bissectrices intérieures des angles A, B, C recoupent le cercle circonscrit au triangle respectivement en A_1, B_1, C_1.

On appelle A_0 le point d'intersection de la bissectrice intérieure (AA_1) avec les bissectrices extérieures des angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$. Les points B_0 et C_0 sont définis de manière analogue.

(i) Démontrer que l'aire du triangle $A_0B_0C_0$ est le double de l'aire de l'hexagone $AC_1BA_1CB_1$.

(ii) Démontrer que l'aire du triangle $A_0B_0C_0$ est supérieure ou égale à quatre fois l'aire du triangle ABC.

Exercice 3. Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un demi-cercle s de diamètre AB. Les droites (AC) et (BD) se coupent en E et les droites (AD) et (BC) en F. La droite (EF) coupe le demi-cercle s en G et la droite (AB) en H. Montrer que E est le milieu du segment $[GH]$ si et seulement si G est le milieu du segment $[FH]$.

Arithmétique

Exercice 4 (*Hongrie, 1982*). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si l'équation $x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$ admet un couple solution $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, il en admet au moins trois. Montrer que pour $n = 2009$, cette équation n'a pas de solution.

Exercice 5. Soit q un entier naturel. On suppose qu'il existe a et b deux entiers naturels tels que $a^2 - qab + b^2 = q$.
a) En considérant le polynôme $P(x) = x^2 - qbx + b^2 - q$, déterminer un entier c différent de a tel que $c^2 - qbc + b^2 = q$.
b) Montrer que q est un carré parfait. (On pourra considérer un couple (a, b) d'entiers naturels vérifiant $a^2 - qab + b^2 = q$ avec a minimal.)

Exercice 6. On considère la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, et pour tout $n \geqslant 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Déterminer tous les couples d'entiers (k, m) vérifiant $m > k > 0$ pour lesquels la suite x_n définie par $x_0 = \frac{F_k}{F_m}$ et

$$x_{n+1} = \frac{2x_n - 1}{1 - x_n} \text{ si } x_n \neq 1, \quad x_{n+1} = 1 \text{ si } x_n = 1$$

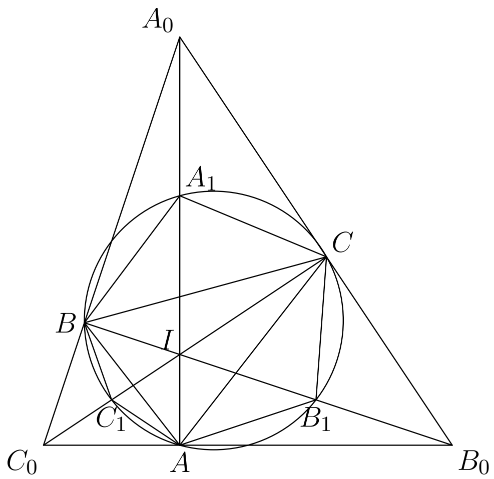
contient le nombre 1.

2.2 Les solutions

Géométrie

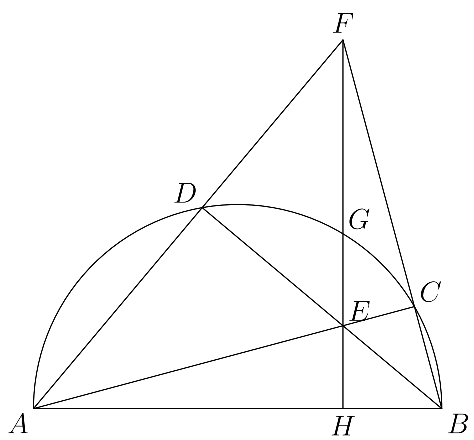
Solution de l'exercice 1. Voir solution 8, page 63.

Solution de l'exercice 2.



(i) Soit I le centre du cercle inscrit dans ABC. Rappelons que le point A_1 est le milieu de l'arc BC du cercle circonscrit, et qu'une chasse aux angles montre que les distances A_1B, A_1C et A_1I sont égales. Or l'angle $\widehat{A_0BI}$ est droit, donc le triangle A_0BI est droit. Le point A_1 appartient à l'hypothénuse de ce triangle et il est équidistant de deux des sommets, donc il s'agit du centre du cercle circonscrit à A_0BI. Par conséquent A_1 est le milieu du segment A_0I. On en déduit que les triangles IBA_1 et A_0BA_1 ont même aire, donc l'aire du triangle IBA_0 est le double de l'aire du triangle IBA_1. En faisant de même avec cinq autres paires de triangles, on montre que l'aire du triangle $A_0B_0C_0$ est le double de l'aire de l'hexagone $AC_1BA_1CB_1$.
(ii) Soit H l'orthocentre de ABC. Pour montrer l'inégalité de l'énoncé, il suffit de montrer que l'aire du triangle BA_1C est suppérieure ou égale à celle du triangle BHC. On rappelle que le symétrique H_A de H par rapport à la droite (BC) appartient au cercle circonscrit Γ à ABC. Par conséquent il s'agit de comparer l'aire des triangle BH_AC et BA_1C. Or la parallèle à (BC) passant par A_1 est tangente à Γ, donc le point A_1 est situé entre (BC) et cette parallèle. Par conséquent le triangle BH_AC a une aire inférieure à BA_1C. On en déduit l'inégalité demandée.

Solution de l'exercice 3.



Notons que (AC) et (BD) sont des hauteurs du triangle ABF, donc (FH) en est la troisième hauteur et E l'orthocentre. Soit G' le symétrique de G par rapport à H. Par cocyclité et puissance d'un point par rapport à un cercle on a $FG \cdot FG' = FH^2 - GH^2 = FA \cdot FD = FE \cdot FH$. On a alors les équivalences suivantes

$$FG = GH \iff FH^2 = 4GH^2 \iff FE \ \cdot (2GH) = 3GH^2$$
$$\iff FE = \frac{3}{2}GH \iff EH = GH/2 \iff EH = GE.$$

Arithmétique

Solution de l'exercice 4. Supposons que (x, y) soit une solution de l'équation de l'énoncé. Alors, on vérifie facilement que les couples $(-y, x-y)$ et $(y-x, -x)$ sont également des solutions. Si deux de ces trois couples étaient égaux, on aurait nécessairement $x = y = 0$, mais $(0, 0)$ n'est pas solution de l'équation. Donc l'équation admet bien au moins trois solutions.

Supposons par l'absurde qu'il existe des entiers x et y tels que $x^3 - 3xy^2 + y^3 = 2009$. Remarquons que pour tout entier x, on a $x \equiv x^3 \pmod 3$, et donc $x + y \equiv x^3 + y^3 \pmod 3$. Or, si x et y vérifient l'équation, $x^3 + y^3 = 2009 + 3xy^2 \equiv 2 \pmod 3$. Ainsi, on a trois possibilités :

☞ si $x \equiv y \equiv 1 \pmod 3$, alors $x^3 - 3xy^2 + y^3 \equiv 1 - 3 + 1 \equiv -1 \pmod 9$ ce qui contredit la congruence $2009 \equiv 2 \pmod 9$,

☞ si $x \equiv 0 \pmod 3$ et $y \equiv 2 \pmod 3$, on a $x^3 - 3xy^2 + y^3 \equiv 0 - 0 - 1 \equiv -1 \pmod 9$,

☞ si $x \equiv 2 \pmod 3$ et $y \equiv 0 \pmod 3$, on a $x^3 - 3xy^2 + y^3 \equiv -1 + 0 + 0 \equiv -1 \pmod 9$.

Ainsi, l'équation ne peut pas avoir de solution.

Solution de l'exercice 5. Voir la solution de l'exercice 98, page 110.

Solution de l'exercice 6. Supposons que le couple (k, m) soit solution, et notons n le plus petit indice pour lequel $x_n = 1$. Pour tout $s < n$, on a alors $x_{s+1} = \frac{2x_s - 1}{1 - x_s}$ et donc :

$$x_s = \frac{1 + x_{s+1}}{2 + x_{s+1}}.$$

En particulier, si (y_t) désigne la suite définie par $y_0 = 1$ et $y_{t+1} = \frac{1+y_t}{2+y_t}$, on a facilement $x_0 = y_n$. On en déduit facilement que les x_0 pour lesquels la suite (x_n) contient 1 sont exactement les valeurs prises par les termes de la suite (y_t).

Une récurrence immédiate montre que $y_t = \frac{F_{2t+1}}{F_{2t+2}}$. Il s'agit donc de déterminer les couples (k, m) pour lesquels il existe $t \geqslant 0$ tel que $\frac{F_{2t+1}}{F_{2t+2}} = \frac{F_k}{F_m}$. De $F_{2t+2} = F_{2t+1} + F_{2t}$ et de la croissance de la suite de Fibonacci, on déduit facilement que le quotient $\frac{F_{2t+2}}{F_{2t+1}}$ est compris entre 1 et 2. De même, de $F_{k+2} = 2F_k + F_{k-1}$, on déduit $\frac{F_{k+2}}{F_k} > 2$ dès que $k > 1$. Ainsi, si $m > k+1$, on a aussi $\frac{F_m}{F_k} > 2$ et donc l'égalité que l'on souhaite ne saurait être satisfaite. On a donc nécessairemment $k = m + 1$. Par ailleurs, on montre facilement par récurrence que deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci sont premiers entre eux. Il en résulte que l'égalité $\frac{F_{2t+1}}{F_{2t+2}} = \frac{F_k}{F_m}$ implique $k = 2t+1$ et $m = 2t+2$. Au final, les solutions du problème sont les couples de la forme $(2t+1, 2t+2)$ avec $t \geqslant 0$.

3 En test

Pour les tests, les élèves étaient répartis en trois groupes de niveau : le premier groupe devait résoudre les exercices 1, 2 et 3, le deuxième groupe les exercices 2, 3 et 4 et enfin le dernier groupe les exercices 3, 4 et 5.

3.1 Le test de géométrie

Exercice 1. Soient A, B, C trois points sur un cercle Γ. Soient E et F les milieux respectifs des arcs $\widehat{AB}$ et $\widehat{AC}$. La droite (EF) coupe (AB) et (AC) en respectivement M et N. Montrer que $AM = AN$.

Exercice 2. Soient ABC un triangle, Γ son cercle circonscrit de centre O. Soient D le milieu du côté $[AB]$ et E le centre de gravité du triangle ACD. Montrer que les droites (OE) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $AB = AC$.

Exercice 3. Soit ABC un triangle avec $AB > BC$. On note M le milieu de $[AC]$ et L le pied de la bissectrice issue de B. Soit D l'intersection de la parallèle à (AB) passant par M et de la droite (BL). Soit E l'intersection de la parallèle à (BC) passant par L et de la droite (BM). Montrer que l'angle $\widehat{EDL}$ est droit.

Exercice 4. Dans un triangle ABC, on note M le milieu du côté $[BC]$, I le point de contact du cercle inscrit avec le côté $[BC]$, H et K les pieds de la hauteur et de la bissectrice issue de A. Montrer qu'on a l'égalité :

$$MI \cdot HI = MH \cdot KI.$$

Exercice 5. Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles de centres respectifs O_1 et O_2, et dont la somme des rayons est inférieure à la distance O_1O_2. On note K et L les points de contact d'une tangente extérieure commune à Γ_1 et Γ_2 respectivement. On note M et N les points de contact à Γ_1 et Γ_2 respectivement d'une tangente commune intérieure. Montrer que les droites (KM), (NL) et (O_1O_2) sont concourrantes.

3.2 Le test d'arithmétique

Exercice 1. Montrer qu'aucun nombre de la forme $4^a(8k+7)$ ne peut s'écrire comme somme de trois carrés.

Exercice 2. Soit p un nombre premier.
a) Montrer que si $a \equiv b \pmod p$, alors $a^p \equiv b^p \pmod{p^2}$.
b) Combien y a-t-il d'entiers $n \in \{1, 2, \ldots, p^2\}$ pour lesquels l'équation $x^p \equiv n \pmod{p^2}$ possède au moins une solution ?

Exercice 3. Trouver tous les entiers n tels qu'il existe deux nombres premiers jumeaux p et q (c'est-à-dire tels que $q = p+2$) tels que $2^n + p$ et $2^n + q$ soient également deux nombres premiers jumeaux.

Exercice 4. Trouver les entiers naturels k de la forme $k = \frac{a^2+ab+b^2}{ab-1}$ où a et b sont deux entiers naturels tels que $ab \neq 1$.

Exercice 5. Dans le pays de Timbroland régi par l'impitoyable LoJac, il y a deux sociétés de timbres. Elles émettent tour à tour des timbres d'un nombre entier strictement plus grand que 1 de jacomos (la monnaie officielle du pays). Malheureusement, ce despote interdit la publication de nouveaux timbres dont le montant peut déjà être composé avec des timbres en vigueur. La première société qui ne peut plus créer de timbre reçoit les foudres du souverain (on vous laisse imaginer)... Laquelle des deux sociétés a une stratégie gagnante pour éviter le châtiment ?

3.3 Le test final

Exercice 1. Montrer que $4^9 + 6^{10} + 3^{20}$ n'est pas premier.

Exercice 2. On a un damier de côté 99. Il y a une mouche sur chaque case. En une étape, chaque mouche doit se déplacer d'exactement une case, en diagonale (plusieurs mouches peuvent alors se retrouver sur une même case). Après une étape, quel est le nombre minimal de cases libres ?

Exercice 3. Soient ABC un triangle et P un point intérieur à ABC. On note L et M les projetés respectifs de P sur les droites (BC) et (AC). Si D est le milieu de $[AB]$, montrer que $DL = DM$.

Exercice 4. Soient $a_0, \dots, a_n$ des nombres réels de l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$ tels que :

$$\tan\left(a_0 - \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(a_1 - \frac{\pi}{4}\right) + \cdots + \tan\left(a_n - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant n - 1.$$

Montrer que :

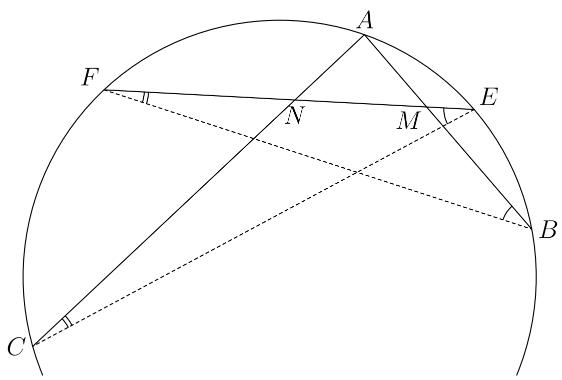
$$\tan a_0 \ \tan a_1 \cdots \tan a_n \geqslant n^{n+1}.$$

Exercice 5. On dispose d'un plateau sur lequel sont disposés n trous en cercle. Certains de ces trous contiennent un certain nombre de billes. Il est autorisé de prendre toutes les billes contenues dans un trou et de les distribuer une par une dans les trous suivants en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre.

Montrer qu'il est possible, en utilisant l'opération précédente, d'atteindre n'importe quelle position à partir de n'importe quelle autre ayant le même nombre de billes.

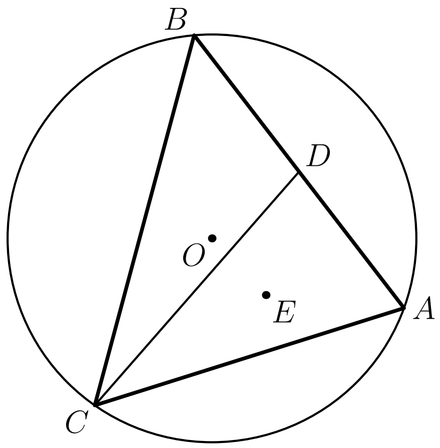
3.4 Les solutions

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> *(géométrie).*



Montrer que $AM = AN$ équivaut à montrer que $\widehat{AMN} = \widehat{ANM}$. On va faire une chasse aux angles. Tout d'abord, $\widehat{AMN} = 180° - \widehat{FMB}$ et $\widehat{FMB} = 180° - \widehat{MBF} - \widehat{BFM}$ donc $\widehat{AMN} = \widehat{MBF} + \widehat{BFM}$. Les arcs $\overset{\frown}{AF}$ et $\overset{\frown}{FC}$ ont même longueur, donc le théorème de l'angle inscrit donne les égalités $\widehat{MBF} = \widehat{FEC}$ et $\widehat{BFM} = \widehat{ECA}$. Enfin, $\widehat{FEC} + \widehat{ECA} = 180° - \widehat{CNE} = \widehat{ANM}$. D'où l'égalité $\widehat{AMN} = \widehat{ANM}$.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> *(géométrie).*



On a $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$. Il vient donc :

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{6}(3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC})$$

Par conséquent, les droites (CD) et (OE) sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{OE} = 0$, c'est-à-dire :

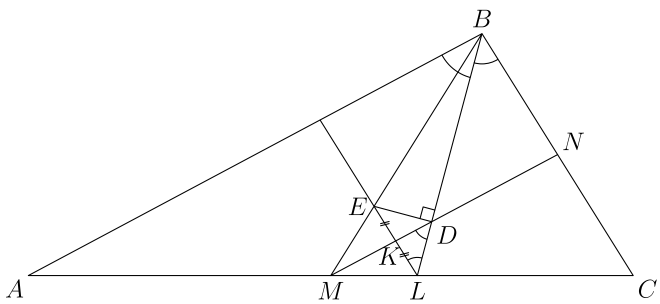
$$(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}) \cdot (3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}) = 0.$$

En développant, et compte-tenu du fait que :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OC} = R^2$$

(où R est le rayon du cercle circonscrit à ABC), on en déduit que les droites (CD) et (OE) sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) = 0$, soit $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$, ce qui revient à dire que (OA) est perpendiculaire à (BC), ou encore que ABC est isocèle en A.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> *(géométrie).* Notons N le point d'intersection de (BC) et (MD), et K celui de (EL) et (MD). Montrons que le triangle EDL est rectangle en D. Pour cela, on va établir que $EK = KL = KD$.



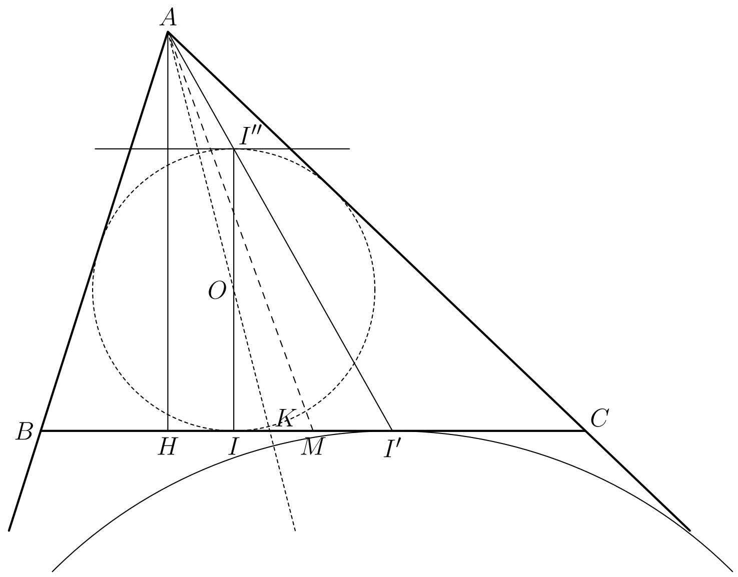
Tout d'abord, d'après le théorème de Thalès et le parallélisme de (EL) et (BC), on a

$$\frac{EK}{BN} = \frac{MK}{MN} = \frac{KL}{NC}.$$

Mais, encore par le théorème de Thalès, comme les droites (MN) et (AB) sont parallèles et que M est le milieu de $[AC]$, N est le milieu de $[BC]$. Ainsi, $BN = NC$ et donc $EK = KL$.

Les angles $\widehat{ELB}$ et $\widehat{LBC}$ sont alterne-interne, donc de même mesure. Les angles $\widehat{MDL}$ et $\widehat{ABL}$ sont correspondants, donc également de même mesure. Or, $\widehat{LBC} = \widehat{ABL} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$ donc $\widehat{ELB} = \widehat{MDL}$ et le triangle KDL est isocèle. Donc $KD = KL$.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> *(géométrie).*

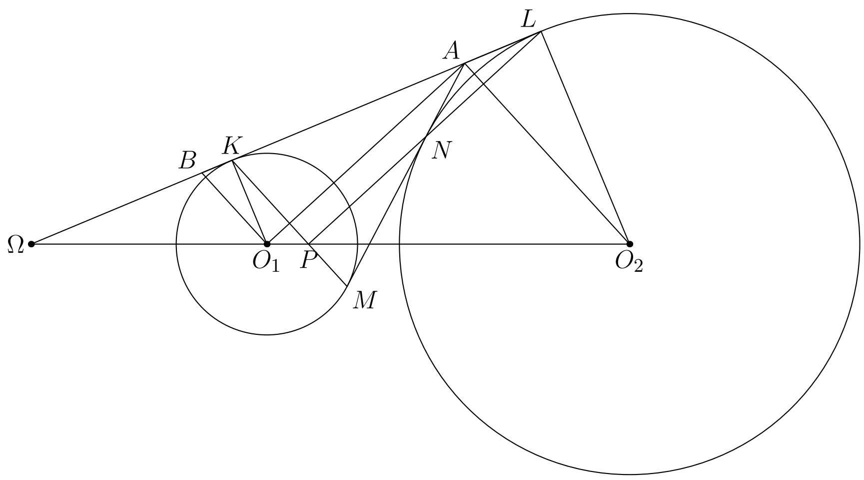


Soient O le centre du cercle inscrit, I' le point de contact du cercle exinscrit dans l'angle $\widehat{A}$, et I'' le symétrique de I par rapport à O. Il est bien connu (voir exercice 25 du cours de géométrie d'Animath) que $BI = \frac{BA+BC-AC}{2}$, et de même on démontre que $BI' = \frac{CA+CB-AB}{2}$. On en déduit que M est le milieu de $[II']$. D'autre part, l'homothétie de centre A qui envoie le cercle inscrit sur le cercle exinscrit, transforme I'' en I'. Ainsi, les points A, I' et I'' sont alignés.

L'égalité de l'énoncé s'écrit alors $\frac{HI}{KI} = \frac{MH}{MI}$, soit $\frac{HK}{KI} = \frac{MH}{MI} + 1$. Or on a $\frac{HK}{KI} = \frac{HA}{OI}$, d'où

$$\frac{MH}{MI} + 1 = \frac{HI'}{MI'} = \frac{2HI'}{II'} = \frac{2HA}{II''} = \frac{2HA}{2OI} = \frac{HK}{KI}.$$

Solution de l'exercice 5 (géométrie). Soit P l'intersection des droites (KM) et (LN) et A l'intersection des deux tangentes (KL) et (MN). On cherche à montrer que le point P appartient à la droite (O_1O_2).



Première solution. On introduit Ω le point d'intersection de (KL) avec (O_1O_2), c'est-à-dire le centre de l'homothétie de rapport positif envoyant Γ_1 sur Γ_2, notée h. Soit B l'intersection de la parallèle à (KM) passant par O_1 et de la droite (KL). Les droites (AO_1) et (AO_2) sont les deux bissectrices de l'angle $\widehat{NAL}$. Ainsi, elles sont perpendiculaires, d'où on déduit que (AO_2) est parallèle à (KM), et donc à (BO_1). L'homothétie h envoie O_1 sur O_2, K sur L et (BO_1) sur (AO_2). Ainsi, elle envoie le triangle O_1BK sur O_2AL. Par conséquent, l'homothétie h' de centre

Ω qui envoie B sur K envoie A sur L, et par suite la droite (BO_1) sur (KM). De plus, les droites (AO_1) et (LN) sont toutes deux perpendiculaires à (AO_2) et donc parallèles entre elles. On en déduit que h' envoie (AO_1) sur (LN). D'où il suit que O_1, vu comme intersection de (AO_1) et (BO_1) est envoyé sur P, intersection de (KM) et (LN). La conclusion est maintenant claire.

Deuxième solution. Considérons les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de diamètres respectifs $[KL]$ et $[MN]$, et appelons (Δ) leur axe radical. Les deux droites (KM) et (LN) étant perpendiculaires, le point P est à la fois sur $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, il est donc aussi sur (Δ). Par ailleurs, (O_1K) étant tangent à $\mathcal{C}_1$, la puissance de O_1 par rapport à ce cercle est simplement O_1K^2. De même, la puissance de O_1 par rapport à $\mathcal{C}_2$ est O_1M^2. Ainsi O_1 est sur (Δ). Pareillement, on montre que O_2 appartient à (Δ), ce qui conclut.

Solution de l'exercice 1 *(arithmétique).* On raisonne par récurrence sur a. Si $a = 0$, il s'agit de montrer que les nombres congrus à 7 modulo 8 ne sont pas sommes de trois carrés, ce qui se voit directement après avoir constaté que les carrés modulo 8 sont 0, 1 et 4.

Supposons maintenant le résultat vrai pour a, et démontrons-le pour $a+1$. Supposons par l'absurde qu'il existe des entiers x, y et z tels que$4^{a+1}(8k+7) = x^2+y^2+z^2$. Modulo 4, on obtient $x^2+y^2+z^2 \equiv 0 \pmod 4$. Les carrés modulo 4 n'étant que 0 et 1, la seule solution est $x \equiv y \equiv z \equiv 0 \pmod 4$. En particulier x, y et z sont pairs et on peut écrire $x = 2x'$, $y = 2y'$ et $z = 2z'$. En réinjectant dans l'équation diophantienne de départ, il vient $4^a(8k+7) = x'^2+y'^2+z'^2$, ce qui n'est pas possible d'après l'hypothèse de récurrence.

Solution de l'exercice 2 *(arithmétique).* *a)* On écrit $a = b + kp$ où k est un certain entier et on développe :

$$a^p = (b+kp)^p = b^p + \sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i} b^i (kp)^{p-i}.$$

Chacun des termes de la dernière somme étant divisible par p, on obtient bien $a^p \equiv b^p \pmod p$.
b) Il s'agit de déterminer combien de valeurs distinctes peut prendre la quantité $x^p \pmod{p^2}$. D'après la question précédente, il y en a en fait au plus p puisque deux entiers congrus modulo p vont donner la même valeur. Mais, par le petit théorème de Fermat, on a $x^p \equiv x \pmod p$, et donc de $x \not\equiv y \pmod p$, on déduit $x^p \not\equiv y^p \pmod p$ puis *a fortioti* $x^p \not\equiv y^p \pmod{p^2}$. Il y a donc au moins p valeurs atteintes. En mettant tout ensemble, on peut déterminer la réponse à la question de l'énoncé : c'est p.

Solution de l'exercice 3 *(arithmétique).* Il s'agit de déterminer les entiers n pour lesquels il existe un nombre premier p tel que $p+2$, $p+2^n$ et $p+2+2^n$ sont tous les trois premiers. Si on regarde modulo 3, ces quatre nombres, on obtient :

- ☞ si n est pair, p, $p+2$, $p+1$ et p
- ☞ si n est impair, p, $p+2$, $p+2$ et $p+1$

Dans tous les cas, il y a parmi ces nombres un multiple de 3, qui ne peut être premier s'il est différent de 3. On en déduit que forcément $p = 3$, et aussi à vrai dire que n est nécessairement impair : on écrit $n = 2m+1$.

Il s'agit donc maintenant de trouver les entiers m tels que $2 \times 4^m + 3$ et $2 \times 4^m + 5$ sont premiers. Modulo 5, les puissances de 4 sont alternativement 1 et -1. Ainsi, si m est pair, $2 \times 4^m + 3$ est divisible par 5 et donc ne peut être premier, à moins de valoir 5. On en déduit que soit $m = 0$, soit m est impair. La première possibilité donne une solution qui est $n = 1$. On suppose donc maintenant m impair et on écrit $m = 2s+1$, soit $n = 4s+3$. On a alors $2^n = 8 \times 16^s$. Cette quantité est congrue à 2^s modulo 7 et en étudiant comme précédemment la suite des puissances, on se rend compte que s doit être un multiple de 3. Ainsi, on écrit $s = 3t$, *i.e.* $n = 12t+3$. On raisonne finalement modulo 13 : le petit théorème de Fermat montre que l'on a alors $2^n \equiv 8$

(mod 13) et donc que 13 divise $2^n + 5$; ainsi il ne peut pas être premier sauf s'il est égal à 13 (ce qui correspond à $n = 3$).

Au final, les seules solutions est $n = 1$ et $n = 3$.

Solution de l'exercice 4 (arithmétique). Si $ab = 0$, la valeur de k est strictement négative, ce qui est exclu par le problème. On ne considère donc que des entiers naturels a, b tels que $ab > 1$. La relation $k = \frac{a^2+ab+b^2}{ab-1}$ s'écrit $a^2 + (1-k)ab + b^2 + k = 0$. Montrons d'abord que $k \geqslant 4$. Si on avait $k \leqslant 3$, on aurait

$$a^2 + (1-k)ab + b^2 + k \geqslant a^2 - 2ab + b^2 + k \geqslant (a-b)^2 + k > 0,$$

ce qui est exclu. Ainsi, $k \geqslant 4$.

Parmi les couples (a, b) d'entiers naturels tels que $ab > 1$ et $a^2 + (1-k)ab + b^2 + k = 0$, considérons celui où a est minimal. L'entier b est racine du trinôme à coefficients entiers $f(x) = x^2 + (1-k)ax + a^2 + k$. La somme des racines de $f(x)$ vaut $(k-1)a$, et le produit vaut $a^2 + k$. L'autre racine de $f(x)$ est donc $c = (k-1)a - b$, qui est entier, et on a la factorisation

$$f(x) = x^2 + (1-k)ax + a^2 + k = (x-b)(x-c). \tag{IV.6}$$

Avec $bc = a^2 + k$, on voit que $c > 0$. Les entiers b et c jouent le même rôle ; sans nuire à la généralité, on peut supposer $b \leqslant c$. On a de plus $a \leqslant b$ car sinon, en échangeant a et b, on contredirait la minimalité de a. Ainsi $a \leqslant b \leqslant c$.

Dans la relation (IV.6), faisons $x = a$. Il vient $f(a) = (3-k)a^2 + k = (b-a)(c-a) \geqslant 0$. Il s'ensuit que $k - (k-3)a^2 \geqslant 0$, donc (en se souvenant que $k \geqslant 4$)

$$a^2 \leqslant \frac{k}{k-3} = 1 + \frac{3}{k-3} \leqslant 1 + 3 = 4$$

puis $a \leqslant 2$, donc $a = 1$ ou $a = 2$.

Si $a = 1$, alors $f(a) = 3 = (b-a)(c-a)$. Comme 3 est premier et $b \leqslant c$, cela impose $b - a = 1$ et $c - a = 3$, puis $b = 2$. Finalement, le couple $(a, b) = (1, 2)$ donne $k = 7$. Si $a = 2$, l'inégalité $k - (k-3)a^2 \geqslant 0$ implique $k \leqslant 4$, puis $k = 4$ (on a vu que $k \geqslant 4$) et $f(a) = 0$, d'où $b = 2$. Finalement, le couple $(a, b) = (2, 2)$ donne $k = 4$. En conclusion, les valeurs possibles de k sont 4 et 7, et les couples (a, b) minimaux qui correspondent sont respectivement $(2, 2)$ et $(1, 2)$.

Remarque. Il faut bien voir que toute la solution repose sur le couple (a, b) minimal associé à k ; par ailleurs, on vérifie que chacune des valeurs et 7 de k peut être obtenue pour une infinité d'autres couples (a, b).

Solution de l'exercice 5 (arithmétique). Nous allons montrer que la société qui entâme le jeu a une stratégie gagnante. Au premier tour, elle consiste à jouer un nombre premier $p \geqslant 5$. Notons q la réponse de la seconde société ; par hypothèse, ce n'est pas un multiple de p, c'est donc un entier premier avec p. L'ensemble des montants pouvant être réalisé avec les deux timbres émis est alors l'ensemble S des entiers de la forme $ap + bp$, avec a et b dans $\mathbb{N}$. Par la proposition 2.4.4 du poly d'arithmétique d'Animath (le *Coin exchange problem*), un entier x est dans S si et seulement si $pq - p - q - x$ ne l'est pas. En particulier, S contient tous les entiers strictement supérieurs à $ab - a - b$, ce qui montre qu'il ne reste plus qu'un nombre fini de timbres à émettre. Ainsi, la partie prendra nécessairement fin en un temps fini. Ceci nous permet d'affirmer à ce niveau de la partie[1] que l'une des deux sociétés a une stratégie gagnante.

On raisonne maintenant par l'absurde en supposant que la seconde société a une stratégie gagnante, et on demande à la première société d'émettre le timbre de valeur $pq-p-q$ (qui d'après le *Coin d'exchange problem* ne peut pas déjà être réalisé). Soulignons que ce choix n'élimine aucune

[1] On aurait pu voir cela dès le début, mais cela aurait compliqué la démonstration de façon inutile.

autre valeur. À présent, la stratégie gagnante de la seconde société lui dicte d'émettre le timbre de x jacomos. Mais alors, si la première société avait émis ce timbre de x jacomos au tour précédent, elle serait arrivée directement dans la position courante qui est gagnante, d'après notre hypothèse. Se faisant, elle aurait volé la stratégie de la première société. On obtient une contradiction qui termine l'exercice.

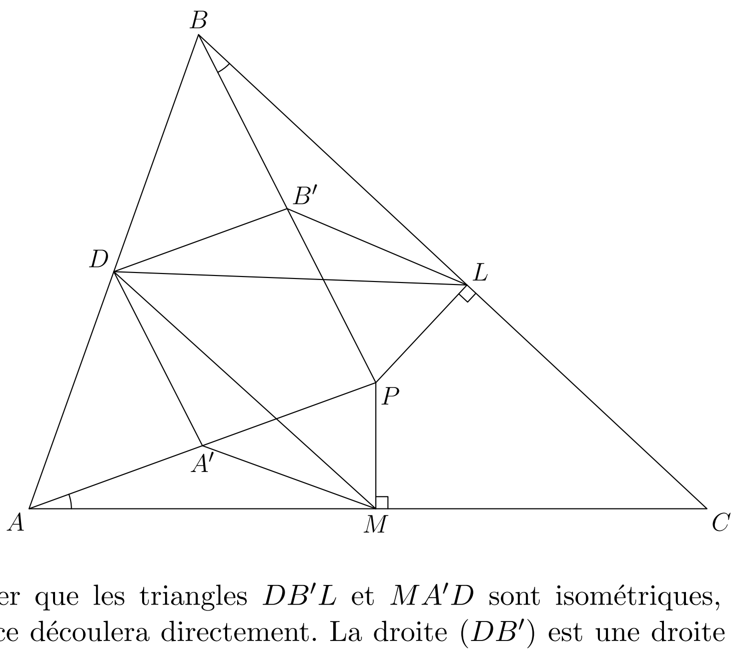
Solution de l'exercice 1 (test final). Il suffit de remarquer que $4^9 + 6^{10} + 3^{20} = (2^9 + 3^{10})^2$.

Solution de l'exercice 2 (test final). Le nombre minimal de cases libres est 99.

Dans ce paragraphe, on va voir comment laisser au plus 99 cases libres. Parmi les diagonales de direction Sud-Est, 99 ont un nombre impair de cases. Sur chaque diagonale ainsi dirigée, on regroupe les mouches par groupes de 2 voisines. Il reste au plus une mouche seule (dans le cas d'une longueur impaire). Les voisines peuvement échanger leurs places. On laisse les mouches "célibataires" aller où elles les veulent. Les seules mouches qui peuvent laisser leur place vacante sont les mouches "célibataires" qui sont au nombre de 99 (une par diagonale de longueur impaire). On sait donc que le nombre recherché est au plus 99.

Il ne peut y avoir moins de 99 cases libres. En effet, numérotons les colonnes de 1 à 99 et imaginons que les colonnes paires sont bleues et les autres rouges. On dit qu'une mouche est d'une couleur si elle est initialement sur une colonne de cette couleur. Comme un déplacement envoie chaque mouche sur une case d'une autre couleur, les seules mouches qui vont pouvoir essayer de recouvrir les 50×99 cases rouges sont les 49×99 mouches bleues. Il y aura donc forcément $99 \times (50 - 49) = 99$ cases rouges libres.

Solution de l'exercice 3 (test final). On introduit les points A' et B' milieux respectifs de $[AP]$ et $[BP]$.



Nous allons montrer que les triangles $DB'L$ et $MA'D$ sont isométriques, à partir de quoi le résultat de l'exercice découlera directement. La droite (DB') est une droite des milieux dans le triangle APB, elle est donc parallèle à (AP). De même (DA') est parallèle à (BP). On en déduit que $A'DB'P$ est un parallélogramme. En particulier, $DA' = B'P$. Mais on a aussi $B'P = B'L$ puisque le triangle BPL est rectangle. Il s'ensuit l'égalité $DA' = B'L$. De même, on démontre $DB' = A'M$. Il ne reste donc plus qu'à prouver que les angles $\widehat{DA'M}$ et $\widehat{DB'L}$ sont égaux. Pour cela, on remarque déjà que $\widehat{DA'P} = \widehat{DB'P}$ étant donné que $DA'PB'$ est un parallélogramme. Par ailleurs, on a :

$$\widehat{PB'L} = 2\,\widehat{PBL} = 2\,\widehat{PAC} = \widehat{PA'M}$$

ce qui conclut.

Solution de l'exercice 4 *(test final).* Posons $b_i = \tan\left(a_i - \frac{\pi}{4}\right)$. L'hypothèse nous dit que $-1 < b_i < 1$ et

$$1 + b_i \geqslant \sum_{k \neq i} (1 - b_k) \geqslant n \prod_{k \neq i} (1 - b_k)^{1/n}$$

la deuxième inégalité étant simplement l'inégalité arithmético-géométrique. En multipliant toutes les inégalités précédentes pour i variant de 0 à n, on obtient :

$$\prod_{i=0}^{n} (1 + b_i) \geqslant n^{n+1} \prod_{k \neq i} (1 - b_k)$$

à partir de quoi la conclusion est immédiate si l'on remarque que $\frac{1+b_k}{1-b_k} = \tan a_k$.

Solution de l'exercice 5 *(test final).* Montrons tout d'abord qu'à partir de n'importe quelle position, on peut mettre toutes les billes dans un même trou (position que nous noterons par la suite L). En réalité, cela est assez simple : on choisit un trou, et on déplace les éventuelles billes contenues dans les autres trous jusqu'à ce qu'elles rentrent toutes dans le trou réceptacle.

On considère maintenant le graphe orienté G dont les sommets sont les toutes les positions possibles (avec un nombre fixé de billes) et dont les arêtes représentent les mouvements autorisés. Avant toute chose, remarquons que chaque sommet S du graphe précédent a autant d'arêtes entrantes que d'arêtes sortantes. En effet, le nombre d'arêtes sortantes, c'est-à-dire le nombre de positions pouvant être atteintes (en un coup) à partir de S, s'égalise manifestement au nombre de trous non vides dans S : en effet, au choix d'un tel trou, on associe la position obtenue en distribuant les billes de ce trou selon les règles de l'énoncé, et il est alors clair que chaque position résultante est différente (par exemple, le nombre de billes de chaque trou augmente sauf celui du trou choisi). On montre pareillement (en inversant le mouvement de distribution) que le nombre d'arêtes entrantes est aussi égal au nombre de trous non vides de S, ce qui démontre finalement notre assertion.

Soit maintenant A un sommet de G. On veut montrer — et c'est suffisant pour conclure grâce au premier alinéa de la solution — qu'il existe un chemin reliant L à A. Pour cela, on commence par considérer un chemin reliant A à L que l'on peut certainement choisir sans cycle. Effaçons du graphe G les arêtes par lesquelles passent notre chemin et continuons à parcourir le graphe à partir de L en choisissant des arêtes au hasard tant que cela reste possible, arêtes que l'on efface au fur et à mesure. L'égalité entre degré entrant et degré sortant en chaque sommet montre que le parcours s'arrête forcément au sommet A, donnant ainsi un chemin de L vers A comme souhaité.

V. Les exercices de TPE

1 Les énoncés

Exercice 1 (*résolu par Nikolas Stott*). Si n est un entier, on note $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n. Trouver tous les entiers n tels que $n = d(n)^2$.

Exercice 2 (*résolu par Emmanuel Lecouturier, Sergio Vega et Pietro Vertechi*). On choisit un point à l'intérieur d'un $2n$-gone régulier et on le relie à tous les sommets du polygone. Les $2n$ triangles ainsi obtenus sont coloriés en noir et blanc en alternance. Montrer que l'aire totale des triangles noirs est égale à celle des triangles blancs.

Exercice 3. On considère un carré A (avec son intérieur) dont une des diagonales est horizontale. Est-il possible de découper A en un nombre fini de morceaux et de translater chacun de ces morceaux pour reconstituer un carré B de même dimension dont un des côtés est horizontal ?

Exercice 4. 1. Prouver que dans tout groupe de six personnes, on peut toujours en trouver trois qui se connaissent mutuellement, ou trois qui deux à deux ne se connaissent pas. (La relation "se connaître" est supposée symétrique).

2. Prouver que dans tout groupe de dix personnes, on peut toujours en trouver quatre qui se connaissent mutuellement, ou trois qui deux à deux ne se connaissent pas.

Exercice 5 (*résolu par Gabriel Pallier*). Pour quels entiers k existe-t-il une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ vérifiant $f(2006) = 2007$ et :

$$f(xy) = f(x) + f(y) + kf(\text{PGCD}(x, y))$$

pour tous entiers x et y ?

Exercice 6 (*résolu par Pietro Vertechi*). Un iceberg a la forme d'un polyèdre convexe flottant sur la mer. Se peut-il qu'au moins 90% du volume de l'iceberg se trouve en dessous du niveau de l'eau et qu'au moins 50% de sa surface soit au dessus ?

Exercice 7 (*résolu par Christoph Kröner, Emmanuel Lecouturier et Sergio Vega*). Nous avons 13 boules de poids 1 à 13 kg, mais d'apparence similaire. À l'usine on a collé sur chaque boule une petite étiquette indiquant son poids (ainsi, les étiquettes vont aussi de 1 à 13). Nous voulons vérifier que toutes les étiquettes ont été collées correctement, sans permutations par rapport aux vrais poids des boules. Pour cela nous disposons d'une balance à deux plateaux. Elle ne permet pas de dire le poids de telle ou telle boule (ou ensemble de boules). Elle permet seulement de vérifier si l'ensemble de boules posées sur le plateau gauche pèse moins, autant ou plus que l'ensemble de boules posées sur le plateau droit. Montrer qu'on peut s'assurer en 3 pesées que toutes les étiquettes sont collées correctement.

Exercice 8 (*résolu par Pietro Vertechi*). Soit $n \geqslant 1$ un entier, et soient $X_1, \ldots, X_{2^n-1}$ des n-uplets d'entiers relatifs. Montrer qu'il existe un n-uplet d'entiers relatifs X tel que pour tout i, le segment ouvert $]X, X_i[$ ne passe par aucun point à coordonnées entières.

Exercice 9 (*résolu par Stefano Spigler*). Trouver tous les couples de nombres premiers (p, q) tels que :

$$x^{3pq} \equiv x \pmod{3pq}$$

pour tout entier x.

Exercice 10 (*résolu par Thomas Williams*). Cinq pierres d'apparence identique ont des masses différentes : notons $m(x)$ la masse de x. Oleg connait les poids des pierres et Dmitry essaie de les deviner. Pour cela, on convient qu'il peut choisir trois pierres A, B, C et poser la question suivante à Oleg : « est-il vrai que $m(A) < m(B) < m(C)$? », qui répond donc par oui ou non.

Dmitry peut-il à coup sûr déterminer l'ordre des pierres par ordre croissant de masse en ne posant que neuf questions ?

Exercice 11. Combien y a-t-il de zéros dans le nombre :

$$1234567891011121314151617181920212 2...20062007$$

Exercice 12 (*résolu par Jacques Darné, Ambroise Marigot, Charles Masson et Thomas Williams*). Un quadrilatère convexe $ABCD$ est tel que $\widehat{ABC} + \widehat{BCD} < \pi$. Soit E le point d'intersection des droites (AB) et (CD). Montrer que $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ si, et seulement si :

$$AC^2 = CD \cdot CE - AB \cdot AE.$$

Exercice 13. Existe-t-il un triangle dont le périmètre fait moins de 1 centimètre, tandis le rayon de son cercle circonscrit excède 1 kilomètre ?

Exercice 14. On appelle A et B deux sommets opposés d'un cube de côté 1. Quel est le rayon de la sphère centrée à l'intérieur du cube, tangente aux trois faces qui se rencontrent en A et aux trois arêtes qui se rencontrent en B ?

Exercice 15 (*résolu par Andrea Fogari, Christoph Kröner, Jean-François Martin et Pietro Vertechi*). Soient $x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels strictement supérieurs à 1. On compte le nombre de réels de la forme $\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n$, $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ qui sont dans un intervalle donné de longueur 1. Quel est le nombre maximal que l'on peut obtenir ainsi ?

Exercice 16. Est-ce que 1 000 000 027 est premier ?

Exercice 17. Lors d'une soirée il y a 500 couples. Certaines personnes se serrent la main, d'autres non. On convient qu'une personne ne sert pas la main de son conjoint, ni la main à elle meme. À la fin de la soirée on questionne les personnes présentes sur le nombre de mains qu'elles ont serré, on obtient toutes les réponses possibles comprises entre 0 et 998. Une personne n'ayant serré aucune main, combien de mains a serré son conjoint ?

Exercice 18 (*résolu par Vincent Sebag*). Soit ABC un triangle. On construit extérieurement à celui-ci les carrés $ABED$, $BCGF$ et $ACHI$. Montrer que les points D, E, F, G, H et I sont cocycliques si, et seulement si ABC est équilatéral ou isocèle rectangle.

Exercice 19 (*résolu par Luc Lehericy*). Un polygone régulier à 2007 côtés est pavé par des triangles dont les sommets sont choisis parmi les sommets du polygone. Montrer qu'un seul triangle du pavage a ses trois angles aigus.

Exercice 20. Deux polynômes à coefficients entiers ont une racine commune qui est un entier strictement négatif. Peut-il exister un entier positif sur lequel les polynômes s'évaluent respectivement en 2007 et 2008 ?

Exercice 21. On dispose d'un carré $ABCD$ de côté $a > 1$. On place le point A' (resp. B', resp. C', resp. D') sur le côté $[AB]$ (resp. $[BC]$, resp. $[CD]$, resp $[DA]$) à distance 1 de l'extrémité A (resp. B, resp. C, resp. D). On obtient un carré $A'B'C'D'$ (plus petit) pour lequel on réitère la construction.

Quelle est la plus petite valeur de a pour laquelle il est possible d'itérer 2007 fois la construction précédente ?

Exercice 22 (*résolu par Nicolas Klarsfeld*). Soient $\mathcal{C}$ un cercle, A et B deux points de ce cercle, et P le point du segment $[AB]$ tel que $AP = 2PB$. Soient D et E les intersections de la perpendiculaire à (AB) passant par P avec le cercle $\mathcal{C}$. Montrer que le milieu H de $[AP]$ est l'orthocentre du triangle ADE.

Exercice 23. Dans l'écriture décimale de A, les chiffres apparaissent par ordre (strictement) croissant de gauche à droite. Quelle est la somme des chiffres de $9A$?

Exercice 24 (*résolu par Ambroise Marigot*). Montrer qu'un couple (p, q) d'entiers strictement positifs vérifie l'équation

$$p^2 - 2q^2 = \pm 1$$

si et seulement si

$$\frac{p}{q} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{2}}}}$$

avec p et q premiers entre eux.

Exercice 25 (*résolu par Nikolas Stott*). Le palais du Minotaure est constitué d'un million de cellules reliées par des couloirs. De chaque cellule partent exactement trois couloirs. Le Minotaure, parti d'une des cellules, parcourt son palais, en tournant alternativement à droite et à gauche dans les cellules par lesquelles il passe. Montrer qu'il finira par revenir dans sa cellule de départ.

Exercice 26. Trouver tous les couples d'entiers (x, y) tels que :

$$x^3 = y^3 + 2y^2 + 1.$$

Exercice 27. Soit $ABCD$ un carré de côté 1. On note E, F, G et H les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Les droites (AF) et (EC) se coupent en M, les droites (AG) et (CH) se coupent en N. Déterminer l'aire de $AMCN$.

Exercice 28. Soit ABC un triangle rectangle en A. Les bissectrices des angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ coupent respectivement $[AC]$ et $[AB]$ en P et Q. Soit M (resp. N) le pied de la perpendiculaire à (BC) passant par P (resp. par Q). Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{MAN}$?

Exercice 29 (*résolu par Victor Adam*). Montrer qu'il existe un entier divisible par 2^{100} et ne contenant pas le chiffre 0.

Exercice 30 (*résolu par Stefano Spigler*). Déterminer les 100 premiers chiffres après la virgule de
$$\left(5+\sqrt{26}\right)^{100}.$$

Exercice 31 (*résolu par Thomas Leherícy*). La suite (x_n) est définie de la manière récursive suivante : $x_1 = 10^{2007}+1$ et pour tout $n \geqslant 2$, x_n est le nombre $11x_{n-1}$ auquel on a retiré le chiffre de gauche. Montrer que la suite (x_n) est bornée.

Exercice 32 (*résolu par Andrea Fogari et Ambroise Marigot*). Un parallélépipède rectangle P est contenu dans un parallélépipède rectangle Q. Est-il possible que le périmètre de P soit plus grand que celui de Q ?

Exercice 33 (*résolu par Gabriel Pallier*). On note $\{x\}$ la partie décimale d'un réel x.

Montrer que $\{n\sqrt{3}\} > \frac{1}{n\sqrt{3}}$ pour tout entier n strictement positif.

Existe-t-il une constante $c > 1$ telle que $\{n\sqrt{3}\} > \frac{c}{n\sqrt{3}}$ pour tout entier n strictement positif ?

Exercice 34 (*résolu par Gaspard Ferey*). Soient A, B, C, D, E, F et G des points du plan tels que $AB = BC = CD = DE = EF = FG = GA$ et A, B, F, D d'une part et A, G, C, E d'autre part sont alignés. Calculer l'angle $\widehat{EAD}$.

Exercice 35 (*résolu par Jaouad Mourtada*). Soient cinq nombres vérifiant les propriétés suivantes :

- ☞ ils sont tous non nuls, et au moins l'un d'entre eux vaut 2007 ;
- ☞ quatre de ces nombres peuvent toujours être réordonnées pour former une suite géométrique.

Quels sont ces nombres ?

Exercice 36 (*résolu par Nicolas Klarsfeld*). Dans la fraction :
$$\frac{29 \div 28 \div 27 \div \cdots \div 16}{15 \div 14 \div 13 \div \cdots \div 2}$$
on place les mêmes parenthèses au numérateur et au dénominateur et on constate que le résultat de l'opération obtenue est un nombre entier. Quel est ce nombre ?

Exercice 37 (*résolu par Christopher Wells*). Soient $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions additivites (*i.e.* satisfaisant $f_i(x+y) = f_i(x) + f_i(y)$ pour tous réels x et y). On suppose que :
$$f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x) = ax^n$$
pour un certain réel a. Montrer qu'il existe un indice i pour lequel la fonction f_i est de la forme $f_i(x) = b_i x$, $b_i \in \mathbb{R}$.

Exercice 38 (*résolu par Sergio Vega*). Montrer que pour tous réels strictement positifs x et y,
$$\frac{2xy}{x+y} + \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geqslant \frac{x+y}{2} + \sqrt{xy}.$$

Exercice 39 (*résolu par Sébastien Miquel*). Montrer qu'il existe un entier divisible par 2^{100} et ne contenant que des chiffres 8 et 9.

Exercice 40. Montrer que pour tous entiers strictement positifs a et b, le nombre $(36a+b)(a+36b)$ n'est pas une puissance de 2.

Exercice 41 (*résolu par Jean-François Martin*). Un point P est contenu dans un polyèdre convexe. Pour chaque face F du polyèdre, on considère le projeté orthogonal P_F de P sur le plan de cette face. Montrer qu'il existe au moins une face F telle que P_F se trouve sur la face F elle-même, et non sur son prolongement.

Exercice 42. Soient $n \geqslant 3$ et $x_1, \dots, x_{n-1}$ des entiers positifs ou nuls. On suppose :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} &= n \\ x_1 + 2x_2 + \cdots + (n-1)x_{n-1} &= 2n-2. \end{aligned}$$

Calculer la valeur minimale de :

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(2n-k)x_k.$$

Exercice 43 (*résolu par Andrea Fogari et Christopher Wells*). Deux joueurs jouent au jeu suivant. Ils disposent d'un rectangle en papier $n \times m$ quadrillé. Tour à tour, chaque joueur choisit un noeud du réseau à l'intérieur du rectangle, ou bien sur son bord gauche ou inférieur. Il hachure les cases du rectangle qui se trouvent en haut à droite par rapport au noeud choisi. Puis il passe le rectangle à l'autre joueur. À chaque coup, chaque joueur est obligé de hachurer au moins une case non encore hachurée auparavant. Celui qui a hachuré la dernière case du rectangle a perdu. Lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante ?

Exercice 44 (*résolu par Ambroise Marigot*). Sandrine et Xavier jouent au jeu suivant. Sur une table sont disposées un certain nombre de colonnes de jetons. À chaque tour, chaque joueur réalise l'une (et une seule) des deux actions suivantes :

- ☞ choisir une colonne contenant un nombre pair $2k$ de jetons et la séparer en deux colonnes de k jetons,
- ☞ enlever de la table toutes les colonnes contenant un nombre impair de jetons.

Le joueur qui retire le dernier jeton gagne. Sandrine commence. Trouver les configurations initiales pour lesquelles Sandrine a une stratégie gagnante.

Exercice 45. La somme de vingt entiers consécutifs est 1030. Quel est le plus petit de ces entiers ?

Exercice 46. Trouver tous les réels x tels que :

$$\{(x+1)^3\} = x^3$$

où $\{x\}$ désigne la partie décimale de x.

Exercice 47. On colorie les nombres rationnels non nuls en deux couleurs : blanc et noir. On suppose que 1 est colorié en blanc, que x et $x+1$ ne sont jamais coloriés de la même couleur et que x et $\frac{1}{x}$ ont au contraire toujours la même couleur.

Quelle est la couleur de $\frac{1543}{275}$?

Exercice 48 (*résolu par Emmanuel Lecouturier*). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :

$$f(x^3+y^3) = (x+y)(f(x)^2 - f(x)f(y) + f(y)^2)$$

pour tous réels x et y. Montrer que pour tout réel x, on a $f(2007x) = 2007f(x)$.

Exercice 49 (*résolu par Jean-François Martin et Christopher Wells*). Les cercles S_1 et S_2 se rencontrent aux points P et Q. Si A_1 et B_1 sont deux points distincts sur $S_1 - \{P, Q\}$, les droites (A_1P) et (B_1P) recoupent S_2 en A_2 et B_2 respectivement, et les droites (A_1B_1) et (A_2B_2) se rencontrent en C . On note M le centre du cercle circonscrit au triangle A_1A_2C. Déterminer le lieu des points M lorsque A_1 et B_1 décrivent chacun $S_1 - \{P, Q\}$.

Exercice 50. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ strictement croissantes telles que pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $f(m) - f(n) = f(k)$.

Exercice 51 (*résolu par Anthony Mancini*). Une suite d'entiers (a_n) vérifie $a_{n+1} = a_n^3 + 1999$ pour tout n. Montrer qu'il y a parmi les a_n au plus un carré parfait.

Exercice 52 (*résolu par Andrea Fogari et Fabian Gundlach*). Trouver tous les n-uplets de réels strictement positifs $(a_1, \dots, a_n)$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 96 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 144 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^3 = 216.$$

Exercice 53 (*résolu par Luc Lehericy*). Déterminez tous les triplets (a, b, c) d'entiers strictement positifs tels que $a^2 + 2^{b+1} = 3^c$.

Exercice 54 (*résolu par Nicolas Klarsfeld*). Montrer que le nombre $\underbrace{111\dots111}_{3^n}$ est divisible par 3^n, mais pas par 3^{n+1}.

Exercice 55. Un rectangle $ABCD$ est contenu dans un rectangle $A'B'C'D'$. Est-il possible que le périmètre de P soit plus grand que celui de Q ?

Exercice 56. Trouver tous les nombres de 1 à 100 ayant un nombre impair de diviseurs positifs.

Exercice 57 (*résolu par Jean-François Martin*). Soit $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Combien y a-t-il de fonctions $f : \mathcal{P}(A)\backslash\{\emptyset\} \to A$ vérifiant $f(B) \in B$ et $f(B \cup C) \in \{f(B), f(C)\}$ pour toutes parties B et C non vides de A ?

Exercice 58. Que peut-on dire d'une fonction f dont le graphe possède deux centres de symétrie ?

Exercice 59 (*résolu par Nikolas Stott*). Montrer que tout entier naturel peut s'écrire comme la différence de deux entiers ayant le même nombre de diviseurs premiers.

Exercice 60 (*résolu par Jean Garcin*). Trouver le plus petit entier $n > 0$ pour lequel les fractions :

$$\frac{19}{n+21}, \frac{20}{n+22}, \frac{21}{n+23}, \dots, \frac{91}{n+93}$$

sont toutes irréductibles.

Exercice 61 (*résolu par Noé de Rancourt, Luc Lehericy, Ambroise Marigot et Fabien Ozouf*). Soit X un ensemble fini de cardinal n, et soient $A_1, \dots, A_m$ des parties de cardinal 3 dont les intersections deux à deux sont de cardinal au plus 1. Montrer qu'il existe une partie A de X de cardinal supérieur ou égal à $[\sqrt{2n}]$ (où $[x]$ désigne la partie entière de x) et ne contenant aucun des A_i.

Exercice 62 (*résolu par Nicolas Klarsfeld*). On donne à chaque lettre de l'alphabet une valeur correspondant à son rang. Ainsi la lettre A vaut 1, la lettre B vaut 2, *etc.* Trouver le plus petit nombre qui est égal à la somme des valeurs de lettres qui apparaissent dans son écriture en toutes lettres.

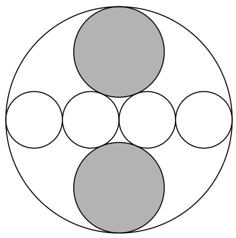
Exercice 63 (*résolu par Thomas Lehericy*). Soit $\mathcal{P}$ la parabole dans le plan d'équation $y = x^2$. Soit Γ_1 le cercle de diamètre 1 tangent intérieurement à $\mathcal{P}$ en l'origine. Par récurrence, on définit Γ_{n+1} comme le cercle tangent à Γ_n et deux fois à $\mathcal{P}$.

Calculer le diamètre de Γ_{2007}.

Exercice 64 (*résolu par Jacques Darné*). On a 2008 lampes numérotées de 1 à 2008, commandées chacune par un interrupteur portant le même numéro. Au départ, toutes les lampes sont éteintes, puis on réalisé les opérations suivantes : on commence par basculer tous les interrupteurs, puis ceux multiples de 2, puis ceux multiples de 3, etc... jusqu'à celui multiple de 2008. Cette opération effectuée, quelle est la lampe allumée portant le plus grand numéro ?

Exercice 65. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement convexe. Est-il possible de trouver quatre points sur son graphe qui soient les sommets d'un parallélogramme ?

Exercice 66. Sur la figure ci-dessous, les cercles sont tangents. Quel est le rayon des cercles grisés en fonction du rayon R du grand cercle ?



Exercice 67. On considère le nombre

$$N = 200\,720\,072\,007 \cdots 720\,007$$

écrit en copiant 2007 fois les chiffres $2, 0, 0, 7$. Le nombre N est-il divisible par 81 ?

Exercice 68 (*résolu par Victor Quach*). Par combien de zéros peut se terminer le nombre $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$?

Exercice 69 (*résolu par Yiyi Huang*). Soient n un entier naturel non nul, d le nombre de diviseurs strictement positifs de n et D le produit de ces diviseurs. Montrer que $n^d = D^2$.

Exercice 70 (*résolu par Jaouad Mourtada*). Pierre dit : « Avant-hier j'avais 10 ans. L'année prochaine, je fêterai mon 13-ième anniversaire. » Quel jour est-on ?

Exercice 71 (*résolu par Sergio Vega*). Soient x et y des nombres réels. On suppose que la suite des :

$$(\cos(n\pi x) + \cos(n\pi y))_{n\in\mathbb{N}}$$

ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Montrer que x et y sont tous les deux rationnels.

Exercice 72 (*résolu par Sébastien Miquel*). Soient deux cercles sécants en P et Q. Une droite intersectant le segment $[PQ]$ coupe les cercle en A, B, C et D dans cet ordre. Montrer que $\widehat{APB} = \widehat{CQD}$.

Exercice 73. Soit F_n la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout $n \geqslant 0$. Montrer qu'il existe un $n > 0$ tel que F_n soit un multiple de 2007.

Exercice 74 (*résolu par Sergio Vega*). Soit $n \geqslant 2$ un entier. On colorie toutes les cases d'un échiquier $n \times n$ en rouge ou en bleu, de telle manière que dans chaque carré 2×2 contenu dans l'échiquier, il y ait exactement deux cases rouges et deux cases bleues. Combien y a-t-il de coloriages possibles ?
Note : deux coloriages qui s'obtiennent l'un de l'autre à l'aide d'une rotation ou d'une symétrie de l'échiquier sont considérés comme distincts.

Exercice 75. Trouver les réels $x > -1$, $x \neq 0$ tels que :

$$\frac{x^2}{(x+1-\sqrt{x+1})^2} < \frac{x^2+3x+18}{(x+1)^2}.$$

Exercice 76. Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$|f(x+y) + \sin x + \sin y| < 2$$

pour tous réels x et y ?

Exercice 77 (*résolu par Thomas Lehericy*). Un point du plan A à coordonnées entières est dit visible depuis l'origine O si le segment ouvert $]OA[$ ne contient aucun point à coordonnées entières. Combien y a-t-il de points visibles dans $[0, 25]^2 \backslash \{(0, 0)\}$?

Exercice 78 (*résolu par Emmanuel Lecouturier, Jean-François Martin, Sébastien Miquel, Sergio Vega et Pietro Vertechi*). Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ croissantes telles que

$$(2^m + 1)f(n)f(2^m n) = 2^m f(n)^2 + f(2^m n)^2 + (2^m - 1)^2 n$$

pour tous entiers n et m.

Exercice 79. a) Déterminer le nombre maximal de rois que l'on peut disposer sur un échiquier de sorte que deux quelconques ne s'attaquent jamais.
b) Idem pour les cavaliers.

Exercice 80. On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = 19$, $a_1 = 25$, et pour tout $n \geqslant 0$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$. Quel est le plus petit $i > 0$ tel que a_i est un multiple de 19 ?

Exercice 81 (*résolu par Charles Masson*). Trouver tous les entiers $n \geqslant 2$ pour lesquels le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1^2 + x_2^2 + 50 & = & 16x_1 + 12x_2 \\ x_2^2 + x_3^2 + 50 & = & 16x_2 + 12x_3 \\ & \vdots & \\ x_{n-1}^2 + x_n^2 + 50 & = & 16x_{n-1} + 12x_n \\ x_n^2 + x_1^2 + 50 & = & 16x_n + 12x_1 \end{array}\right.$$

admet au moins une solution en nombres entiers.

Exercice 82 (*résolu par Christoph Kröner et Ambroise Marigot*). Si $p_1, \ldots, p_k$ sont les diviseurs premiers d'un entier n, on pose $a_n = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_k}$. Montrer que pour tout entier $N \geqslant 2$:

$$\sum_{n=2}^{N} a_2 a_3 \cdots a_n < 1.$$

Exercice 83 (*résolu par Grégoire de Lambert*). Soit $n > 10$ un entier dont tous les chiffres sont dans l'ensemble $\{1, 3, 7, 9\}$. Montrer que n admet un diviseur premier supérieur ou égal à 11.

Exercice 84 (*résolu par Charles Masson*). Soit ABC un triangle dont les trois angles sont aigus. Où placer trois points A', B' et C' sur les côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ respectivement de telle sorte que le périmètre du triangle $A'B'C'$ soit minimal ?

Exercice 85 (*résolu par Fabien Ozouf*). Soit (a_n) définie par $a_1 = 3$, $a_2 = 2$, et pour $n \geqslant 1$, a_{n+2} est le reste de la division euclidienne de $a_n + a_{n+1}$ par 100. Calculer le reste de la division euclidienne de :

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2007}^2$$

par 8.

Exercice 86 (*résolu par Ambroise Marigot*). Soit P un polynôme à coefficients entiers non constant. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers p pour lesquels il existe au moins un entier naturel x tel que p divise $P(x)$.

Exercice 87 (*résolu par Thomas Williams*). Un ver pénètre par un point A dans une belle pomme rouge assimilée à une sphère de 5 cm de rayon et il en sort par un point B, la longueur du parcours AB est de 9,9cm. Sachant que le parcours du ver n'est pas nécessairement rectiligne, trouver le coup de couteau qui partage la pomme en deux parties égales avec l'une des deux moitiés parfaitement saine.

Exercice 88 (*résolu par Jean Garcin*). Trouver tous les polynomes en deux variables $P(x, y)$ tels que pour tous x et y, on ait :

$$P(x + y, y - x) = P(x, y).$$

Exercice 89 (*résolu par Thomas Williams*). Soit λ la racine positive de l'équation $t^2 - 1998t - 1 = 0$. Soit la suite (x_n) définie par $x_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 0$, par :

$$x_{n+1} = [\lambda x_n]$$

où $[x]$ est la partie entière de x. Calculer le reste de la division euclidienne de x_{1998} par 1998.

Exercice 90 (*résolu par Thomas Williams*). Montrer que

$$\sin\frac{7\pi}{30} + \sin\frac{11\pi}{30} = \sin\frac{\pi}{30} + \sin\frac{13\pi}{30} + \frac{1}{2}.$$

Exercice 91. On perce un trou cylindrique de 6 cm de long à travers une sphère, l'axe du cylindre passant par le centre de la sphère. Quel est le volume restant ?

(On rappelle que le volume d'une calotte sphérique est $\pi h^2(R - h/3)$, où R est le rayon de la sphère et h la hauteur de la calotte.)

Exercice 92 (*résolu par Emmanuel Lecouturier*). Une opération binaire $\star$ vérifie $(a \star b) \star c = a + b + c$ pour tous réels a, b et c. Montrer que $\star$ est l'addition usuelle.

Exercice 93 (*résolu par Gaspard Ferey*). Soient A et B deux points du plan et (d) une droite ne coupant pas le segment $[AB]$. Déterminer (géométriquement) le point M de (d) pour lequel l'angle $\widehat{AMB}$ est maximal.

Exercice 94. $ABCD$ et $A'B'C'D'$ sont deux trapèzes dont les côtés correspondants sont égaux :

$$AB = A'B', \quad BC = B'C', \quad CD = C'D', \quad AD = A'D'.$$

Cependant, dans $ABCD$ c'est les côtés $[AB]$ et $[CD]$ qui sont parallèles, tandis que dans $A'B'C'D'$ ce sont les côtés $[B'C']$ et $[A'D']$. Montrer que les deux trapèzes sont en fait des parallélogrammes.

Exercice 95. Soit $ABCD$ un trapèze isocèle, de grande base $[AB]$. On suppose que les diagonales se coupent en un point O de sorte que $\frac{OA}{OC} = 2$. Sachant que l'aire du triangle BOC vaut 10, que vaut l'aire du trapèze $ABCD$?

Exercice 96 (*résolu par Victor Quach*). Trouver toutes les solutions réelles de l'équation :

$$4x^2 - 40[x] + 51 = 0$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x.

Exercice 97 (*résolu par Pietro Vertechi*). Soit a_n la suite récurrence définie par $a_0 = 2$ et $a_{n+1} = 2a_n^2 - 1$. Soient $N \geqslant 1$ et p un diviseur premier de a_N. On suppose qu'il existe un entier x tel que $x^2 \equiv 3 \pmod p$. Montrer que 2^{N+2} divise $p - 1$.

Exercice 98 (*résolu par Aloÿs Augustin*). Quelles sont les longueurs des diagonales d'un quadrilatère dont les longueurs des côtés sont 1, 3, 4 et 10 ?

Exercice 99 (*résolu par Sébastien Miquel*). L'entier naturel A a la propriété suivante : le nombre $1 + 2 + \cdots + A$ s'écrit (en base 10) comme le nombre A suivi de trois autres chiffres. Trouver A.

Exercice 100 (*résolu par Gabriel Pallier*). Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et un point A à l'extérieur du cercle. Du point A on trace deux demi-droites : une qui coupe le cercle aux points B et C (dans cet ordre) et l'autre aux points D et E (dans cet ordre également). Montrer que

$$\widehat{CAE} = \frac{\widehat{COE} - \widehat{BOD}}{2}.$$

Exercice 101 (*résolu par Grégoire de Lambert, Luc Lehericy et Jean-François Martin*). Trouver un polynôme à deux variables P tel que l'ensemble des valeurs prises par $P(x, y)$ lorsque x et y parcourent les nombres réels soit exactement les nombres réels strictement positifs.

Exercice 102. Quelle est la somme des chiffres de $10^{2008} - 2008$?

2 Les solutions

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>. L'égalité implique directement que n est un carré, il s'écrit donc sous la forme $n = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \cdots p_d^{2\alpha_d}$ où les α_i sont des entiers strictement positifs et les p_i des nombres premiers deux à deux distincts. Dans ce cas, on a la formule suivante usuelle pour $d(n)$:

$$d(n) = (2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1) \cdots (2\alpha_d + 1).$$

On remarque tout d'abord qu'elle implique que $d(n)$ est impair, et donc par l'égalité $n = d(n)^2$, n est aussi impair. Autrement dit, le nombre premier 2 n'apparaît pas parmi les p_i, *i.e.* $p_i \geqslant 3$ pour tout i. On a :

$$1 = \frac{d(n)}{\sqrt{n}} = \frac{2\alpha_1 + 1}{p_1^{\alpha_1}} \cdot \frac{2\alpha_2 + 1}{p_1^{\alpha_2}} \cdots \frac{2\alpha_d + 1}{p_1^{\alpha_d}}.$$

En utilisant $p_i \geqslant 3$, on montre sans grande difficulté que chacun des facteurs précédents est supérieur à 1 et que l'égalité est atteinte seulement si $p_i = 3$ et $\alpha_i \in \{1, 2\}$. Ceci ne laisse que deux possibilités pour n, à savoir 1 et 9. On vérifie qu'elles conviennent toutes les deux.

Solution de l'exercice 2. Introduisons sur le plan un système de coordonnées avec l'origine au centre du polygone.

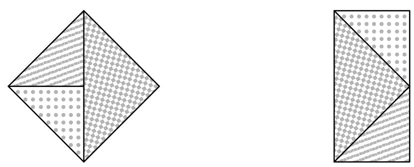
Soit un segment $[AB]$ et un point P, de coordonnées (x, y), situé dans un demi-plan, choisi une fois pour toutes, par rapport au segment $[AB]$. Considérons l'aire du triangle ABP en tant que fonction de x et y. Il est facile à voir que cette fonction est de la forme $ax + by + c$, où a, b, c sont des constantes réelles.

Revenons à notre problème. Soit P le point de l'énoncé, choisi à l'intérieur du $2n$-gone. La valeur

$$\text{(aire des triangles noirs)} - \text{(aire des triangles blancs)}$$

peut être considérée comme une fonction de (x, y), les coordonnées de P. Elle est donc également de la forme $f(x, y) = ax + by + c$, car somme de plusieurs fonction de cette forme-là. Si $x = y = 0$, le point P se trouve au centre du polygone, donc $f(x, y) = 0$ par symétrie. Ainsi f est de la forme $f(P) = \overrightarrow{OP} \cdot \vec{v}$, où $\vec{v}$ est le vecteur de coordonnées (a, b). Mais par symétrie, f est invariante par rotation d'angle $2\pi/n$. Donc le vecteur $\vec{v}$ doit être invariant par cette rotation. Autrement dit, $\vec{v} = 0$, donc f est identiquement nulle.

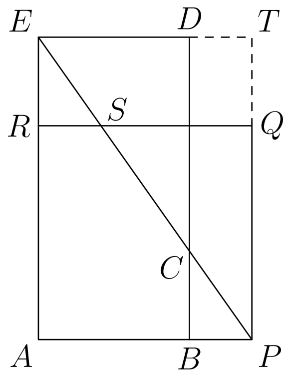
Solution de l'exercice 3. Oui, c'est possible. Voici une construction.
On commence par découper le carré A en trois triangles comme ci-dessus, et on translate les deux plus petits pour arriver au rectangle de la deuxième figure.



Puis on imagine le carré B virtuel dont l'on cale le coin inférieur gauche avec celui du rectangle. On découpe comme sur le schéma et on fait glisser la pièce pour obtenir la quatrième figure.

Enfin, on découpe le petit triangle restant que l'on met à sa place.

La deuxième étape nécessite une vérification. Il n'est pas évident que le coin que l'on a découpé se cale exactement avec le coin supérieur droit du carré virtuel. Avec les notations de la figure suivante, il s'agit de montrer que les triangles CDE et PQS sont superposable. Il est évident qu'ils sont semblables, il nous suffit d'établir par exemple l'égalité $ED = SQ$.



Posons $AB = a$. D'après la première construction, $EA = 2a$ et $AP = PQ = a\sqrt{2}$. D'après le théorème de Thalès, $\frac{SQ}{ET} = \frac{PQ}{PT}$, donc $SQ = \frac{a\sqrt{2}\times a\sqrt{2}}{2a} = a = ED$, ce que l'on voulait.

Solution de l'exercice 4. 1. Soit A une des personnes. parmi les cinq autres, soit A en connait au moins trois, soit il y en a trois qu'il ne connait pas. Dans le premier cas, appelons B,C,D trois personnes que A connait. Si aucune des trois ne connait les deux autres, on a donc trouvé un groupe de trois personnes qui deux à deux ne se connaissent pas. Si, par contre, deux parmi elles se connaissent, disons B et C, alors A,B,C forment un groupe de trois personnes qui se connaissent deux à deux. Ainsi, dans ce premier cas on a la conclusion demandée. Le second cas se traite de la même façon en échangeant « se connaissent » et « ne se connaissent pas ».

2. On va utiliser le 1. Soit A une des personnes. Parmi les neuf autres, A en connait au moins six ou il y en a au moins quatre que A ne connait pas. Dans le premier cas, pour un groupe de six personnes que A connait, on peut utiliser le 1. : Soit il existe un sous-groupe de trois de ces personnes qui se connaissent deux à deux, et avec A, cela donne un groupe de quatre personnes qui se connaissent deux à deux. Soit il existe un sous-groupe de trois personnes qui deux à deux ne se connaissent pas et on a directement la conclusion souhaitée. Dans le second cas, dans un groupe de quatre personnes que A ne connait pas, s'il y en a deux qui ne se connaissent pas, elles forment avec A un groupe de trois personnes qui ne se connaissent pas deux à deux. Si, par contre, ces quatre personnes se connaissent deux à deux, on a directement la conclusion souhaitée.

Solution de l'exercice 5. Tout d'abord, en posant $x = y$ dans la deuxième équation, on obtient $f(x^2) = (k+2)f(x)$. En appliquant deux fois cette égalité, on a

$$f(x^4) = (k+2)^2 f(x).$$

D'un autre côté,

$$\begin{aligned} f(x^4) &= f(x) + f(x^3) + kf(x) = (k+1)f(x) + f(x^3) \\ &= (k+1)f(x) + f(x) + f(x^2) + kf(x) = (2k+2)f(x) + f(x^2) \\ &= (3k+4)f(x). \end{aligned}$$

En appliquant les deux égalités précédentes à $x = 2006$, de manière à avoir $f(x) \neq 0$, on déduit que $(k+2)^2 = 3k+4$. La résolution de cette équation du second degré montre que nécessairement, $k = 0$ ou $k = -1$.

Réciproquement, pour $k = 0$, une solution f est donnée par $f(p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}) = \alpha_1 g(p_1) + \cdots \alpha_n g(p_n)$ où $g(2) = 2007$ et $g(p) = 0$ pour tout nombre premier $p \neq 2$. La fonction f : $p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}) \mapsto g(p_1) + \cdots + g(p_n)$ convient.

Solution de l'exercice 6. Considérons une pyramide à base carrée de côté 1 et de hauteur $\frac{1}{10}$, immergée pointe en bas à 99% de la hauteur. Le volume en immersion vaut $\left(\frac{99}{100}\right)^3$ du volume total, ce qui dépasse bien 90%. La surface immergée vaut $2\left(\frac{99}{100}\right)^2\sqrt{\frac{1}{100}+\frac{1}{4}}$ alors que la surface totale est de $2\sqrt{\frac{1}{100}+\frac{1}{4}}+1$, et on vérifie que le rapport des deux est bien inférieur à 50%.

Solution de l'exercice 7. Pour simplifier nous dirons « boule numéro k » au lieu de « boule portant l'étiquette indiquant k kg. »

Première pesée : posons sur un plateau les boules de 1 à 8 et sur l'autre les boules 11, 12 et 13. On a $1+2+3+4+5+6+7+8=36=11+12+13$. Ainsi, si la balance indique l'égalité des poids, c'est qu'on a réellement les 8 boules les plus légères d'un côté et les trois boules les plus lourdes de l'autre. Nous avons donc divisé, de manière certaine, l'ensemble des boules en trois groupes :

$$\underbrace{1,2,3,4,5,6,7,8}_{A},\ \underbrace{9,10}_{B},\ \underbrace{11,12,13}_{C}.$$

Deuxième pesée : posons sur un plateau les boules 1, 2, 3 et 9, et sur l'autre plateau les boules 7 et 8. On a $1+2+3+9=15=7+8$. Donc, si la balance indique l'égalité des poids, les boules 1, 2 et 3 sont en effet les plus légère du groupe A, la boule 9 la plus légère du groupe B et les boules 7 et 8 les plus lourdes du groupe A. Ainsi nous avons divisé, de manière certaine, l'ensemble des boules en six groupes :

$$\underbrace{1,2,3}_{a},\ \underbrace{4,5,6}_{b},\ \underbrace{7,8}_{c},\ \underbrace{9}_{d},\ \underbrace{10}_{e},\ \underbrace{11,12,13}_{f}.$$

Troisième pesée : posons sur un plateau les boules 1, 4, 7, 9 et 11 et sur l'autre plateau les boules 3, 6, 10 et 13. On a $1+4+7+9+11=32=3+6+10+13$. Nous avons de nouveau mis sur un plateau les boules qui sont sensées être les plus légères de leurs groupes, et sur l'autre les boules sensées être les plus lourdes. Donc, si la balance indique l'égalité des poids, c'est que toutes les boules sont bien étiquettées.

Solution de l'exercice 8. Remarquons en premier lieu que le cas $n=1$ est trivial. On supposera donc $n \geqslant 2$.

Notons $X=(x_1,\ldots,x_n)$ et $X_i=(x_{i,1},\ldots,x_{i,n})$. La condition énoncée peut se redire de la façon suivante :

$$\forall i \in \{1,\ldots,2^n-1\}, \quad \mathrm{PGCD}\,(x_1-x_{i,1},\ldots,x_n-x_{i,n})=1$$

ce qui est encore équivalent à :

$$\forall i \in \{1,\ldots,2^n-1\}, \forall p \text{ premier}, \quad (x_1,\ldots,x_n) \not\equiv (x_{i,1},\ldots,x_{i,n}) \pmod p.$$

Notons maintenant p_k le k-ième nombre premier et essayons de résoudre ce système de congruences en se limitant aux s premiers nombres premiers, avec $p_1\ldots p_s > \max|x_{i,j}|$. On obtient :

$$(S) : \begin{cases} (x_1,\ldots,x_n) \equiv (y_{1,1},\ldots,y_{1,n}) \pmod{p_1} \\ (x_1,\ldots,x_n) \equiv (y_{2,1},\ldots,y_{2,n}) \pmod{p_2} \\ \qquad\vdots \\ (x_1,\ldots,x_n) \equiv (y_{s,1},\ldots,y_{s,n}) \pmod{p_s} \end{cases}$$

où $(y_{k,1},\ldots,y_{k,n}) \not\equiv (x_{i,1},\ldots,x_{i,n}) \pmod{p_k}$ pour tout k et pour tout i. À k fixé, il existe donc au moins $p_k^n-2^n+1$ possibilités différentes modulo p_k pour le choix de $(y_{k,1},\ldots,y_{k,n})$. Ainsi il existe au moins :

$$A_s=\prod_{k=1}^{s}(p_k^n-2^n+1)$$

systèmes de congruences classiques qui fournissent une solution de (S). D'apres le lemme chinois, à chacun d'entre eux correspond une solution telle que pour tout i, $1 \leqslant x_i \leqslant p_1 \dots p_s$. La dernière inégalité prouve que si p est un nombre premier plus grand que $p_1 \dots p_s$, alors $(x_1, \dots, x_n) \not\equiv (x_{i,1}, \dots, x_{i,n}) \pmod p$ (car sinon il y aurait réellement égalité et il y aurait déjà égalité modulo 2 par exemple, ce qui est supposé faux).

Reste donc à étudier les nombres premiers compris entre p_s et $p_1 \dots p_s$. Soit donc p un nombre premier compris entre p_s et $p_1 \dots p_s$. Le nombre de n-uplets pour lesquels la condition de congruence modulo p n'est pas satisfaite est majoré par $(2^n - 1)\left(\frac{p_1 \dots p_s}{p} + 1\right)$. Ainsi le nombre de n-uplets qui vont être rejetés par les conditions de congruence modulo p, pour $p_s < p < p_1 \dots p_s$, est majoré par :

$$B_s = (2^n - 1) \sum_{\substack{p \text{ premier} \\ p_s < p < p_1 \dots p_s}} \left(\frac{p_1 \dots p_s}{p} + 1\right)$$

Il suffit pour conclure de prouver que $B_s < A_s$ pour s suffisamment grand. C'est ce que nous allons faire. On a d'une part :

$$A_s = \prod_{k=2}^{s} (p_k^n - 2^n + 1) \geqslant \prod_{k=2}^{s} \left(\frac{p_k}{3}\right)^n = \frac{3}{2} \left(\frac{p_1}{3} \dots \frac{p_s}{3}\right)^n$$

et d'autre part :

$$B_s \leqslant 2\,(2^n - 1)\,(p_1 \dots p_s) \sum_{p=1}^{p_1 \dots p_s} \frac{1}{p} \leqslant 4\,(2^n - 1)\,(p_1 \dots p_s)^{3/2}$$

Ainsi :

$$\frac{A_s}{B_s} \geqslant C \frac{p_1^{n-3/2}}{3^n} \dots \frac{p_s^{n-3/2}}{3^n} \qquad \text{où } C \text{ est une constante ne dépendant que de } n$$

et cette quantité peut être rendue arbitrairement grande dès que $n \geqslant 2$.

Solution de l'exercice 9. Par symétrie des rôles, on peut supposer $p \leqslant q$. On a $2^{3pq} \equiv 2 \pmod 3$, ce qui implique que p et q sont impairs (sinon 2^{3pq} serait congru à 1). Comme q est premier, on a $x^{3pq-1} \equiv 1 \pmod q$. Rappelons le résultat suivant[1] : il existe un entier x tel que pour tout n, on ait :

$$x^n \equiv 1 \pmod q \iff n \text{ est multiple de } q - 1.$$

D'après ce résultat et la congruence précédente, on déduit que $q - 1$ divise $3pq - 1$. En outre, $3pq - 1 - 3p(q - 1) = 3p - 1$, donc $q - 1$ divise $3p - 1$, et de même, $p - 1$ divise $3q - 1$. Supposons que $p = q$. Dans ce cas, $p - 1$ divise $3p - 1$, or $3p - 1 - 3(p - 1) = 2$ donc $p - 1$ divise 2, d'où $p = q = 3$. Mais $4^{27} \equiv 1 \pmod{27}$, donc $(3, 3)$ n'est pas solution. On a alors $p \neq q$.

Quitte à échanger p et q, on peut supposer $p < q$. Alors, comme p et q sont impairs, on a $q \geqslant p + 2$, et donc l'entier $\frac{3p-1}{q-1}$ est strictement inférieur à 3. De plus, il est clairement différent de 1, et est donc égal à 2, c'est-à-dire que $2q = 3p+1$. Or, $p-1$ divise $3q-1$, donc aussi $6q-2 = 9p+1$ puis $(9p+1) - 9(p-1) = 10$. Il reste les deux possibilités $(3, 5)$ et $(11, 17)$. Mais $3^{45} \equiv 0 \pmod{45}$ donc $(3, 5)$ n'est pas solution du problème.

Enfin, montrons que $(11, 17)$ est solution. D'après le théorème chinois, il suffit de démontrer que $x^{3\times11\times17} \equiv x \pmod 3$, $x^{3\times11\times17} \equiv x \pmod{11}$ et $x^{3\times11\times17} \equiv x \pmod{17}$. On a $3\times11\times17 \equiv 1 \pmod 2$; pour $x \not\equiv 0 \pmod 3$, on a $x^2 \equiv 1 \pmod 3$ donc $x^{3\times11\times17} \equiv x \pmod 3$, et ceci est encore vrai pour $x \equiv 0 \pmod 3$. De même, on a $3 \times 11 \times 17 \equiv 1 \pmod{10}$, $x^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ pour $x \not\equiv 0$

[1] On dit alors que x est d'ordre $q - 1$. Le fait qu'un tel x existe n'est pas une évidence, mais c'est malgré tout un résultat à connaître.

(mod 11), donc $x^{3\times 11\times 17} \equiv x \pmod{11}$ et $3\times 11\times 17 \equiv 1 \pmod{16}$, $x^{16} \equiv 1 \pmod{17}$ pour $x \not\equiv 0 \pmod{17}$, donc $x^{3\times 11\times 17} \equiv x \pmod{17}$, ce qui conclut : les solutions sont les couples $(11, 17)$ et $(17, 11)$.

Remarque. Les entiers n composés vérifiant $x^n \equiv x \pmod{n}$ pour tout n sont appelés les nombres de Carmichael. Celui de l'exercice $3 \times 11 \times 17 = 561$ est le plus petit et le plus connu, et comme on vient de le montrer c'est le seul de la forme $3pq$ avec p et q premiers. On sait aujourd'hui qu'il existe une infinité de nombres de Carmichael.

Solution de l'exercice 10. La réponse est non. Pour le prouver, nous allons montrer que quelles que soient les questions de Dmitry (de la forme de l'énoncé), Oleg peut fournir des réponses de telle façon qu'une fois le stock de questions épuisé, il reste au moins deux ordres compatibles avec les réponses données. En effet, si Dmitry n'a pas de chance, cela reviendrait exactement à dire qu'Oleg peut modifier au fur et à mesure les pierres pour faire échouer Dmitry, de manière à ce que ça reste compatible avec les réponses qu'il a déjà données. La stratégie d'Oleg est en fait très simple : pour chaque question de Dmitry, il regarde quelle réponse (oui ou non) écarte le moins d'ordres compatibles et donne cette réponse-ci.

Nous allons montrer précisément qu'avec cette stratégie, si après la $(i-1)$-ième réponse, il reste x ordres compatibles, alors après la i-ième, il en reste au moins $\max(\frac{x}{2}, x-20)$. La minoration en $\frac{x}{2}$ est évidente. Pour $x - 20$ maintenant, il suffit de constater que si Oleg répond non, alors il élimine au plus 20 ordres, puisqu'étant donnés A, B et C, il y a en tout exactement 20 ordres (un sixième de $5! = 120$) pour lesquels A est plus léger que B, lui même plus léger que C.

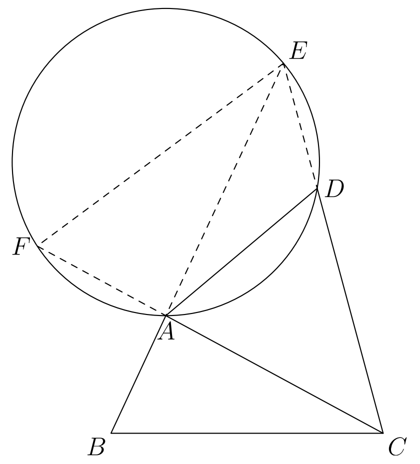
On conclut alors facilement : au début, il y a 120 ordres possibles. Par ce qui précède, après la première question, Oleg peut s'arranger pour qu'il en est au moins 100. Après la question suivante, au moins 80, puis au moins 60, puis au moins 40, puis au moins 20, puis au moins 10, puis au moins 5, puis au moins 3, puis finalement au moins 2 comme voulu.

Solution de l'exercice 11. Parmi les nombres d'un seul chiffre (*i.e.* ceux de 1 à 9), il n'y a aucun zéro. Parmi les nombres de deux chiffres, il y a neuf zéros : un au bout de 10, un au bout de 20 et ainsi de suite jusqu'à 90. Voyons maintenant ce qui se passe pour les nombres de trois chiffres. Un zéro ne peut évidemment apparaître qu'en deuxième ou troisième position. Il y a un zéro en deuxième position dans tous les nombres de la forme $x0y$ où x est un chiffre entre 1 et 9, et y un chiffre entre 0 et 9. Cela en fait donc 90. On raisonne de même pour les troisièmes zéros et on en trouve également 90.

Le même raisonnement permet de dénombrer les zéros qui apparaissent dans les nombres de 1000 à 1999 : ceux qui apparaissent en deuxième (resp. troisième, resp. quatrième) position sont au nombre de $1 \times 10 \times 10 = 100$. Cela en fait donc en tout 300. Reste les zéros qui apparaissent dans les nombres compris entre 2000 et 2007 que l'on peut compter à la main ; on en trouve 17.

Au final, le nombre cherché est $9 + 90 + 90 + 300 + 17 = 506$.

Solution de l'exercice 12. Soit $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit à ADE, et soit F le deuxième point d'intersection entre $\mathcal{C}$ et (CA).



En termes de longueurs algébriques, on a $AC^2 = \overline{CD} \cdot \overline{CE} + \overline{AB} \cdot \overline{AE}$ si et seulement si

$$\overline{AB} \cdot \overline{AE} = AC^2 - \overline{CD} \cdot \overline{CE} = CA^2 - \overline{CA} \cdot \overline{AF} = \overline{AC} \cdot \overline{AF},$$

c'est-à-dire si et seulement si B, C, E, F sont cocycliques. Mais cela a lieu si et seulement si $\widehat{EFC} = \widehat{EBC}$, et

$$\widehat{EFC} = \widehat{EFA} = \pi - \widehat{ADE} = \widehat{CDA}$$

(en angles orientés modulo π). Donc B, C, E et F sont cocycliques si et seulement si $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$, ce qu'on voulait.

Solution de l'exercice 13. Oui. Prenez trois points sur l'équateur distants de moins de 1 millimètre. Ils forment un triangle dont l'équateur est le cercle circonscrit.

Solution de l'exercice 14. Introduisons un repère orthonormé tel que $A = (0, 0, 0)$ et $B = (1, 1, 1)$, les côtés du cube étant parallèles aux axes. Soit r le rayon de la sphère. Son centre est le point de coordonnées (r, r, r), et le point de tangence avec l'une des arêtes en B est $(r, 1, 1)$. La distance entre ces deux points étant $\sqrt{2}(1 - r)$, on en déduit $r = \sqrt{2}(1 - r)$ et $r = 2 - \sqrt{2}$.

Solution de l'exercice 15. Montrons que le nombre maximal de tels réels est $\binom{n}{[n/2]}$ où $[\cdot]$ désigne la partie entière. On obtient cette borne en prenant par exemple $x_i = i + \frac{1}{2^i}$. Dans ce cas, les sommes de $[n/2]$ des x_i sont deux à deux distinctes (d'après l'unicité de l'écriture en base 2) et toutes dans l'intervalle $[[n/2], [n/2] + 1]$. Finalement, elles sont bien au nombre de $\binom{n}{[n/2]}$.

Montrons maintenant que cette valeur ne peut pas être dépassée. Tout d'abord, remarquons que si on a une permutation σ de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$, alors au plus l'un des ensembles $J_i^\sigma = \{\sigma(1), \ldots, \sigma(i)\}$ vérifie que $\sum_{j \in J_i^\sigma} x_j \in I$, puisque les x_j sont supérieurs à 1. La somme de l'énoncé revient à faire la somme des x_j sur un sous-ensemble J de $\{1, \ldots, n\}$. Or, si un tel sous-ensemble J est de cardinal i, il existe $i!(n - i)!$ permutations σ telles que $J = J_i^\sigma$. Soit $f(J)$ l'ensemble de ces permutations, et soit T l'ensemble des $J \subset \{1, \ldots, n\}$ tels que $\sum_{j \in J} x_j \in I$. D'après la remarque précédente, les ensembles $f(J)$ pour $J \in T$ sont deux à deux disjoints, et comme $\mathrm{Card}(f(J)) = \mathrm{Card}(J)!(n - \mathrm{Card}(J))!$, on a

$$\sum_{J \in T} \mathrm{Card}(J)!(n - \mathrm{Card}(J))! \leqslant n!$$

puisque l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, n\}$ est de cardinal $n!$. Or, $t!(n - t)!$ est minimal pour $t = [n/2]$, donc la somme de gauche est minorée par $\mathrm{Card}(T) \times [n/2]!(n - [n/2])!$. En divisant l'inégalité qui en découle par $n!$, on obtient

$$\mathrm{Card}(T) \leqslant \binom{n}{[n/2]},$$

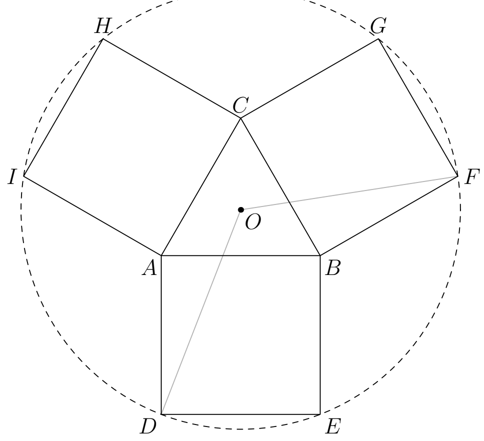
qui est bien l'inégalité désirée.

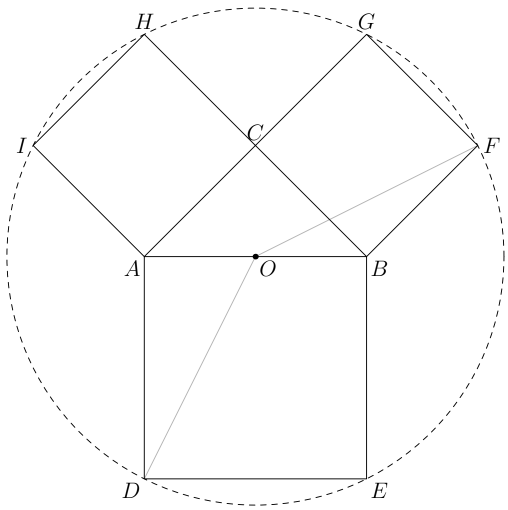
Solution de l'exercice 16. Non. On a

$$1\,000\,000\,027 = 1\,000^3 + 3^3 = (1\,000 + 3) \cdot (1\,000^2 - 1\,000 \cdot 3 + 3^2).$$

Solution de l'exercice 17. Le conjoint a serré 998 mains. En effet, si ce n'était pas le cas, une autre personne aurait serré 998 mains, c'est-à-dire les mains de tout le monde sauf d'elle-même et de son conjoint. En particulier, elle aurait serré la main de la personne qui n'en a serré aucune, ce qui est impossible !

Solution de l'exercice 18. Supposons que D, E, F, G, H et I sont cocycliques.





Les médiatrices de $[DE]$, $[FG]$, $[HI]$ étant celles de $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ respectivement, le centre du cercle doit être le centre O du cercle circonscrit à ABC. Notons M le milieu de $[AB]$ et R le rayon du cercle circonscrit à ABC. On calcule

$$OD^2 = (OM + AB)^2 + \frac{AB^2}{4} = \left(\sqrt{OA^2 - \frac{AB^2}{4}} + AB\right)^2 + \frac{AB^2}{4} = R^2 + AB\sqrt{4R^2 - AB^2} + AB^2$$

et de même

$$OF^2 = R^2 + BC\sqrt{4R^2 - BC^2} + BC^2.$$

D'après la loi des sinus, on a

$$\frac{AB}{\sin\widehat{C}} = \frac{BC}{\sin\widehat{A}} = \frac{AC}{\sin\widehat{B}} = 2R$$

et de l'égalité $OD = OF$, on déduit

$$4R^2 \sin\widehat{C}\sqrt{1 - \sin\widehat{C}} + 4R^2 \sin^2\widehat{C} = 4R^2 \sin\widehat{A}\sqrt{1 - \sin\widehat{A}} + 4R^2 \sin^2\widehat{A}$$

puis

$$\cos\widehat{C}\sin\widehat{C} + \sin^2\widehat{C} = \cos\widehat{A}\sin\widehat{A} + \sin^2\widehat{A}.$$

Remarquons que l'on a

$$2(\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta) = 1 - \cos 2\theta + \sin 2\theta = 1 + \sqrt{2}\sin(2\theta - \pi/4)$$

et l'étude de la fonction $\theta \mapsto \sin(2\theta - \pi/4)$ montre que $\widehat{A} = \widehat{C}$ ou $2\widehat{A} - \pi/4 + 2\widehat{C} - \pi/4 = \pi$ c'est-à-dire $\widehat{B} = \pi/4$. De même on a $\widehat{A} = \widehat{B}$ ou $\widehat{C} = \pi/4$, et $\widehat{B} = \widehat{C}$ ou $\widehat{A} = \pi/4$. Ceci montre que l'on a soit $A = B = C$, soit deux des angles égaux à $\pi/4$, c'est-à-dire que ABC est soit équilatéral, soit rectangle isocèle.

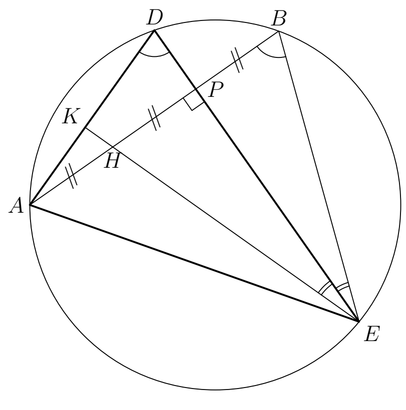
Inversement, il est évident que si ABC est équilatéral, les points sont cocycliques ; si ABC est rectangle isocèle en C, on vérifie facilement que $OD = OF$, puis la cocyclicité s'ensuit aisément.

Solution de l'exercice 19. La constatation essentielle est la suivante : un triangle a ses trois angles aigus si, et seulement si le centre de son cercle circonscrit est à l'intérieur du triangle. Ici, tous les triangles du pavage ont le même cercle circonscrit, disons Γ, qui est celui qui passe par tous les points du polygône régulier. Ainsi, il s'agit de montrer qu'il y a un et un seul triangle du pavage qui contient le centre O de Γ en son intérieur. Cela est évident, le seul problème pouvant survenir est que O appartienne à l'un des côtés. Mais ceci n'est pas possible puisque le polygone a un impair de côtés, et donc aucune de ses « diagonales » ne passe par le centre.

Solution de l'exercice 20. L'hypothèse nous dit que les deux polynômes, disons P_1 et P_2 s'écrivent respectivement $P_1(x) = (x-a)Q_1(x)$ et $P_2(x) = (x-a)Q_2(x)$ où a est un certain entier strictement négatif et où Q_1 et Q_2 sont des polynômes à coefficients entiers. S'il existait un entier $b > 0$ tel que $P_1(b) = 2007$ et $P_2(b) = 2008$, $b - a$ devrait diviser simultanément 2007 et 2008, et donc leur différence 1. Mais cela n'est pas possible car $b - a > 1$ du fait que $b > 0$ et $a < 0$.

Solution de l'exercice 21. À chaque étape la côté du nouveau carré a toujours une longueur strictement supérieure à 1 puisque c'est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont l'un des autres côtés mesure 1. Ainsi, la construction est toujours possible quelle que soit la valeur de a.

Solution de l'exercice 22. Le point H est déjà sur la hauteur $[AP]$ du triangle ADE, il suffit de montrer qu'il est sur une des deux autres. Soit K l'intersection des droites (EH) et (AD), et montrons que $[KE]$ est une hauteur de ADE.



Par hypothèse, $HP = PB$. De plus, les triangles EPB et EPH ont un côté commun $[PE]$, et vérifient $\widehat{EPB} = \widehat{EPH} = 90°$. Ils sont donc isométriques. Par conséquent, $\widehat{HEP} = \widehat{PEB}$. D'autre part, par cocyclicité, les angles inscrits $\widehat{ADE}$ et $\widehat{ABE}$ sont égaux. Ainsi, les triangles KDE et EPB sont semblables, et donc $\widehat{DKE} = \widehat{BPE} = 90°$.

Solution de l'exercice 23. Notons $A = \overline{a_1 a_2 \cdots a_k}$ l'écriture décimale de A. En faisant la soustraction

$$\begin{array}{rcccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_k & 0 \\ - & & a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} & a_k \\ \hline \end{array}$$

on trouve que les chiffres de $9A = 10A - A$ sont a_1, $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, …, $a_{k-1} - a_{k-2}$, $a_k - a_{k-1} - 1$, $10 - a_k$. Leur somme est $10 - 1 = 9$.

Solution de l'exercice 24. Notons

$$\frac{p_n}{q_n} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{2}}}}$$

où la fraction contient n fois le chiffre 2 et p_n et q_n sont premiers entre eux. Il est alors facile à vérifier que

$$p_n = p_{n-1} + 2q_{n-1}, \qquad q_n = p_{n-1} + q_{n-1}.$$

Ou, de manière équivalente,

$$p_{n-1} = 2q_n - p_n, \qquad q_{n-1} = p_n - q_n.$$

D'autre part, (p, q) est une solution de $p^2 - 2q^2 = \pm 1$ si et seulement si $(2q - p, p - q)$ est également solution. En effet,

$$(2q - p)^2 - 2(p - q)^2 = 4q^2 - 4qp + p^2 - 2p^2 + 4pq - 2q^2 = 2q^2 - p^2.$$

Si (p, q) est une solution avec $p > 1$, on a nécessairement $p > q$ et donc $2q - p < p$. Ainsi en réitérant l'opération

$$(p, q) \mapsto (2q - p, p - q)$$

on obtient en un nombre fini n d'étapes une solution avec $p = 1$, donc la solution $p = q = 1$. Or on a aussi $p_0 = q_0 = 1$. Par conséquent, en inversant les n étapes, on prouve par récurrence que $(p, q) = (p_n, q_n)$.

Inversement, comme $(p_0, q_0) = (1, 1)$ est une solution, alors, par recurrence, (p_n, q_n) est solution pour tout n.

Solution de l'exercice 25. Introduisons l'ensemble des « états » possibles du minotaure (cellule, couloir, intention), où la cellule est celle dans laquelle il se trouve, le couloir est celui par lequel il vient d'arriver, et l'intention est de trourner à droite ou à gauche.

L'état du minotaure détermine entièrement la suite de son parcours. Le nombre d'états possibles est fini, donc le minotaure va un jour se retrouver dans un état où il a déjà été, et à partir de là son parcours va boucler. Il s'agit de prouver que cette boucle contient nécessairement sa cellule de départ.

Pour cela, notons que sachant l'état présent du minotaure on peut retrouver de manière unique son état précédent. Supposons alors que x soit le *premier* état dans lequel le minotaure s'est retrouvé deux fois. L'état qui doit précéder x est déterminé de manière unique, et pourtant le minotaure n'est passé par cet état qu'une seule fois. Cela implique que x est en fait son état de départ, qui fait donc partie de la boucle.

Solution de l'exercice 26. Du fait que $2y^2 + 1 > 0$ et de la stricte croissance de la fonction cube, on déduit que l'équation implique $x > y$. D'autre part, on peut réécrire l'équation sous la forme :

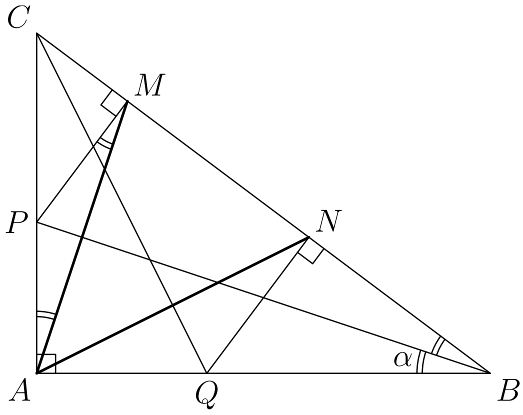
$$x^3 = (y + 1)^3 - y^2 - 3y.$$

Ainsi si $y^2 + 3y > 0$, on déduit par le même argument que précédemment que $x < y + 1$, ce qui est impossible à concilier avec $x > y$ sachant que x et y sont tous les deux des nombres entiers.

On en vient donc à se demander quand la quantité $y^2 + 3y = y(y + 3)$ est négative ou nulle. Un tableau de signe immédiat montre que c'est pour y compris entre -3 et 0. Comme y est un entier, il ne reste que les valeurs -3, -2, -1 et 0 que l'on teste une par une en les remplaçant dans l'équation. On obtient comme ceci la liste des solutions qui est formée des couples $(1,0)$, $(1,-2)$ et $(-2,-3)$.

Solution de l'exercice 27. L'aire de EBC est égale à $1/4$. Celles des petits triangles AEM, EMB et MBF sont égales car ces trois triangles ont la base et la hauteur correspondante de même longueur. Donc l'aire de AEM est le tiers de celle de ABF, c'est-à-dire $1/12$. Ainsi l'aire de $AMCN$ est $2(1/2-1/4-1/12)=1-1/2-1/6=1/3$.

Solution de l'exercice 28. Soit $\alpha=\widehat{ABP}$. On a $\widehat{APB}=\widehat{MPB}=90°-\alpha$, et en outre, $PA=PM$, donc le triangle APM est isocèle et $\widehat{PAM}=\frac{180°-\widehat{APM}}{2}=\alpha$. On montre de même que $\widehat{QAN}=\widehat{ACQ}=45°-\alpha$. Par suite, $\widehat{MAN}=90°-(45°-\alpha)-\alpha=45°$.



Solution de l'exercice 29. Montrons par récurrence sur n qu'il existe un entier N divisible par 2^{100} et ayant ses n derniers chiffres non nuls. Pour $n=1$, il suffit de prendre $N=2^{100}$. Maintenant, soit N un entier divisible par 2^{100} et ayant ses n derniers chiffres non nuls. Si son $(n+1)$-ième chiffre en partant de la fin est également non nul, alors on peut prendre le même entier pour $n+1$. Sinon, on prend $N'=N+2^{100}\cdot 10^n$.

Ainsi, en 100 étapes, on obtient un entier divisible par 2^{100} dont les 100 derniers chiffres sont non nulles. Il suffit alors de ne garder que ces 100 derniers chiffres, car 10^{100} est divisible par 2^{100}.

Solution de l'exercice 30. Le nombre

$$\left(5+\sqrt{26}\right)^{100}+\left(\sqrt{26}-5\right)^{100}=\sum_{i+j=100} C_{100}^i\cdot\left(\sqrt{26}\right)^i\cdot 5^j\cdot\left[1+(-1)^j\right]$$

est entier. En effet, le facteur $1+(-1)^j$ est non nul si et seulement si i et j sont pairs, auquel cas $(\sqrt{26})^i$ est entier. D'autre part,

$$\sqrt{26}-5<\frac{1}{10}.$$

En effet, $(5+1/10)^2=25+1+1/100>26$.

Par conséquent, $(\sqrt{26}-5)^{100}<10^{-100}$, et donc les 100 premiers chiffres de $(5+\sqrt{26})^{100}$ après la virgule sont que des neufs.

Solution de l'exercice 31. Supposons que x_n compte au plus k chiffres, *i.e.* $x_n<10^k$. Ainsi $11x_n<11\times 10^k$, ce qui montre que l'on est dans l'alternative suivante :

☞ soit $11x_n$ compte au plus $k+1$ chiffres : dans ce cas, x_{n+1} compte au plus k chiffres ;

☞ soit $11x_n$ compte $k+2$ chiffres, et il commence par 10 : dans ce cas, x_{n+1} est obtenu en supprimant le premier 1, et comme le 0 suivant se supprime tout seul, la conclusion reste que x_{n+1} compte au plus k chiffres.

Dans tous les cas, donc, x_{n+1} a au plus k chiffres. Par récurrence, on montre donc que x_n n'a jamais plus de chiffres que n'en a x_1. La suite est donc bornée.

Solution de l'exercice 32. Non. Soit $P(x)$ l'ensemble des points dont la distance au parallélépipède P est inférieure ou égale à x. (On considère le parallélépipède comme une figure pleine, si bien que l'intérieur de P fait partie de $P(x)$ pour tout x.) Notons $p(x)$ le volume de $P(x)$.

$P(x)$ est constitué de :

☞ le parallélépipède P lui-même ;

☞ six parallélépipèdes de hauteur x construits sur les faces de P ;

☞ douze quarts de cylindres de rayon x construits sur les arêtes de P ;

☞ huit huitièmes de sphère de rayon x construits autour des sommets de P.

Le volume $p(x)$ vaut donc

$$p(x) = \frac{4}{3}\pi x^3 + l(P)x^2 + A(P)x + V(P),$$

où $l(P)$, $A(P)$ et $V(P)$ sont le périmètre de P, l'aire de P et le volume de P respectivement.

Comme $P \subset Q$, on a $p(x) < q(x)$ pour tout x. Autrement dit,

$$q(x) - p(x) = [l(Q) - l(P)]x^2 + [A(Q) - A(P)]x + [V(Q) - V(P)] > 0.$$

En considérant cette inégalité pour x très grand, on déduit que $l(Q) \geqslant l(P)$.

Solution de l'exercice 33. Pour $n = 1$, la condition $\{n\sqrt{3}\} > \frac{c}{n\sqrt{3}}$ ne peut être vérifiée que si $\sqrt{3} - 1 > \frac{c}{\sqrt{3}}$, c'est-à-dire seulement si $c < 3 - \sqrt{3}$. Soit $c \in [1, 3 - \sqrt{3}[$ une telle constante. Pour tout n, $\{n\sqrt{3}\}$ est strictement plus grand que $\frac{c}{n\sqrt{3}}$ si et seulement si $n\sqrt{3} - \frac{c}{n\sqrt{3}} > \left[n\sqrt{3}\right]$ (où $[x]$ désigne la partie entière de x). Comme $c < 3 - \sqrt{3} < \sqrt{3} < 3n^2$, les deux côtés de l'inégalité sont positifs, et on peut élever au carré pour obtenir l'inégalité équivalente

$$3n^2 - 2c + \frac{c^2}{3n^2} > \left[n\sqrt{3}\right]^2. \tag{V.1}$$

Quel que soit n, $3n^2 - 1$ n'est pas un carré parfait, car aucun carré parfait n'est congru à 2 modulo 3, et $3n^2$ n'est pas non plus un carré parfait. Pour cette raison, $\left[n\sqrt{3}\right] = \left[\sqrt{3n^2}\right]$, qui est le plus grand entier dont le carré est inférieur ou égal à $3n^2$, est au plus égal à $\sqrt{3n^2 - 2}$, avec égalité si et seulement si $3n^2 - 2$ est un carré parfait. Montrons que cette égalité a lieu pour des entiers aussi grands que l'on veut. Soit $(m_0, n_0) = (1, 1)$ puis $(m_{k+1}, n_{k+1}) = (2m_k + 3n_k, m_k + 2n_k)$. On vérifie facilement que $m_{k+1}^2 - 3n_{k+1}^2 = m_k^2 - 3n_k^2$. Par conséquent, l'égalité $3n_k^2 - 2 = m_k^2$ étant vraie pour $k = 0$, elle reste vraie pour $k \geqslant 1$. De plus, la suite (n_k) étant strictement croissante, on en déduit ce que l'on voulait montrer.

Ces résultats en poche, intéressons-nous maintenant aux deux questions de notre énoncé. Tout d'abord, si $c = 1$, on a

$$3n^2 - 2 + \frac{1}{3n^2} > 3n^2 - 2 \geqslant \left[n\sqrt{3}\right]^2$$

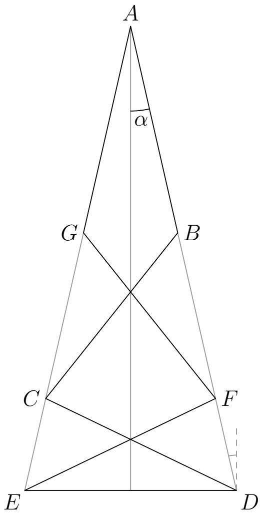
pour tout n, ce qui montre l'égalité (V.1), équivalente à l'égalité que l'on voulait montrer.

Si $c > 1$, alors, pour n suffisamment grand,

$$3n^2 - 2c + \frac{c^2}{3n^2} \leqslant 3n^2 - 2.$$

En outre, pour une infinité de n, on a $3n^2 - 2 = \left[n\sqrt{3}\right]^2$, et donc pour ces n, l'inégalité (V.1) n'est pas vérifiée. Il n'existe donc pas de $c > 1$ vérifiant l'inégalité de l'énoncé.

Solution de l'exercice 34. La figure est entièrement déterminée par l'énoncé et en particulier, elle est symétrique par rapport à la médiatrice de $[DE]$. Notons 2α l'angle que l'on cherche. On a alors $\widehat{AED} = \widehat{ADE} = \frac{\pi}{2} - \alpha$.



Les triangles DAE et CDE sont isocèles de sommets respectifs A et D. Comme ils ont en commun l'angle $\widehat{AED}$, ils sont semblables. Il en résulte que $\widehat{CDE} = 2\alpha$. Par ailleurs AGF et BCD sont aussi des triangles isocèles de sommets respectifs G et C. Il en résulte $\widehat{ACB} = 2\alpha$ et :

$$\widehat{BCD} = \pi - 2\widehat{ADC} = \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - 2\alpha\right) = 6\alpha.$$

Comme les points A, C et E sont alignés, on a la relation $\widehat{ACB} + \widehat{BCD} + \widehat{DCE} = \pi$, c'est-à-dire $2\alpha + 6\alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha = \pi$, d'où $\alpha = \frac{\pi}{14}$ et l'angle cherché vaut $2\alpha = \frac{\pi}{7}$.

Solution de l'exercice 35. Remarquons que si $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont les termes d'une progression arithmétique, alors il en est de même de $|\alpha|$, $|\beta|$, $|\gamma|$, $|\delta|$, et le produit du plus grand et du plus petit parmi $|\alpha|$, $|\beta|$, $|\gamma|$ et $|\delta|$ est alors égal au produit des deux termes médians.

Soient donc a, b, c, d et e les nombres de l'énoncé et supposons qu'ils soient classés de telle façon que $|a| \leqslant |b| \leqslant |c| \leqslant |d| \leqslant |e|$. D'après l'hypothèse, b, c, d et e sont les termes d'une progression géométrique, et donc d'après les remarques préliminaires, on a l'égalité $|b||e| = |c||d|$. De même, on obtient :

$$|a||e| = |c||d| \quad ; \quad |a||e| = |b||d| \quad ; \quad |a||e| = |b||c| \quad ; \quad |a||d| = |b||c|$$

d'où on déduit sans mal l'égalité $|a| = |b| = |c| = |d| = |e|$. Ainsi a, b, c, d et e sont tous soit égaux à 2007, soit égaux à -2007.

Par hypothèse, l'un d'eux, disons a vaut 2007. Si maintenant un autre, disons b vaut -2007, alors du fait que a, b, c, d forme, à l'ordre près, une suite géométrique, on déduit que c et d valent l'un 2007 et l'autre -2007, disons $c = 2007$ et $d = -2007$. Mais, si $e = 2007$, alors a, b, c, e contient trois termes positifs ou un négatif et donc ne peut être réordonné en une suite géométrique. On arrive de même à une contradiction si $e = -2007$ en considérant le quadruplet (a, b, d, e).

Au final, tous les nombres sont égaux à 2007.

Solution de l'exercice 36. Après mise en place des parenthèses, la valeur de la fraction est :

$$A = \left(\frac{29}{15}\right)^{\varepsilon_1} \left(\frac{28}{14}\right)^{\varepsilon_2} \left(\frac{27}{13}\right)^{\varepsilon_3} \left(\frac{26}{12}\right)^{\varepsilon_4} \cdots \left(\frac{18}{4}\right)^{\varepsilon_{12}} \left(\frac{17}{3}\right)^{\varepsilon_{13}} \left(\frac{16}{2}\right)^{\varepsilon_{14}}$$

où les ε_i valent soit 1, soit -1 et, nécessairement $\varepsilon_1 = 1$ et $\varepsilon_2 = -1$. De plus, comme par hypothèse le résultat est entier, les nombres premiers qui n'interviennent qu'une fois, à savoir 29, 23, 19 et 17 doivent se trouver au numérateur. Ceci fournit $\varepsilon_7 = \varepsilon_{11} = \varepsilon_{13} = 1$. Après simplification des fractions, on obtient :

$$A = \frac{29 \cdot 23 \cdot 19 \cdot 17}{2 \cdot 3^4 \cdot 5^2} \cdot \left(\frac{3^3}{13}\right)^{\varepsilon_3} \left(\frac{13}{2 \cdot 3}\right)^{\varepsilon_4} \left(\frac{5^2}{11}\right)^{\varepsilon_5} \left(\frac{2^2 \cdot 3}{5}\right)^{\varepsilon_6} \left(\frac{11}{2^2}\right)^{\varepsilon_8} 3^{\varepsilon_9} \left(\frac{2 \cdot 5}{3}\right)^{\varepsilon_{10}} \left(\frac{3^2}{2}\right)^{\varepsilon_{12}} (2^3)^{\varepsilon_{14}}.$$

Il est impossible que ε_3 soit égal à -1, car sinon, il n'y aurait pas assez de 3 pour compenser un tel dénominateur. Ainsi $\varepsilon_3 = 1$, et pour éliminer le 13 qui apparaît alors au dénominateur, on est obligé d'avoir $\varepsilon_4 = 1$. En comptant les puissances de 5 maintenant, on obtient $\varepsilon_5 = 1$, puis en regardant le facteur 11, il suit $\varepsilon_8 = 1$. On en est à :

$$A = \frac{29 \cdot 23 \cdot 19 \cdot 17}{2^4 \cdot 3^2} \cdot \left(\frac{2^2 \cdot 3}{5}\right)^{\varepsilon_6} 3^{\varepsilon_9} \left(\frac{2 \cdot 5}{3}\right)^{\varepsilon_{10}} \left(\frac{3^2}{2}\right)^{\varepsilon_{12}} (2^3)^{\varepsilon_{14}}.$$

En regardant à nouveau l'exposant de 3, il suit $\varepsilon_{12} = 1$, puis en regardant l'exposant de 2, il vient $\varepsilon_6 = \varepsilon_{14} = 1$. Le nombre premier 5 donne alors ε_{10}, puis finalement en regardant une dernière fois l'exposant de 3, on obtient $\varepsilon_9 = \varepsilon_{12} = 1$. Au final :

$$A = 2 \times 3 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 = 1\,292\,646.$$

Solution de l'exercice 37. Posons pour tout i, $c_i = f_i(1)$. Pour tout entier m et réel x,

$$a(1+mx)^n = \prod_{i=1}^{n} f_i(1+mx) = \prod_{i=1}^{n} [c_i + m f_i(x)].$$

Supposons dans un premier temps que $a \neq 0$. Dans ce cas, $c_i \neq 0$ pour tout i. Fixons $x \in R$. Les polynômes (en T) $\prod_{i=1}^{n} [c_i + T f_i(x)]$ et $a(1+Tx)^n$ coïncident sur un nombre infini de valeurs (sur $\mathbb{N}$) et donc sont égaux en tant que polynômes. Les facteurs étant tous de degré 1, l'unicité de la factorisation entraîne $c_i + f_i(x)T = b_i(1+xT)$, pour certains réels b_i (dépendant *a priori* de x). Par identification des coefficients, il reste $b_i = c_i$ et $f_i(x) = b_i x$. On en déduit $f_i(x) = c_i x$, et ceci est vrai pour tout réel x.

Supposons maintenant $a = 0$. Nous voulons montrer qu'il existe un indice i tel que la fonction f_i soit identiquement nulle. Supposons le contraire et considérons des réels $a_1, \ldots, a_n$ tels que $f_i(a_i) \neq 0$ pour tout i. Pour tout entier m, posons $x_m = a_1 + m a_2 + \cdots + m^{n-1} a_m$. Comme $\prod_{i=1}^{n} f_i(x_m) = 0$, il existe i tel que $f_i(x_m) = 0$. Comme les indices i sont en nombre fini, il en existe un tel que $f_i(x_m) = 0$ pour une infinité de valeur de m. Or :

$$f_i(x_m) = f_i(a_1) + m f_i(a_2) + \cdots + m^{n-1} f_i(a_n)$$

est un polynôme non nul en m. Il est donc impossible qu'il s'annule une infinité de fois.

Solution de l'exercice 38. Posons $a = \frac{x+y}{2}$ et $b = \sqrt{xy}$. L'inégalité se réécrit

$$\frac{b^2}{a} + \sqrt{2a^2 - b^2} \geqslant a + b$$

ou encore $\sqrt{2a^2 - b^2} \geqslant a + b - \frac{b^2}{a}$. En élevant au carré, et après calcul, on obtient l'inégalité équivalente

$$a^4 - b^4 \geqslant 2a^3 b - 2ab^3$$

c'est-à-dire

$$(a^2 - b^2)(a^2 + b^2) \geqslant 2ab(a^2 - b^2).$$

Pour a et b strictement positifs, on a toujours $a \geqslant b$ d'après l'inégalité arithmético-géométrique, et donc si $a \neq b$ l'inégalité précédente est encore équivalente à

$$a^2 + b^2 - 2ab \geqslant 0$$

qui est encore vraie pour $a = b$. Ceci conclut.

Solution de l'exercice 39. Notons tout d'abord que pour $p > 0$, le dernier chiffre de 2^p est 6, 2, 4 ou 8 selon que le reste de p modulo 4 vaut 0, 1, 2 ou 3. Ainsi 2^{101} se termine par un 2.

Montrons par récurrence qu'il existe un entier N divisible par 2^{100} et dont les n derniers chiffres sont des 8 et des 9. Pour $n = 1$, il suffit de prendre $N = 2^{103}$ qui se termine par 8. Maintenant, soit N un entier divisible par 2^{100} et dont les n derniers chiffres sont de 8 et des 9. Soit a son $(n+1)$-ième chiffre en partant de la fin. Soit k la partie entière de $(9-a)/2$. Considérons le nombre $N' = N + k \cdot 2^{101} \cdot 10^n$. Il est évident qu'il est divisible par 2^{100} et que ses n derniers chiffres sont les mêmes que ceux de N. Quant à son $(n+1)$-ième chiffre en partant de la fin, il est égal à $a+2k$, car le dernier chiffre de 2^{101} est un 2. Avec la définition de k, on voit que $a+2k$ vaut soit 8 soit 9 selon que a est pair ou impair. Nous avons donc réussi de passer de n chiffres à $n+1$ chiffres.

Ainsi, en 100 étapes, on obtient un entier divisible par 2^{100} dont les 100 derniers chiffres sont des 8 et des 9. Il suffit alors de ne garder que ces 100 derniers chiffres, car 10^{100} est divisible par 2^{100}.

Solution de l'exercice 40. Écrivons $a = 2^c p$ et $b = 2^d q$, avec p et q impairs. On peut supposer sans perte de généralité que $c \geqslant d$. Alors $36a + b = 36 \cdot 2^c p + 2^d q = 2^d(36 \cdot 2^{c-d} p + q)$. Donc $(36a+b)(36b+a) = 2^d(362^{c-d}p+q)(36b+a)$ a le facteur impair non trivial $36 \cdot 2^{c-d}p + q$, et n'est pas une puissance de 2.

Solution de l'exercice 41. Choisissons la face F pour laquelle la longueur PP_F est la plus petite possible (s'il y a plusieurs faces comme cela, on peut en prendre une quelconque). Nous affirmons que P_F se trouve alors dans la face F. En effet, si le segment $[PP_F]$ coupe une autre face F' en un point P', alors on a $PP_{F'} < PP' < PP_F$ en contradiction avec le choix de F.

Solution de l'exercice 42. La somme que l'on considère peut être réécrite $2n(2n-2) - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 x_k$. On a

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 x_k = \sum_{k=1}^{n-1} x_k + (k-1)(k+1)x_k \leqslant n + n\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)x_k = n + n(2n-2-n) = n^2 - n.$$

La quantité cherchée est donc au moins $2n(2n-2) - (n^2 - n) = 3n^2 - 3n$, et cette borne est atteinte pour $x_1 = n-1$, $x_2 = \cdots = x_{n-2} = 0$, $x_{n-1} = 1$.

Solution de l'exercice 43. Pour $m = n = 1$ c'est le premier joueur qui perd dès son premier coup. Dans tous les autres cas il a une stratégie gagnante. Nous allons le démontrer sans exhiber la stratégie elle-même.

Notons d'abord qu'il s'agit d'un jeu fini et donc l'un des joueurs a nécessairement une stratégie gagnante. Supposons que c'est le deuxième joueur. Nous recommendons alors au premier joueur de hachurer juste une case : le coin en haut à droite du rectangle. Si notre supposition est correcte, le deuxième joueur a alors un coup gagnant. Mais dans ce cas, le premier joueur peut « retirer » son premier coup et faire le coup gagnant à la place du deuxième joueur. Quel que soit ce coup, le coin en haut à droite du rectangle sera automatiquement hachuré. Donc le premier joueur peut maintenant utiliser la soi-disant stratégie gagnante du deuxième joueur pour gagner. Cette contradication montre que c'est le premier joueur qui a une stratégie gagnante.

Solution de l'exercice 44. Tout d'abord, vérifions que le jeu se termine en un nombre fini de tours. Commençons par le cas où il n'y a au départ qu'une colonne. Le nombre de jetons qu'elle contient est de la forme $2^{\alpha}d$ avec d impair. On raisonne par récurrence sur α. Si $\alpha = 0$, alors dès le premier tour, la colonne sera éliminée et le jeu terminé. Maintenant, supposons que pour $\alpha = k$, le jeu est terminé en au plus N tours. Si $\alpha = k + 1$, au premier tour, la colonne est divisée en deux colonnes de $2^k d$ jetons, qui par hypothèse de récurrence, disparaissent chacune en au plus N tours. En tout, il faut donc au maximum $2N + 1$ tours pour éliminer la colonne de $2^{k+1}d$ pièces. Dans le cas général, si l'on a initialement m colonnes que, indépendamment, on peut éliminer en respectivement au plus $N_1, \dots, N_m$ tours, alors elles disparaissent toutes en au plus $N_1 + \cdots + N_m$ tours.

Pour résoudre le problème posé, nous allons associer à chaque situation une sorte d'invariant. Soit A le nombre de colonnes ayant un nombre de jetons multiple de 4. Soit B le nombre de colonnes ayant un nombre pair, non multiple de 4, de jetons. Enfin, posons $\delta = 1$ s'il y a des colonnes ayant un nombre impair de jetons, $\delta = 0$ s'il n'y en a pas. L'invariant que l'on considère est le nombre $I = \delta + A + \delta AB$, ou plus précisément sa parité. Juste avant le dernier tour, il n'y a que des colonnes ayant un nombre impair de jetons, et on a $I = 1$. Gagne le joueur qui se trouve face à cette situation. Montrons que Sandrine a une stratégie gagnante si et seulement si la valeur initiale de I est impaire. Plus précisément, on établit les deux fait suivants :

1. si un joueur se trouve face à une situation où I est impair, il peut toujours jouer de façon à rendre I pair,
2. si un joueur se trouve face à une situation où I est pair, quoi qu'il fasse, I deviendra impair.

Une fois ceci démontré, il est évident que la stratégie de Sandrine consiste à laisser toujours à Xavier une situation où I est pair.

Montrons le point 1, et supposons pour cela que I est impair. Si $\delta = 0$, alors A est impair. Le joueur subdivise une colonne de $4k$ jetons en deux colonnes de $2k$ jetons. Alors δ reste égal à 0, mais A change de parité (il augmente de 1 si k est pair, et diminue de 1 si k est impair). Si $\delta = 1$ et que A est pair, le joueur enlève les colonnes ayant un nombre impair de jetons. Alors I devient égal à A qui est pair. Enfin, si $\delta = 1$ et A est impair, alors nécessairement B est impair. Dans ce cas, le joueur subdivise une colonne de $4k + 2$ jetons en deux colonnes de $2k + 1$ jetons. Ainsi δ reste égal à 1, A ne change pas et B diminue de 1 et donc devient pair. Le nombre I est alors lui aussi devenu pair.

Montrons maintenant le point 2, en supposant que I est pair. Si $\delta = 0$, alors A est pair. Si le joueur divise une colonne de $4k$ jetons en deux, δ reste nul donc I reste égal à A, et A augmente de 1 ou diminue de 1 donc change de parité. Ainsi I devient impair. Si $\delta = 1$, alors A doit être impair, et B doit être pair. Si le joueur enlève les colonnes ayant un nombre impair de pièces, alors δ devient nul, donc I devient égal à A qui ne varie pas, et donc I devient impair. S'il subdivise une colonne de $4k$ jetons en deux colonnes de $2k$ jetons, il modifie seulement la parité de A. S'il coupe une colonne de $4k + 2$ jetons en deux colonnes de $2k + 1$ jetons, il change seulement la parité de B. Dans tous les cas, I devient impair.

Solution de l'exercice 45. Si n désigne le plus petit de ces entiers, la somme vaut :

$$n + (n + 1) + (n + 2) + \cdots + (n + 19) = 20n + 190.$$

On est donc ramené à résoudre l'équation $20n + 190 = 1030$, qui donne $n = 42$.

Solution de l'exercice 46. Tout d'abord, l'équation implique $0 \leqslant x^3 < 1$, c'est-à-dire $0 \leqslant x < 1$. Elle assure également que $(x + 1)^3$ et x^3 ont la même partie décimale, c'est-à-dire qu'ils diffèrent d'un entier. On est ainsi amené à résoudre $3x^2 + 3x = k$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) et à ne retenir que les solutions comprises entre 0 et 1. Or, le discriminant de l'équation précédente est $\Delta = 9 + 12k$; il est positif pour $k \geqslant 0$ (on rappelle que k est entier) et les solutions de l'équation s'écrivent dans ce cas :

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+12k}}{6}.$$

On remarque que le choix du signe $-$ conduit à un x négatif, ce qui est exclu. De plus pour que la solution n'excède pas 1, on doit prendre $k \leqslant 5$. Cela fournit six solutions potentielles à l'équation de départ dont on vérifie sans mal qu'elles conviennent toutes.

Solution de l'exercice 47. En appliquant plusieurs fois la définition, il vient que $\frac{1543}{275}$ a la couleur inverse de $\frac{1543}{275} - 5 = \frac{168}{275}$, qui à son tout a la même couleur que $\frac{275}{168}$. On poursuit le raisonnement de la même façon : $\frac{275}{168}$ a la couleur opposée de celle de $\frac{275}{168} - 1 = \frac{107}{168}$, qui a la même couleur que $\frac{168}{107}$, qui a la couleur opposée de $\frac{168}{107} - 1 = \frac{61}{107}$, qui a la même couleur que $\frac{107}{61}$, qui a la couleur opposée de $\frac{107}{61} - 1 = \frac{46}{61}$, qui a la même couleur que $\frac{61}{46}$, qui a la couleur opposée de $\frac{61}{46} - 1 = \frac{15}{46}$ qui a la même couleur que $\frac{46}{15}$, qui a la couleur opposée de $\frac{46}{15} - 3 = \frac{1}{15}$ qui a la même couleur que 15, lui-même de la même couleur que 1, c'est-à-dire blanc.

En remontant, la couleur de $\frac{1543}{275}$ est aussi blanche.

Solution de l'exercice 48. En appliquant l'équation à $x = y = 0$, on a $f(0) = 0$. Avec $y = 0$, on trouve $f(x^3) = xf(x)^2$, ou de manière équivalente,

$$f(x) = x^{1/3} f(x^{1/3})^2.$$

En particulier, x et $f(x)$ ont toujours le même signe. Soit S l'ensemble défini par

$$S = \{a > 0,\ f(ax) = af(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

On a évidemment $1 \in S$. Montrons que si $a \in S$, alors $a^{1/3} \in S$. En fait,

$$axf(x)^2 = af(x^3) = f(ax^3) = f((a^{1/3}x)^3) = a^{1/3}xf(a^{1/3}x)^2$$

et donc

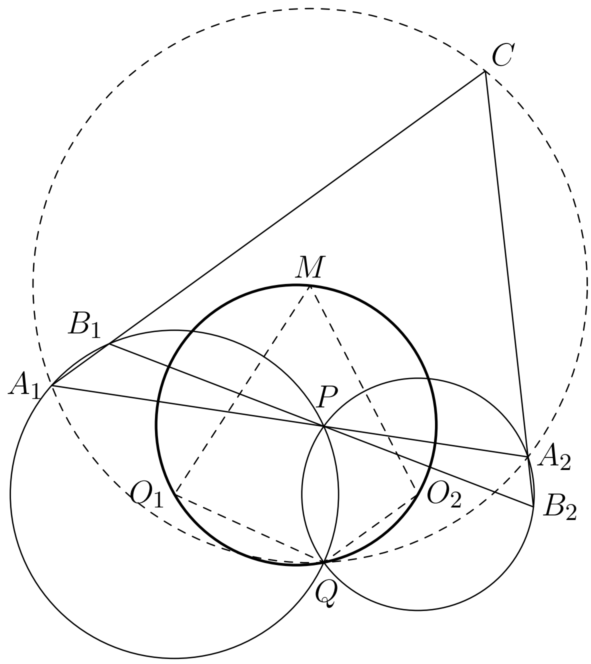
$$[a^{1/3}f(x)]^2 = f(a^{1/3}x)^2.$$

Comme x et $f(x)$ ont le même signe, $f(a^{1/3}x) = a^{1/3}f(x)$. Montrons maintenant que si $a, b \in S$, alors $a + b \in S$:

$$\begin{aligned} f((a+b)x) &= f((a^{1/3}x^{1/3})^3 + (b^{1/3}x^{1/3})^3) \\ &= (a^{1/3}+b^{1/3})[f(a^{1/3}x^{1/3})^2 - f(a^{1/3}x^{1/3})f(b^{1/3}x^{1/3}) + f(b^{1/3}x^{1/3})^2] \\ &= (a^{1/3}+b^{1/3})(a^{2/3} - a^{1/3}b^{1/3} + b^{2/3}x^{1/3}f(x^{1/3})^2 \\ &= (a+b)f(x). \end{aligned}$$

On conclut par une récurrence immédiate que $S = \mathbb{N}^*$ et en particulier, $f(2007x) = 2007f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 49. Faisons une figure :



On commence par montrer que Q est sur le cercle circonscrit à A_1A_2C. Il suffit pour cela de voir que les angles en Q et C du quadrilatère A_1QA_2C sont supplémentaires :

$$\widehat{A_1CA_2} + \widehat{A_1QA_2} = \widehat{B_1CB_2} + \widehat{A_1QP} + \widehat{PQA_2} = \widehat{B_1CB_2} + \widehat{CB_1B_2} + \widehat{CB_2B_1} = \pi$$

en utilisant la cocyclicité de A_1, B_1, P, Q d'une part, et A_2, B_2, Q, P d'autre part.

On va voir ensuite, en exhibant à nouveau des angles supplémentaires, que M est sur le cercle circonscrit à Q et aux centres O_1 et O_2 de S_1 et S_2 . En effet, par ce qui précède, $MQ = MA_1$, et de plus, $O_1Q = O_1A_1$, donc (MO_1) est la bissectrice de $[A_1Q]$. D'après le théorème de l'angle au centre, on a donc :

$$\widehat{MO_1Q} = \frac{1}{2}\widehat{A_1O_1Q} = \pi - \widehat{A_1PQ} \quad \text{et de même} \quad \widehat{MO_2Q} = \pi - \widehat{A_2PQ}.$$

Par conséquent, il vient :

$$\widehat{MO_1Q} + \widehat{MO_2Q} = 2\pi - \widehat{A_1PQ} - \widehat{QPA_2} = \pi$$

ce qui dit bien que O_1, Q, O_2 et M sont cocycliques.

En observant que quand A_1 tend respectivement vers P, Q, et B_1, M tend vers O_2, Q et un point dépendant du point B_1 considéré, on conclut ?nalement que le lieu des points M est le cercle circonscrit à O_1QO_2 privé de O_2 et Q.

Solution de l'exercice 50. On vérifie immédiatement que les fonctions de la forme $f(n) = (n-n_0)a$ où n_0 est un entier et a un réel strictement positif conviennent. Montrons que ce sont les seules possibles.

Soit f une fonction satisfaisant les conditions de l'énoncé. En prenant $m = n$, il existe par hypothèse un entier n_0 tel que $0 = f(n) - f(n) = f(n_0)$. Comme la fonction est strictement croissante, un tel entier n_0 est unique. Posons $a = f(n_0+1)$. Montrons maintenant par récurrence que f prend toutes les valeurs de la forme na avec n entier. Tout d'abord, si $m \in \mathbb{N}$, on a $-f(m) = f(n_0) - f(m) = f(k)$ pour un certain entier k, et donc si une valeur est prise par f, son opposé est également prise par f. Commençons maintenant la récurrence. Pour $n = 0$, on a déjà établi que $f(n_0) = 0$. Supposons maintenant que pour un certain entier positif n, il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $na = f(m)$. Alors $(n + 1)a = na + a = na - (-a)$; $na = f(m)$ est une valeur prise par

f, $a = f(n_0+1)$ est également une valeur prise par f, donc $-a$ est une valeur prise par f. Par hypothèse, $na-(-a)$ est donc aussi une valeur prise par f, ce qui achève la récurrence.

On montre à présent que seuls les nombres de cette forme sont des valeurs prises par f. Soit b un réel tel que b/a n'est pas entier (remarquons que $a > f(n_0) = 0$ donc on peut diviser par a), et supposons par l'absurde que b est une valeur prise par f. Si $b > 0$, soit n la partie entière (inférieure) de b/a. Par définition et hypothèse, $na < b < (n+1)a$ et donc $0 < b - na < a$. On a supposé que b était une valeur prise par f, et d'après l'étude précédente, c'est également le cas de na. On en déduit que $b-na$ est une valeur prise par f. Mais comme f est strictement croissante, elle ne peut prendre aucune valeur entre $f(n_0) = 0$ et $f(n_0+1) = a$, d'où la contradiction. Dans le cas où $b < 0$, on raisonne de même en considérant la partie entière supérieure au lieu de la partie entière inférieure.

Finalement, l'image de la fonction f étant déterminée, et sachant que la fonction f est strictement croissante, il n'y a plus qu'une seule fonction f solution qui est $f(n) = (n-n_0)a$.

Solution de l'exercice 51. La clé consiste à étudier la suite (a_n) modulo 4. Un calcul immédiat montre que pour toute valeur de a_n, a_{n+2} est congru à 2 ou à 3 modulo 4 ; en particulier il n'est jamais un carré. Ainsi les deux seuls carrés qui peuvent apparaître parmi les a_n sont les deux premiers, a_0 et a_1.

Supposons un instant que ces deux nombres soient des carrés. Cela signifie que a_0^6+1999 est un carré, c'est-à-dire que l'équation diophantienne $x^6+1999 = y^2$ a une solution. Or cette dernière égalité se réécrit $(y-x^3)(y+x^3) = 1999$ et comme 1999 est premier l'un des deux facteurs vaut 1 et l'autre 1999. En effectuant la différence, il reste $2|x|^3 = 1998$, ce qui n'est pas possible étant donné que 999 n'est pas un cube. Ainsi, l'équation diophantienne n'a pas de solutions, et les deux premiers termes de la suite ne peuvent être simultanément des carrés.

Solution de l'exercice 52. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$(a_1+\cdots+a_n)(a_1^3+\cdots+a_n^3) \geqslant (a_1^2+\cdots+a_n^2)^2$$

avec égalité si et seulement si $(a_1,\ldots,a_n)$ et $(a_1^3,\ldots,a_n^3)$ sont proportionnels. Or, ici, $96\times 216 = 144^2$: on est donc dans le cas d'égalité. Ceci montre que $a_1 = \cdots = a_n = a$. Il s'ensuit $na = 96$ et $na^2 = 144$, d'où $a = 3/2$, et $n = 64$.

Solution de l'exercice 53. Supposons que (a,b,c) est une solution de l'équation. Tout d'abord, remarquons que 2^{b+1} est pair, et que 3^c est impair, ce qui implique que a est impair. Posons $a = 2k+1$. L'hypothèse $b \geqslant 1$ implique que 4 divise $3^c-a^2 = 3^c-4k(k+1)-1$, et donc 4 divise 3^c-1. On a $3^c-1 = (3-1)(3^{c-1}+3^{c-2}+\cdots+3+1)$ et donc 3^c-1 est un multiple de 4 si et seulement si $3^{c-1}+3^{c-2}+\cdots+3+1$ est pair. Comme c'est une somme de c nombres impairs, c doit être un nombre pair. On pose $c = 2c'$. Notre équation s'écrit $2^{b+1} = 3^{2c'}-a^2 = (3^{c'}+a)(3^{c'}-a)$. Ainsi, les deux facteurs de droite sont des puissances de 2, et on obtient un système

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3^{c'}+a &=& 2^x \\ 3^{c'}-a &=& 2^y \\ x+y &=& b+1 \end{array}\right.$$

Comme $3^{c'}$ et a sont impairs, leur somme et leur différence sont pairs, d'où x et y sont tous les deux strictement positifs. En outre, le fait que a soit strictement positif implique $x > y$, et donc $x \geqslant 2$. En additionnant les deux premières équations du système puis en divisant par 2, on obtient $3^{c'} = 2^{x-1}+2^{y-1}$. Or, $3^{c'}$ est impair et 2^{x-1} est pair, donc 2^{y-1} est impair, d'où $y = 1$. La troisième équation du système donne alors $x = b$ (en particulier, $b \geqslant 2$), et finalement, $3^{c'} = 2^{b-1}+1$. Dans le cas où $b = 2$, on a $c' = 1$ (donc $c = 2$), puis l'équation de départ donne alors $a = 1$, en effet $1^2+2^{2+1} = 3^2$. Le triplet $(1,2,2)$ est solution.

Supposons maintenant que $b \geqslant 3$. D'après l'égalité $3^{c'} = 2^{b-1}+1$, on a $4|3^{c'}-1$ et on montre comme précédemment que $c' = 2c''$, avec c'' vérifiant le système

$$\begin{cases} 3^{c''}+1 &= 2^{x'} \\ 3^{c''}-1 &= 2^{y'} \\ x'+y' &= b-1 \end{cases}$$

De manière analogue à ce qui a été fait on dessus, on obtient que $y' = 1$, d'où l'on déduit que $c'' = 1$, c'est-à-dire $c = 4$, $x' = 2$ et $b = 4$. L'équation initiale donne alors $a = 7$, en effet $7^2 + 2^{4+1} = 3^4$.

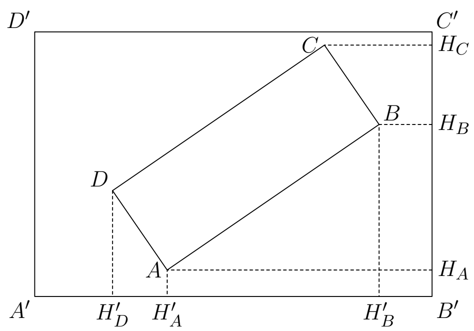
Ainsi, les seules solutions sont $(1,2,2)$ et $(7,4,4)$.

Solution de l'exercice 54. Notons A_n le nombre en question et montrons la propriété par récurrence sur n. On a $A_1 = 111$, qui est bien divisible par 3, mais pas par 9. Maintenant supposons que A_n est divisible par 3^n, mais pas par 3^{n+1}.

$$A_{n+1} = 1\underbrace{00\ldots00}_{3^n-1}1\underbrace{00\ldots00}_{3^n-1}1 \cdot A_n.$$

Le nombre $100\ldots00100\ldots001$ a pour somme des chiffres 3. Il est donc divisible par 3, mais pas par 9. Par conséquent, A_{n+1} est divisible par 3^{n+1}, mais pas par 3^{n+2}.

Solution de l'exercice 55. Ce n'est pas possible. En effet, projetons les sommets A, B, C, D sur les côtés de $A'B'C'D'$ comme sur le schéma suivant :



D'après l'inégalité triangulaire, on a $AB \leqslant H_AH_B + H'_AH'_B$ et $AD = BC \leqslant H_BH_C + H'_AH'_D$, et on peut donc majorer le demi-périmètre

$$AB + AD \leqslant H_AH_B + H_BH_C + H'_AH'_B + H'_AH'_D \leqslant B'C' + A'B'.$$

Le demi-périmètre de $ABCD$ est majoré par celui de $A'B'C'D'$, il en est donc de même de leurs périmètres.

Solution de l'exercice 56. Si a est un diviseur de N, alors N/a en est un aussi. Ainsi les diviseurs se répartissent en paires. La seule exception, c'est quand $a = N/a$, autrement dit, $N = a^2$. Dans ce cas, a est le seul diviseur à ne pas avoir de paire. Donc N a un nombre impair de diviseurs positifs si et seulement c'est un carré parfait. Les nombres répondant à la question sont donc 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 et 100.

Solution de l'exercice 57. Soit f une fonction vérifiant les conditions de l'énoncé. Alors si $B \subset C \subset A$ vérifient $f(C) \in B$, on a $f(C) = f(B \cup (C\backslash B)) \in \{f(B), f(C\backslash B)\}$. Mais $f(C) \notin C\backslash B$, donc $f(C) \neq f(C\backslash B)$. Ce qui montre que $f(C) = f(B)$. Nous allons numéroter les éléments de A de la façon suivante. Posons $a_1 = f(A)$. Alors, pour tout $B \subset A$ contenant a_1, $f(B) = a_1$

d'après l'argument précédent. Posons maintenant $a_2 = f(A\backslash\{a_1\})$. Alors pour tout $B \subset A$ tel que $a_1 \notin B$ et $a_2 \in B$, on a $f(B) = a_2$. De même, en posant $a_3 = f(A\backslash\{a_1, a_2\})$, pour tout B tel que $a_1, a_2 \notin B$ et $a_3 \in B$, alors $f(B) = a_3$. On définit a_4 et a_5 de manière similaire.

Inversement, si on a choisi une numérotation $a_1, \ldots, a_5$ des éléments de A, on peut lui associer une fonction de la manière suivante : pour tout $B \in A$, on définit $f(B)$ comme étant égal à $a_i \in B$ avec i minimal. Ces fonctions sont toutes distinctes, et on vérifie facilement qu'elles respectent les conditions de l'énoncé.

Finalement, il y a autant de telles fonctions que de manières de numéroter les 5 éléments de A, c'est-à-dire $5! = 120$.

Solution de l'exercice 58. La composée des deux symétries centrales est une translation de vecteur $\vec{v}(a, b)$ (non nul) qui laisse encore globalement invariant le graphe de f. Comme ce dernier ne peut contenir deux points de même abscisse (puisque f est une fonction), on a nécessairement $a \neq 0$. En terme de fonctions, l'invariance par translation se traduit par l'égalité $f(x+a) = f(x)+b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il s'ensuit que la fonction g définie par $g(x) = f(x) - bx$ est périodique de période a. Au final, f s'écrit comme la somme d'une fonction linéaire et d'une fonction périodique.

Solution de l'exercice 59. Si n est pair, on peut écrire $n = 2n - n$. Sinon, appelons d le plus petit nombre premier impair qui ne divise pas n. Puisque n s'écrit manifestement sous la forme $n = dn - (d-1)n$, il suffit de montrer que dn et $(d-1)n$ ont le même nombre de diviseurs premiers. Les facteurs premiers de dn sont ceux de n auxquels il faut ajouter d (puisque par hypothèse d ne divise pas n). D'autre part, tous les facteurs premiers de $d-1$ sont certainement plus petits que $d-1$ et donc apparaissent dans n, à l'exception de 2. Ainsi dn et $(d-1)n$ ont tous les deux un facteur premier de plus que n (c'est d pour dn et 2 pour $(d-1)n$), ce qui conclut la démonstration.

Solution de l'exercice 60. Notons que la différence entre le numérateur et le dénominateur de chaque fraction est $n+2$. Donc $n+2$ doit être premier avec tous les entiers de 19 à 91. Comme cette liste contient tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à 91, $n+2$ doit avoir seulement des facteurs premiers strictement plus grands que 91. Le plus petit entier vérifiant cette condition est 97, soit $n = 95$.

Solution de l'exercice 61. Soit A un sous-ensemble de X ne contenant aucun des A_i, et de cardinal maximal. Soit k ce cardinal. Par hypothèse, pour tout $x \in X\backslash A$, il existe $i(x) \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $A_{i(x)} \subset A \cup \{x\}$, sinon l'ensemble $A \cup \{x\}$ vérifierait lui aussi la condition et A ne serait pas de cardinal maximal. Soit $L_x = A \cap A_{i(x)}$, qui, d'après l'observation précédente, est de cardinal 2. Comme le cardinal de $A_i \cap A_j$ est inférieur ou égal à 1 pour tous $i \neq j$, les L_x pour $x \in X\backslash A$ doivent être tous distincts. Or, il y a $\binom{k}{2}$ sous-ensembles distincts de A de 2 éléments, et $n-k$ ensembles L_x. On en déduit que $n - k \leqslant \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$. D'où $k^2 + k \geqslant 2n$. Mais alors $k \geqslant [\sqrt{2n}]$; en effet, si on avait $k < [\sqrt{2n}]$, on aurait $k \leqslant \sqrt{2n} - 1$ et donc $k^2 + k \leqslant 2n - \sqrt{2n} < 2n$.

Solution de l'exercice 62. Calculons la valeur des mots utilisés pour écrire les nombres :

Un :	35	Deux :	54	Trois :	81
Quatre :	82	Cinq :	43	Six :	52
Sept :	60	Huit :	58	Neuf :	46
Dix :	37	Onze :	60	Douze :	71
Treize :	83	Quatorze :	123	Quinze :	92
Seize :	64	Vingt :	72	Trente :	82
Quarante :	97	Cinquante :	104	Soixante :	107
Cent :	42	Et :	25		

Parmi les nombres précédents, ceux inférieurs à 100 sont largement dépassés par la somme des valeurs de leurs lettres. On en déduit que le nombre cherché est supérieur à 100. On vérifie que les nombres entre 101 et 120 ne conviennent pas. Comme la plus petite valeur associée à un chiffre des unités est 43 (qui est associée à 5), et qu'un test assure que les nombres 125, 135, 145, 155 et 165 sont encore largement dépassés par la somme des valeurs de leurs lettres, on en déduit que le nombre cherché est supérieur à 200.

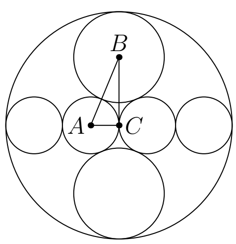
La valeur littérale de 200 est 96. Comme la somme des nombres compris entre 1 et 20, hormis 14, n'excède pas 100, aucun des nombres compris entre 200 et 220, hormis 214 n'est susceptible de convenir. On vérifie que 214 ne convient pas non plus, pas plus que 221. Le meilleur candidat est désormais 222 qui répond, lui, à la question.

Solution de l'exercice 63. Soit r_n le rayon de Γ_n et d_n son diamètre. Posons $s_n = d_1+d_2+\cdots+d_n$, et soit x_n l'abscisse positive du point de tangence de Γ_n et de $\mathcal{P}$ (Γ_n est tangent à $\mathcal{P}$ en (x_n, x_n^2) et $(-x_n, x_n^2)$). Alors, le centre de Γ_n est $(0, s_{n-1}+r_n)$. La pente de la droite tangente à $\mathcal{P}$ en (x_n, x_n^2) est $2x_n$, et la pente de la droite normale est $-\frac{1}{2x_n}$. Or, le centre de Γ_n est sur cette normale, donc $\frac{x_n^2-(s_{n-1}+r_n)}{x_n-0} = -\frac{1}{2x_n}$, et $x_n^2 - s_{n-1} - r_n = -\frac{1}{2}$. En outre, $r_n^2 = (x_n-0)^2 + (x_n^2 = s_{n-1} - r_n)^2$, donc $x_n^2 = r_n^2 - \frac{1}{4}$ et $r_n^2 - r_n - s_{n-1} + \frac{1}{4} = 0$. La résolution de cette équation donne $r_n = \frac{1+2\sqrt{s_{n-1}}}{2}$ et $d_n = 1 + 2\sqrt{s_{n-1}}$. Puis on montre par récurrence forte que $d_n = 2n-1$. La réponse à la question est donc 4013.

Solution de l'exercice 64. La lampe n change d'état pour chaque diviseur de n. Elle est allumée à la fin si et seulement si elle a changé d'état un nombre impair de fois, donc si et seulement si elle a un nombre impair de diviseurs. Or, les entiers n ayant un nombre impair de diviseurs sont exactement les carrés parfaits. En effet, on peut mettre leurs diviseurs deux par deux (on range ensemble les deux diviseurs dont le produit fait n), sauf leur racine carrée si celle-ci est entière. Finalement, le nombre recherché est le plus grand carré inférieur ou égal à 2008. On a $\sqrt{2008} \approx 44,8$ donc l'entier cherché est $44^2 = 1936$.

Solution de l'exercice 65. Comme f est strictement convexe, pour tous x, y, t tels que $x < t < y$, le point $(t, f(t))$ est strictement au dessous de la droite joignant $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$. Supposons que quatre points $A = (a, f(a))$, $B = (b, f(b))$, $C = (c, f(c))$ et $D = (d, f(d))$ avec $a < b < c < d$ forment un parallélogramme. Remarquons qu'alors (AC) et (BD) se coupent : en effet, B est au dessous de (AC) et C est au dessous de (BD). Ce sont donc nécessairement les diagonales du parallélogramme. Mais alors elles se coupent en leur milieu. Or $\frac{a+c}{2} < \frac{b+d}{2}$, ce qui constitue une contradiction.

Solution de l'exercice 66. Notons r le rayon que l'on cherche. On note A, B, C les centres des cercles comme sur la figure :



D'après le théorème de Pythagore, $AC^2 + BC^2 = AB^2$, et d'autre part, $AC = R/4$, $BC = R - r$, $AB = r + R/4$. On a donc $R^2/16 + (R-r)^2 = (r + R/4)^2$. En développant et en simplifiant, on obtient

$$r = \frac{2}{5}R.$$

Solution de l'exercice 67. La réponse est oui. Tout d'abord, le nombre N est divisible par 9 car la somme de ses chiffres est un multiple de 9 (elle est égale à $2007 \times (2+7) = 2007 \times 9$). On a

$$\frac{N}{9} = 22\,302\,23 \cdots 0\,223$$

constitué de 2007 fois la suite de nombres 223. La somme des chiffres de $N/9$ est donc un multiple de 2007, qui est lui-même un multiple de 9, et donc $N/9$ est divisible par 9 ; autrement dit, N est divisible par 81.

Solution de l'exercice 68. L'écriture peut ne se terminer par aucun zéro (par exemple pour $n = 0$), se terminer par un zéro (par exemple pour $n = 1$ ou $n = 2$), ou par deux zéros (par exemple pour $n = 3$). Pour $n \geqslant 3$, 2^n et 4^n sont divisibles par 8, et 3^n est congru à 3 ou 1 modulo 8, donc $1^n + 3^n$ est congru à 2 ou 4. Il s'ensuit que la somme est congrue à 2 ou 4 modulo 8. Or, 1000 est divisible par 8, par conséquent la somme ne peut pas se finir par trois zéros ou plus.

Solution de l'exercice 69. L'application $f : x \mapsto \frac{n}{x}$ réalise une bijection de l'ensemble des diviseurs positifs de n. Ainsi D est aussi égal au produit des $f(x)$ pour x diviseur de n, ce qui s'écrit encore $D = \frac{n^d}{D}$. Le résultat s'ensuit.

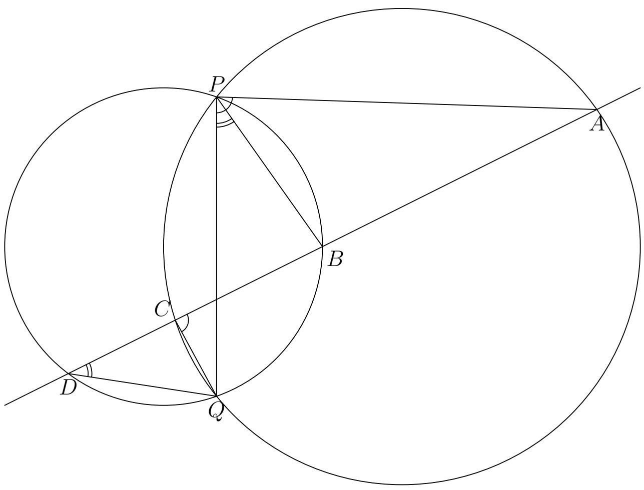
Solution de l'exercice 70. L'année prochaine, Pierre fêtera son 13-ième anniversaire. L'année en cours, il fêtera donc ou a déjà fêté son 12-ième anniversaire. Donc il a soit 11 soit 12 ans. Vu qu'il en avait 10 avant-hier, il en a en fait 11 maintenant. Ce qui implique deux choses : (1) il a eu son anniversaire hier ou aujourd'hui ; (2) il n'a pas encore fêté son anniversaire cette année. Ainsi son anniversaire était hier et c'était l'année dernière. Donc hier on était le 31 décembre et aujourd'hui le 1 janvier.

Solution de l'exercice 71. Soient $a_n = \cos(n\pi x)$ et $b_n = \cos(n\pi y)$. On a

$$(a_n + b_n)^2 + (a_n - b_n)^2 = 2(a_n^2 + b_n^2) = 2 + (a_{2n} + b_{2n}).$$

Si $(a_n + b_n)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs, il s'ensuit que $(a_n - b_n)$ ne prend aussi qu'un nombre fini de valeurs, et c'est donc aussi le cas de (a_n) et (b_n). En particulier, il existe $n > m$ tels que $a_m = a_n$. Ainsi, soit $(n-m)\pi x$, soit $(n+m)\pi x$ est un multiple entier de π, ce qui montre que x est rationnel. De même, y est aussi rationnel.

Solution de l'exercice 72. On commence par faire une jolie figure.



Par le théorème de l'angle inscrit, on a $\widehat{APQ} = \widehat{ACQ}$ et $\widehat{BPQ} = \widehat{BDQ}$. D'où $\widehat{APB} = \widehat{APQ} - \widehat{BPQ} = \widehat{ACQ} - \widehat{BDQ} = \pi - \widehat{DCQ} - \widehat{CDQ} = \widehat{DQC}$.

Solution de l'exercice 73. Considérons les paires de termes consécutifs de la suite de Fibonacci (F_0, F_1), (F_1, F_2), ... pris modulo 2007. Comme il n'y a que 2007^2 paires différentes d'entiers modulo 2007 et que la suite de Fibonacci est infinie, il existe deux paires congrues entre elles : $F_i \equiv F_{i+m} \pmod{2007}$ et $F_{i+1} \equiv F_{i+1+m} \pmod{2007}$ pour certains i et m.

Si $i \geqslant 1$, $F_{i-1} \equiv F_{i+1} - F_i \equiv F_{i+m+1} - F_{i+m} \equiv F_{i+m-1} \pmod{2007}$. Par suite $F_{i-2} \equiv F_{i-1} - F_i \equiv F_{i+m-1} - F_{i+m} \equiv F_{i+m-2} \pmod{2007}$. En continuant ainsi, $F_j \equiv F_{j+m} \pmod{2007}$ pour tout $j \leqslant 0$. En particulier, $0 = F_0 \equiv F_m \pmod{2007}$, et donc F_m est divisible par 2007.

Solution de l'exercice 74. Étant donné un coloriage des cases de la première ligne, cherchons combien il existe de façons de le prolonger en un coloriage de tout l'échiquier satisfaisant la condition de l'énoncé. Nous devons distinguer deux cas.

Supposons tout d'abord qu'il y a sur la première ligne deux cases consécutives de même couleur, et montrons que dans ce cas, il existe une unique façon de terminer le coloriage de l'échiquier. Supposons, sans perte de généralité, que les deux cases précédentes soient bleues. Alors les deux cases immédiatement en dessous doivent être coloriées en rouge, comme on le voit en considérant le carré qui regroupe les quatre cases en question. Le carré immédiatement à gauche du précédent (s'il existe) contient trois cases déjà coloriées : la couleur de la dernière est donc déterminée, et est en fait celle contraire à sa voisine du dessus (puisque les deux autres cases sont de couleur contraire). En appliquant à nouveau le même raisonnement au carré situé encore immédiatement à gauche, et ainsi de suite, puis aux carrés de droite, on montre que les cases de la seconde ligne ont toutes la couleur contraire des cases correspondantes de la première ligne. On peut alors itérer l'argument pour montrer que la couleur des cases de la troisième ligne sont elles aussi déterminées, et ainsi de suite de toutes les couleurs des cases de l'échiquier. Il est clair que réciproquement le coloriage obtenu satisfait l'hypothèse de l'énoncé. En résumé, sous l'hypothèse de cet alinéa, il existe une et une seule façon de terminer le coloriage.

Supposons maintenant que les couleurs de la première ligne soient alternées. En utilisant des arguments analogues à ceux détaillés précédemment[2], on montre qu'il y a exactement deux possibilités pour la couleur de la deuxième ligne : soit elle est identique à la première ligne, soit les couleurs sont toutes opposées. Une récurrence immédiate montre que c'est encore le cas de chacune des lignes suivantes. Il y a donc, dans cette situation, 2^{n-1} possibilités de compléter le coloriage : pour chacune des $n-1$ lignes restantes, il faut choisir entre les deux options « mêmes couleurs que la première ligne » et « couleurs opposées à celles de la première ligne ».

Il ne reste plus qu'à faire le décompte. Il y a évidemment en tout 2^n façons de colorier la première ligne, puisque chacune des n cases offre deux choix (rouge ou bleu). Parmi celles-ci, seulement 2 relèvent du deuxième cas : soit on commence par rouge, soit par bleu, et le reste est ensuite fixé. Il reste donc $2^n - 2$ coloriages pour le premier cas. Au total, on a donc :

$$2 \times 2^{n-1} + (2^n - 2) = 2^{n+1} - 2$$

coloriages possibles.

Solution de l'exercice 75. Posons $y = \sqrt{x+1}$. On a $y \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, et $x = y^2 - 1$. L'inégalité est équivalente à

$$\frac{(y^2-1)^2}{(y^2-y)^2} < \frac{(y^2-1)^2 + 3(y^2-1) + 18}{y^4}$$

encore équivalente aux inégalités suivantes

$$\frac{(y+1)^2}{y^2} < \frac{y^4 + y^2 + 16}{y^4} \Leftrightarrow (y+1)^2 y^2 < y^4 + y^2 + 16 \Leftrightarrow 2y^3 < 16 \Leftrightarrow y < 2.$$

[2]La couleur de la première case déterminer complètement les couleurs de toutes les cases de la ligne.

La condition est donc satisfaite exactement pour $y \in]0,1[\cup]1,2[$ et $x \in]-1,0[\cup]0,3[$.

Solution de l'exercice 76. Montrons qu'il n'existe pas de telle fonction. Supposons par l'absurde que f vérifie la condition de l'énoncé. Avec $x = y = \pi/2$, on a $|f(\pi)+2| < 2$, et avec $x = -\pi/2$ et $y = 3\pi/2$, on obtient $|f(\pi)-2| < 2$. Or,

$$4 = |f(\pi) + 2 - f(\pi) + 2| \leqslant |f(\pi) + 2| + |-f(\pi) + 2| < 2 + 2,$$

ce qui constitue une contradiction manifeste.

Solution de l'exercice 77. La remarque suivante va nous faciliter la tache : le point de coordonnées (x, y) est visible si, et seulement si x et y sont premiers entre eux. Effectuons à présent le décompte des points visibles en comptant séparément ceux (strictement) au-dessous de la diagonale $x = y$, ceux au-dessus et ceux sur la diagonale. Bien entendu, par symétrie, il y a autant de points visibles au-dessous qu'au dessus. Par ailleurs sur la diagonale, il y a un unique point visible qui est $(1, 1)$.

À abscisse x fixée, il y a, par la première remarque de cette solution, autant du points visibles sous la diagonale que d'entiers dans $\{0, 1, \ldots, x-1\}$ qui sont premiers avec x. Par définition, c'est $\varphi(x)$ où φ est la fonction indicatrice d'Euler. Au final, le nombre cherché est donc :

$$1 + 2\big[\varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \cdots + \varphi(25)\big] = 399.$$

(Pour calculer rapidement les premières valeurs de φ, on peut utiliser les formules $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$ lorsque p est un nombre premier et $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ lorsque a et b sont premiers entre eux.)

Solution de l'exercice 78. Montrons tout d'abord que pour tout entier n, il existe une écriture $n = rs$ telle que $f(n) = r + s$ et $f(2n) = 2r + s$. Exploitons pour cela l'équation fonctionnelle avec $m = 1$. Elle fournit une equation du second degré en $f(2n)$ dont le discriminant est $\Delta = f(n)^2 - 4n$. Celui-ci doit être entier, *i.e.* il existe un entier a tel que $f(n)^2 - 4n = a^2$. On a alors $(f(n) + a)(f(n) - a) = 4n$. Les deux facteurs doivent être pairs, car leur produit est $4n$ et leur somme $2f(n)$. On pose donc $f(n) + a = 2r$ et $f(n) - a = 2s$ pour des entiers r et s. On a alors $f(n) = r + s$ et $rs = n$. Finalement, la résolution de l'équation du second degré donne les deux solutions $f(2n) = 2r + s$ ou $f(2n) = 2s + r$, et quitte à échanger les rôles de r et s, on peut ne conserver que la première.

Appliquons maintenant sans modération le résultat précédent. Déjà, pour $n = 1$, on a nécessairement $r = s = 1$, et donc $f(1) = 2$, $f(2) = 3$. Également, si $n = p$ est un nombre premier, on doit avoir $r = 1$, $s = p$ ou $r = p$, $s = 1$. Dans tous les cas $f(p) = r + s = p + 1$. Soit maintenant n un nombre impair. D'après le postulat de Bertrand, il existe un nombre premier p compris entre $\frac{n}{2}$ et n, et d'après le cas que l'on vient de traiter, $f(p) = p + 1$. La croissance de f entraîne donc $f(n) \geqslant f(p) = p+1 \geqslant \frac{n}{2}+1$. Considérons une écriture $n = rs$ pour laquelle $f(n) = r+s$. Si aucun des diviseurs r et s ne vaut 1, ils sont tous les deux supérieurs ou égaux à 3 (puisque n est supposé impair), d'où il résulte $f(n) = r + s \leqslant \frac{n}{3} + 3$, ce qui est en contradiction autre l'autre estimation dès que $n > 12$. Ainsi pour tout nombre impair $n > 12$, on a aussi $f(n) = n + 1$. Le seul nombre impair qui échappe aux méthodes génériques précédentes est $n = 9$ qui, en l'occurrence se traite facilement à la main : les deux décompositions $n = rs$ possibles sont $9 = 9 \times 1$ et $9 = 3 \times 3$, mais dans le second cas, on aurait $f(9) = 6$, ce qui contredit la croissance de f étant donné $f(7) = 8$; ainsi $f(9) = 10$.

Il ne reste plus qu'à traiter le cas des nombres pairs. Pour cela, nous montrons que si $f(n) = n+1$, alors $f(2n) = 2n+1$, la conclusion « $f(n) = n+1$ pour tout entier n » en résultera par une récurrence immédiate sur la valuation 2-adique de n. Supposons donc $f(n) = n+1$ pour un entier n fixé. D'après le premier alinéa, on sait qu'il existe une écriture $n = rs$ pour laquelle $f(n) = r+s$ et $f(2n) = 2r + s$. Les seules possibilités pour concilier $rs = n$ et $r + s = n + 1$ sont $r = n$, $s = 1$ d'une part et $r = 1$, $s = n$ d'autre part. Dans le premier cas, $f(n) = 2n + 1$ comme souhaité.

Supposons donc que l'on soit dans le second cas. Alors $f(2n) = n+2$ et comme le nombre $2n-1$ est manifestement impair, on a aussi $f(2n-1) = 2n$. Ainsi, par croissance, $n+2 \geqslant 2n$, *i.e* $n \leqslant 2$. Si $n = 1$, on constate que $n+2 = 2n+1$ et donc on a également ce que l'on voulait. Pour $n = 2$, cela donnerait $f(4) = 4$, et donc la décomposition $n = rs$ pour $n = 4$ serait $4 = 2 \times 2$. On en déduirait $f(8) = 6$, ce qui contredit une fois de plus la croissance de f car $f(7) = 8$.

En résumé, la seule solution possible de l'équation fonctionnelle est $f(n) = n+1$ et on n'oublie pas de vérifier pour finir que cette fonction convient bien.

Solution de l'exercice 79. a) On divise l'échiquier 8×8 en 16 carrés 2×2. D'après le principe des tiroirs, si l'on place au moins 17 rois sur l'échiquier, au moins deux se retrouveraient dans le même carré 2×2 et donc s'attaqueraient. Par conséquent, il est impossible de placer plus de 16 rois sur l'échiquier sans que deux s'attaquent. Réciproquement, on touve facilement une disposition à 16 rois. Le maximum cherché est donc 16.

b) Le maximum cherché est 32. Tout d'abord, on note qu'un cavalier situé sur une case blanche n'attaque que des cases noires. Ainsi, en plaçant 32 cavaliers, un sur chaque case blanche, on a une disposition à 32 cavaliers sans que deux s'attaquent. Réciproquement, on divise l'échiquier en 8 rectangles 2×4, puis on divise chacun de ces rectangles en 4 paires de 2 cases comme indiqué

1	2	3	4
3	4	1	2

D'après le principe des tiroirs, si l'on plaçait au moins 33 cavaliers sur l'échiquier, au moins 5 seraient dans un même rectangle 2×4 considéré ci-dessus. Et donc, tiroirs toujours, au moins deux seraient sur des cases de même numéro dans ce rectangle, et donc s'attaqueraient. Ainsi, il est impossible de placer plus de 32 cavaliers en respectant les contraintes.

Solution de l'exercice 80. La relation de récurrence s'écrit aussi $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$, et donc pour tout $n \geqslant 0$, $a_{n+1} - a_n = a_1 - a_0 = 6$. On en déduit que la suite (a_n) est arithmétique, et que $a_n = 19 + 6n$ pour tout $n \geqslant 0$. Les nombres 6 et 19 sont premiers entre eux et par conséquent, le plus petit $i > 0$ tel que a_i soit un multiple de 19 est $i = 19$.

Solution de l'exercice 81. Posons $x_{n+1} = x_1$ de sorte que le système s'écrive sous la forme $x_i^2 + x_{i+1}^2 + 50 = 16x_i + x_{i+1}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Cette dernière équation est équivalente à l'égalité $(x_i - 8)^2 + (x_{i+1} - 6)^2 = 50$ bien plus maniable pour cet exercice, puisqu'en examinant comment 50 peut s'écrire comme somme de deux carrés, elle implique que tous les couples (x_i, x_{i+1}) doivent être l'un des suivants :

$$\begin{array}{ccccccccccc} (7,-1) & ; & (7,13) & ; & (9,-1) & ; & (9,13) & ; & (3,1) & ; & (3,11) \\ (13,1) & ; & (13,11) & ; & (1,5) & ; & (1,7) & ; & (15,5) & ; & (15,7). \end{array}$$

Par ailleurs, un des précédents couples (x, y) ne peut effectivement apparaître que si x (resp. y) est la deuxième (resp. la première) d'un autre couple. Ceci élimine les couples $(7,-1)$, $(9,-1)$, $(9,13)$, $(3,1)$, $(3,11)$, $(13,11)$, $(1,5)$, $(15,5)$ et $(15,7)$ ne laissant donc comme candidats que $(7,13)$, $(13,1)$ et $(1,7)$. Ainsi si solution il y a les x_i doivent former une suite périodique $\ldots, 7, 13, 1, 7, 13, 1, \ldots$ et ceci n'est évidemment possible que si n est multiple de 3.

Réciproquement, si n est multiple de 3, cette suite périodique est bien solution.

Solution de l'exercice 82. Tout d'abord, on a

$$\sum_{k=2}^{n} a_k = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} \right) = \sum_{p \leqslant n} \frac{1}{p} \left[\frac{n}{p} \right]$$

où la dernière somme est prise sur les p premiers et où $[\cdot]$ désigne la partie entière. De plus,

$$\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}\left[\frac{n}{p}\right]\leqslant\sum_{p\leqslant n}\frac{n}{p^2}<n\left(\frac{1}{4}+\sum_{k=1}^{[n/2]}\frac{1}{(2k+1)^2}\right)<\frac{n}{4}\left(\sum_{k=1}^{[n/2]}\frac{1}{k(k+1)}\right)=\frac{n}{4}\left(\sum_{k=1}^{[n/2]}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)<\frac{n}{2},$$

par conséquent $\sum_{k=2}^{n}a_k<\frac{n}{2}$ pour tout $n\geqslant 2$. Maintenant, d'après l'inégalité arithmético-géométrique,

$$a_2a_3\cdots a_n<\left(\frac{a_2+a_3+\cdots+a_n}{n-1}\right)^{n-1}<\frac{1}{2^{n-1}}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

puis en développant à l'aide de la formule du binôme, on trouve

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\leqslant 1+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}\leqslant 3$$

d'où $a_2a_3\cdots a_n<\frac{3}{2^{n-1}}$. En ajoutant ces inégalités, on a

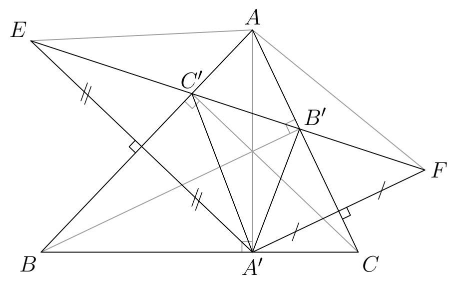
$$\sum_{n=2}^{\infty}a_2\cdots a_n<\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{60}+3\left(\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\cdots\right)=\frac{46}{60}+\frac{3}{2^5}\left(1+\frac{1}{2}+\ \cdots\right)=\frac{46}{60}+\frac{6}{32}<1.$$

Solution de l'exercice 83. Comme n se termine par 1, 3, 7 ou 9, il n'est pas divisible ni par 2, ni par 5. Comme les nombres premiers inférieurs à 11 sont simplement 2, 3, 5 et 7, il suffit pour conclure de montrer que n n'est pas de la forme 3^a7^b. Pour cela, on étudie cette quantité modulo 20. Les puissances de 3 modulo 20 valent cycliquement 1, 3, 9 et 7, tandis que les puissances de 7 valent 1, 7, 9 et 3. Il s'ensuit que 3^a7^b est toujours congru modulo 20 à 1, 3, 7 ou 9. En particulier, son chiffre des dizaines est pair, et donc ne peut s'égaler à n qui a par hypothèse un chiffre des dizaines impair.

Solution de l'exercice 84. Choisissons pour l'instant A' quelconque sur le côté $[BC]$ et notons E et F les symétriques respectifs de A' par rapport aux droites (AB) et (AC). Alors, pour tous B' et C' situés respectivement sur $[AC]$ et $[AB]$, on a :

$$A'C'+C'B'+B'A'=EC'+C'B'+B'F\geqslant EF.$$

Ainsi les meilleurs choix possibles pour B' et C' (A' étant toujours fixé) sont les points d'intersection de la droite (EF) avec les côtés du triangle, et le périmètre du triangle $A'B'C'$ est alors égal à la longueur du segment $[EF]$. Il s'agit donc de déterminer la position du point A' pour laquelle le segment $[EF]$ a une longueur minimale. Or, on remarque que le triangle AEF est isocèle de sommet A car $AE=AA'=AF$, et que l'angle en A dans ce triangle est constant (*i.e.* ne dépend pas de A') égal à $2\widehat{BAC}$. Ainsi, la longueur EF est-elle proportionnelle à AA', et est donc minimale lorsque A' est le pied de la hauteur issue de A. On raisonne de même avec les autres sommets et on obtient que B' et C' doivent être les pieds des hauteurs issues respectivement de B et C. (On peut remarquer que dans ce cas, ce sont bien les intersections de la droite (EF) avec (AC) et (AB).)



Solution de l'exercice 85. Considérons la suite (b_n) telle que $0 \leqslant b_n \leqslant 3$ et $b_n \equiv a_n \pmod 4$. Comme 4 divise 100, (b_n) vérifie la relation de récurrence $b_{n+2} \equiv b_n + b_{n+1} \pmod 4$. On remarque que la suite (b_n) est périodique, la séquence $3, 2, 1, 3, 0, 3$ se répétant 334 fois jusqu'à 2004. De plus, si $a \equiv b \pmod 4$, alors $a^2 \equiv b^2 \pmod 8$. En effet, en écrivant $a = b + 4k$, on a $a^2 = (b+4k)^2 = b^2 + 8kb + 16k^2$. On en déduit que $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2007}^2 \equiv 334(1+4+1+1+0+1) + 1 + 4 + 1 \equiv 6 \pmod 8$. La réponse à la question est donc 6.

Solution de l'exercice 86. Écrivons P sous la forme $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$. Si $a_0 = 0$, le résultat est immédiat. Supposons donc que $a_0 \neq 0$. Quitte à remplacer $P(x)$ par $\frac{P(a_0 x)}{a_0}$, on peut supposer que $a_0 = 1$, ce que nous allons faire.

Nous allons raisonner par l'absurde et donc supposer qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers p pour lesquels on peut trouver un entier x tel que $P(x)$ soit un multiple de p. Notons N le produit de tous ces nombres premiers. Considérons un entier x tel que $|P(Nx)| > 1$ et considérons un diviseur premier p de $P(Nx)$. Par définition p divise N mais alors $P(Nx) \equiv a_0 = 1 \pmod p$, ce qui est absurde.

Solution de l'exercice 87. Considérons C le point diamétralement opposé à A. Il est nécessairement distinct du point B car sinon le trajet serait au moins égal au diamètre de la pomme, soit 10cm. Le plan médiateur de $[BC]$, passant par définition par O le centre de la pomme, coupe cette dernière en deux parties égales. Nous affirmons que celle contenant C est saine. En effet, dans le cas contraire, par continuité du trajet, le ver serait passé par un point M situé sur le plan médiateur de $[BC]$, et en symétrisant le trajet du ver à partir de ce point, on obtient un trajet de même longueur reliant A à C. Ceci n'est pas possible car A et C sont séparés de 10cm et le trajet du ver est par hypothèse strictement plus court.

Solution de l'exercice 88. Les polynômes constants sont évidemment solutions.

Remarquons que $P(x,y) = P(x+y, y-x) = P(2y, -2x)$ pour tous x et y. En répétant ce procédé, on obtient $P(x,y) = P(16x, 16y)$. En écrivant $P(x,y) = \sum_{i,j \geqslant 0} a_{ij} x^i y^j$, l'égalité précédente implique, par unicité de l'écriture, que $16^{i+j} a_{ij} = a_{ij}$, et il s'ensuit que $a_{ij} = 0$ pour $i + j > 0$. Donc P doit être constant.

Solution de l'exercice 89. On a

$$1998 < \lambda = \frac{1998 + \sqrt{1998^2 + 4}}{2} = 999 + \sqrt{999^2 + 1} < 1999$$

d'où $x_1 = 1998$. Puisque $\lambda^2 - 1998\lambda - 1 = 0$, on a $\lambda = 1998 + \frac{1}{\lambda}$ et $x\lambda = 1998x + \frac{x}{\lambda}$ pour tout réel x. De plus, λ est irrationnel et x_{n-1} est entier, donc λx_{n-1} n'est pas entier ; ainsi, comme $x_n = [\lambda x_{n-1}]$, on a $x_n < \lambda x_{n-1} < x_n + 1$, ou encore

$$\frac{x_n}{\lambda} < x_{n-1} < \frac{x_n + 1}{\lambda}$$

que l'on réécrit

$$x_{n-1} - 1 < x_{n-1} - \frac{1}{\lambda} < \frac{x_n}{\lambda} < x_{n-1}$$

et on en déduit que $[x_n/\lambda] = x_{n-1} - 1$. Comme $1998x_n$ est entier, on a

$$x_{n+1} = [x_n \lambda] = \left[1998x_n + \frac{x_n}{\lambda}\right] = 1998x_n + x_{n-1} - 1,$$

et en particulier $x_{n+1} \equiv x_{n-1} - 1 \pmod{1998}$. Par récurrence, $x_{1998} \equiv x_0 - 999 \equiv 1000 \pmod{1998}$.

Solution de l'exercice 90. On peut réécrire cette égalité de la manière suivante :

$$\sin\frac{7\pi}{30}+\sin\frac{19\pi}{30}+\sin\frac{31\pi}{30}+\sin\frac{43\pi}{30}+\sin\frac{55\pi}{30}=0.$$

La différence entre deux angles successifs dans cette égalité fait $12\pi/30 = 2\pi/5$. Les extrémités des vecteurs de norme 1 pointant dans les directions indiquées par ces 5 angles forment les sommets d'un pentagone régulier. La somme de ces vecteurs est donc un vecteur invariant par rotation d'angle $2\pi/5$, autrement dit, la somme est nulle. La somme des sinus est la projection de la somme des vecteurs sur l'axe des ordonnées, elle est donc nulle aussi.

Solution de l'exercice 91. Soit R le rayon de la sphère. Par le théorème de Pythagore, le rayon du cylindre est $\sqrt{R^2-9}$. Le volume restant est égal au volume de la sphère, c'est-à-dire $\frac{4}{3}\pi R^3$, auquel on a enlevé le volume du cylindre, c'est-à-dire $\pi(R^2-9)\times 6$, et le volume des deux calottes sphériques, c'est-à-dire $2\times\pi(R-3)^2(R-\frac{R-3}{3})=\frac{2}{3}\pi(R-3)^2(2R+3)$. Le calcul donne

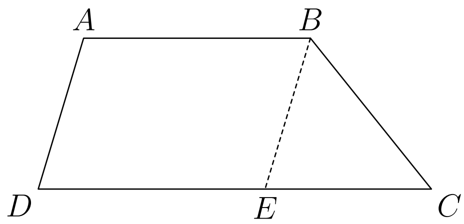
$$V=\frac{4}{3}\pi R^3-\pi(R^2-9)\times 6-\frac{2}{3}\pi(R-3)^2(2R+3)=36\pi\,\mathrm{cm}^3$$

et on constate en particulier que le résultat ne dépend pas de R !

Solution de l'exercice 92. Remarquons tout d'abord que si $a\star b=a\star d$, alors $a+b+c=(a\star b)\star c=(a\star d)\star c=a+d+c$, d'où $b=d$. De même, si $a\star b=d\star b$, alors $a=d$. Montrons maintenant que $a\star b=b\star a$. Pour cela, posons $d_1=a\star b$ et $d_2=b\star a$. Alors $d_1\star c=a+b+c=b+a+c=d_2\star c$, et ainsi $d_1=d_2$. Posons à présent $x=a\star 0$. On a $x\star 0=a+0+0=a$. Donc $2x=(x\star 0)\star x=a\star x=x\star a=(a\star 0)\star a=2a$, ce qui implique $x=a$, c'est-à-dire $a\star 0=a$. Pour tous a et b, $a+b=(a\star b)\star 0=a\star b$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 93. Soient pour l'instant M un point quelconque du plan et R le rayon du cercle circonscrit au triangle AMB. La formule $AB=2R\sin\widehat{AMB}$ montre que l'angle $\widehat{AMB}$ est maximal lorsque R est minimal (puisque AB reste constant). Ainsi, il s'agit de trouver le cercle de plus petit rayon passant par A et B et coupant la droite (d) et il est évidemment obtenu lorsqu'il est tangent à cette droite. Le point M cherché est le point de tangence.

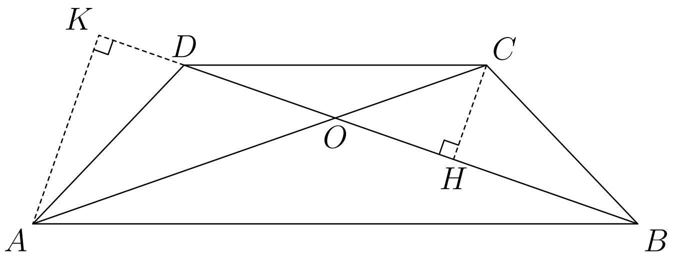
Solution de l'exercice 94. Dans le trapèze $ABCD$, traçons la droite passant par B et parallèle à (AD). Soit E son point d'intersection avec la droite (CD). Par l'inégalité triangulaire dans le triangle BCE, on a $CE\geqslant|BE-BC|$, soit $|AB-CD|\geqslant|AD-BC|$. L'égalité est atteinte si et seulement si le triangle BCE est dégénéré, c'est-à-dire si $ABCD$ est un parallélogramme.



Or, en utilisant le trapèze $A'B'C'D'$, on montre de la même manière que $|AB-CD|\leqslant|AD-BC|$, et que l'égalité est atteinte si et seulement si $A'B'C'D'$ est un parallélogramme.

Donc, en fait, on a $|AB-CD|=|AD-BC|$ et les deux trapèzes sont des parallélogrammes.

Solution de l'exercice 95. Soient H le pied de la hauteur issue de C dans le triangle BOC, et K le pied de la hauteur issue de A dans le triangle AOD.



L'aire des triangles BOC et ADO est égale à $10 = CH \times OB = AK \times DO$. L'aire du triangle DOC vaut $CH \times OD = CH \times OB/2 = 5$. L'aire du triangle AOB est $AK \times OB = AK \times 2 \times OD = 20$. Finalement, l'aire du trapèze $ABCD$ vaut $2 \times 10 + 5 + 20 = 45$.

Solution de l'exercice 96. Remarquons que

$$(2x-3)(2x-17) = 4x^2 - 40x + 51 \leqslant 4x^2 - 40[x] + 51 = 0$$

ce qui donne $1,5 \leqslant x \leqslant 8,5$ et $1 \leqslant [x] \leqslant 8$. D'après l'équation,

$$x = \frac{\sqrt{40[x]-51}}{2}$$

et donc il est nécessaire que

$$[x] = \left[\frac{\sqrt{40[x]-51}}{2}\right].$$

En testant $[x] = 1, 2, \ldots, 8$ dans cette équation, on trouve que $[x]$ ne peut être égal qu'à 2, 6, 7 ou 8. On en déduit que les seules solutions possibles pour x sont $\sqrt{29}/2$, $\sqrt{189}/2$, $\sqrt{229}/2$ et $\sqrt{269}/2$. Une vérification rapide confirme que ces valeurs marchent.

Solution de l'exercice 97. Une méthode[3] consiste à introduire une suite auxiliaire (b_n) définie par récurrence comme suit :

$$b_0 = x \quad ; \quad b_{n+1} = 2a_n b_n \quad \text{pour tout } n \geqslant 0.$$

Une récurrence immédiate implique les relations $a_n^2 - b_n^2 \equiv 1 \pmod p$ et $a_n + b_n \equiv (2+x)^{2^n} \pmod p$ pour tout n. Appliquées à $n = N$, celles-ci fournissent $b_N^2 \equiv -1 \pmod p$ et $(2+x)^{2^N} \equiv b_N \pmod p$. Il s'ensuit $(2+x)^{2^{N+1}} \equiv -1 \pmod p$, ce qui assure que l'ordre de $2+x$ modulo p est *exactement* 2^{N+2} (car p est impair, a_N l'étant aussi). La divisibilité souhaitée en résulte.

Remarque. La méthode précédente se généralise lorsque l'hypothèse $x^2 \equiv 3 \pmod p$ est supprimée. Il faut alors travailler dans le corps fini à p^2 éléments et la conclusion devient 2^{N+3} divise $p^2 - 1$ (ce qui est légèrement plus faible).

Solution de l'exercice 98. Le côté de longueur 10 est strictement plus grand que la somme des longueurs de deux autres côtés. L'inégalité triangulaire assure qu'un tel quadrilatère ne peut exister.

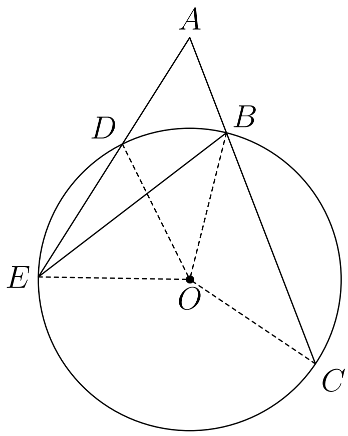
Solution de l'exercice 99. La propriété de l'énoncé se traduit par l'inégalité :

$$0 \leqslant \frac{A(A+1)}{2} - 1000A = A\left(\frac{A+1}{2} - 1000\right) \leqslant 999.$$

[3] Malgré les apparences, cette méthode n'est pas introuvable. Le point de départ est la remarque selon laquelle la relation de récurrence ressemble à la formule du cosinus de l'angle double (ou du cosinus hyperbolique pour ceux qui connaissent). La suite introduite b_n correspond alors (modulo p) à la suite des $i\times$sinus correspondants (ou à la suite des sinus hyperboliques). La relation $a_n^2 - b_n^2 \equiv 1 \pmod p$ est alors attendue, ainsi que l'expression particulièrement simple de $a_n + b_n$ liée au fait que celle-ci s'exprime comme une exponentielle complexe (ou une exponentielle).

Si $A < 1999$, alors le facteur $\frac{A+1}{2} - 1000$ est négatif est l'encadrement n'est pas vérifié. Si $A \geqslant 2000$, alors le précédent facteur est supérieur à $\frac{1}{2}$ et le produit $A(\frac{A+1}{2} - 1000)$ dépasse 1000. La seule solution est donc $A = 1999$, dont on peut vérifier si on le souhaite qu'elle convient bien.

Solution de l'exercice 100. La figure est la suivante :



D'après le théorème de l'angle inscrit, d'une part, $\widehat{COE}/2 = \widehat{CBE}$ et d'autre part, $\widehat{BOD}/2 = \widehat{BED} = \widehat{BEA}$. On a donc

$$\frac{\widehat{COE} - \widehat{BOD}}{2} = \widehat{CBE} - \widehat{BEA} = \pi - \widehat{ABE} - \widehat{BEA} = \widehat{CAE}$$

qui est bien ce que l'on voulait.

Solution de l'exercice 101. Il est facile de voir que $P(x, y) = x^2 + (xy + 1)^2$ convient.

Solution de l'exercice 102. Le nombre $10^{2008} - 2008$ est constitué de 2008 chiffres. On a

$$10^{2008} - 2008 = (10^{2008} - 1) - 2007 = 99 \cdots 9 - 2007 = 99 \cdots 97992$$

et la somme de ses chiffres est $2004 \times 9 + 7 + 9 + 9 + 2 = 18063$.

VI. Divers

1 Transparents de l'exposé d'Antoine

Cette conférence s'arrêtera-t-elle?

Antoine Taveneaux

Stage olympique 2008

Plan de la présentation

Qu'est-ce qu'un programme informatique ?
- Qu'est-ce que fait un ordinateur ?
- Un programme est un nombre
- Un programme peut ne pas s'arrêter

Qu'est-ce qu'un ordinateur ne peut pas faire ?
- Prévoir l'arrêt d'un programme
  - Idée de preuve
- Une fonction qui grandit très très vite

Un nombre définissable mais pas calculable

La calculabilité ne sert pas à rien

Résumé

Les programmes informatiques sont des recettes de cuisine

Des fonctions élémentaires à composer :
- **Si** ... **alors** ... **sinon** ...
  Si vous avez des œufs **alors** mettez les **sinon** mettez du jambon.
- **Pour** i **allant de** 1 à n **faire** ...
  Pour i **allant** de 1 à 10 **faire** casser le $i^{\text{ème}}$ œuf de la boîte et le mettre dans un bol.
- **Tant que**... **faire** ...
  Tant que le gâteau n'est pas fini **faire** manger.

C'est légèrement plus compliqué

- L'ordinateur doit aussi gérer la mémoire.
- Comme le cuisinier doit gérer ses casseroles.

Un exemple

Calculons a_{100} quand (a_n) est la suite de Fibonacci.
- je me prépare 3 cases pour y mettre des nombres
- Dans les 2 premières cases je mets le nombre 1.
- Pour i allant de 2 à 100 faire
  - Dans la troisième case je copie le nombre qui était dans la premier case.
  - Dans la première case je mets la somme des nombres qui étaient dans la première et la deuxième case.
  - Dans la deuxième case je mets le nombre de la troisième case.

  J'écris le nombre qui est dans la première case.

A vous de jouer

Calculer le PGCD de deux nombres.

Comment calculer le grand nombre i tel que $a_i < 1000$.

En quelle base ?

- Un programme est un texte c'est donc un nombre en base 256.
- Un ordinateur voit tout en binaire donc pour lui un programme est un nombre en binaire.

A l'inverse on peut voir un nombre comme un programme

- Si le texte n'est pas un programme bien formulé alors l'ordinateur ne fait rien.
- Si la texte a un sens alors l'ordinateur fait ce que le programme demande de faire.

Il est possible d'écrire des programmes qui ne s'arrête pas

- Éteindre le four puis **tant que** le gâteau n'est pas cuit **faire** attendre.
- **Tant que** 1=1 **faire** dire "Jusqu'ici, tout va bien".

Un programme peut-il prévoir l'arrêt d'un autre programme ?

- **Question :** Peut-on écrire un programme qui avec le texte (le numéro) de n'importe quel programme peut dire s'il va s'arrêter ou pas ?
- **Théorème :** Il n'existe pas de programme qui peut dire si un programme va s'arrêter.

Je n'obéirai pas !

S'il existait un programme `arrêt` tel que `arrêt(n)` réponde "`s'arrête`" si le programme `n` s'arrête et "`ne s'arrête pas`" sinon, on pourrait alors écrire le programme `vicieux` suivant :

```
vicieux= Si arrêt(vicieux)= s'arrête alors
(tant que 1=1 faire dire "bonjour") sinon
s'arrêter
```

Que fait ce programme ?

Le programme `vicieux` ne s'arrête pas si et seulement si `arrêt(vicieux)=s'arrête`.

Le programme `arrêt` s'est donc trompé.

Il n'existe pas de programme qui peut dire si un programme va s'arrêter.

Il n'existe donc pas de programme qui répondra "`oui`" si le théorème qu'on lui donne est juste et "`non`" si il est faux.

Il n'y a pas de machine à démontrer des théorèmes.

Quelques suites qui grandissent vite.

Vous connaissez sans doute les suites :

- $r_n = n^{50}$
- $s_n = 2^n$
- $t_n = n! = 1 \times 2 \times ... \times n$
- $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n!$
- $v_0 = 3$ et $v_{n+1} = v_n!...!$ (avec !...! une répétition de v_n fois !).

Mais tout cela n'était rien !

La fonction d'Ackermann

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{si } m=0 \\ A(m-1,1) & \text{si } n=0 \\ A(m-1, A(m,n-1)) & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer $A(0,n)$, $A(1,n)$, $A(2,n)$, $A(3,n)$, $A(4,n)$...

Les réponses

- $A(0, n) = n + 1$
- $A(1, n) = n + 2$
- $A(2, n) = 2 \times n + 3$
- $A(3, n) = 2^{n+3} - 3$
- $A(4, n) = 2 \uparrow 2 \uparrow 2 \uparrow ...2 \uparrow 2 \uparrow 16 - 3$ avec $2 \uparrow 2 \uparrow 2 = 2^{2^2}$

Une fonction qui grandit encore beaucoup plus vite !

Il n'y a qu'un nombre fini de programmes qui on une taille inférieure à n.

Il existe donc un plus grand nombre produit par les programmes de longueur inférieure à n.

Notons C_n ce nombre.

On a donc nécessairement :

$$C_{100} > A(1000, 1000)$$

Un ordinateur peut-il calculer C_n ?

Question : Cette fonction est-elle calculable par un ordinateur ?

Par l'absurde !
Si on avait un programme `castor` tel que `castor(n)=` C_n.
Alors ce programme aurait une longueur k.
Si on fait calculer C_{2k} à `castor`, alors une fonction de longueur k afficherait C_{2k}. Ceci contredit la définition de C_n.

Donc la fonction C_n n'est pas calculable.

Qu'est-ce qu'un nombre calculable

Pour les nombres que vous connaissez (comme π ou e) il existe des programmes qui peuvent donner leurs décimales.

Connaissez vous un nombre qu'aucun programme ne pourrait aprrocher autant que l'on veut ?

Un nombre non calculable

On définie la suite (ϕ_n) par :

$$\phi_n = \begin{cases} 1 & \text{si le programme n s'arrête} \\ 2 & \text{si le programme n ne s'arrête pas} \end{cases}$$

Et on pose :

$$a = 0, \phi_1 \phi_2 \phi_3 \ldots$$

Si on savait approcher le nombre autant que l'on veut, on pourrait trouver ϕ_i pour tout i et donc on pourrait savoir si le programme i s'arrête.

Donc on ne peut pas approcher ce nombre autant que l'on veut.

La longueur des démonstrations

Question : Quelle est la longueur maximum d'une démonstration d'un théorème de longueur n ?

Un ordinateur sait vérifier une preuve (si on lui donne).

La longueur des démonstrations

On note T un théorème et $|T|$ sa longueur (le nombre de lettres et d'espaces dont on a besoin pour écrire le théorème).

Par l'absurde.
Si tous les théorèmes T étaient démontrables avec une démonstration de taille $2^{|T|}$ alors pour savoir si un théorème est démontrable ou pas il suffirait d'écrire tous les textes de longueurs $2^{|T|}$ et de vérifier si ceux-ci sont des démonstrations ou non de T.

On trouverait donc une démonstration si et seulement si le théorème est prouvable. Mais un tel programme n'existe pas.

Il existe donc des théorèmes dont la plus courte démonstration est de longueur supérieure à $2^{|}T|$ (et même $A(|T|, |T|)$).

Pensez-vous que tout cela va enfin finir un jour ?

- L'informatique est une science.
- On peut faire des choses amusantes.
- Mais aussi des choses sérieuses.

Pour aller plus loin :

Gilles Dowek
Les Métamorphoses du calcul : Une étonnante histoire des mathématiques.
Editions Le Pommier.

2 Sujets des OIM 2008

Exercice 1. Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus, et soit H son orthocentre. Le cercle passant par H et dont le centre est le milieu de $[BC]$ coupe la droite (BC) en A_1 et A_2. De même, le cercle passant par H et dont le centre est le milieu de $[CA]$ coupe la droite (CA) en B_1 et B_2, et le cercle passant par H et dont le centre est le milieu de $[AB]$ coupe la droite (AB) en C_1 et C_2. Montrer que A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 sont cocycliques.

Exercice 2. (a) Montrer que

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geqslant 1$$

pour tous nombres réels x, y, z différents de 1 et vérifiant $xyz = 1$.
(b) Montrer qu'il existe une infinité de triplets de nombres rationnels x, y, z, différents de 1 et vérifiant $xyz = 1$, pour lesquels l'inégalité ci-dessus est une égalité.

Exercice 3. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers strictement positifs n tels que $n^2 + 1$ possède un diviseur premier strictement supérieur à $2n + \sqrt{2n}$.

Exercice 4. Trouver toutes les fonctions f de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ telles que

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

pour tous nombres réels strictement positifs w, x, y, z vérifiant $wx = yz$.

Exercice 5. Soient n et k des entiers strictement positifs tels que $k \geqslant n$ et $k - n$ est pair. On suppose données $2n$ lampes numérotées de 1 à $2n$; chacune peut être *allumée* ou *éteinte*. Au début, toutes les lampes sont éteintes. Une *opération* consiste à allumer une lampe éteinte ou bien à éteindre une lampe allumée. On considère des séquences constituées d'opérations successives. Soit N le nombre de séquences constituées de k opérations et aboutissant à l'état où les lampes de 1 à n sont allumées et les lampes de $n + 1$ à $2n$ sont éteintes. Soit M le nombre de séquences constituées de k opérations et aboutissant à l'état où les lampes de 1 à n sont allumées et les lampes de $n + 1$ à $2n$ sont éteintes, mais où les lampes de $n + 1$ à $2n$ n'ont jamais été allumées. Déterminer le rapport N/M.

Exercice 6. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que $BA \neq BC$. Les cercles inscrits dans les triangles ABC et ADC sont notés respectivement ω_1 et ω_2. On suppose qu'il existe un cercle ω qui est tangent à la demi-droite $[BA)$ au-delà de 1, tangent à la demi-droite $[BC)$ au-delà de C, et qui est aussi tangent aux droites (AD) et (CD). Montrer que les tangentes communes extérieures à ω_1 et à ω_2 se coupent en un point de ω.

3 Sujets des OIM 2007

Exercice 1. Soient n nombres réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pour chaque i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ on définit

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leqslant j \leqslant i\} - \min\{a_j : i \leqslant j \leqslant n\}$$

et on pose

$$d = \max\{d_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

(a) Montrer que pour tous nombres réels $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$,

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leqslant i \leqslant n\} \geqslant \frac{d}{2}. \tag{VI.1}$$

(b) Montrer qu'il existe des nombres réels $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ tels que (VI.1) soit une égalité.

Exercice 2. On donne cinq points A,B,C,D et E tels que $ABCD$ soit un parallélogramme et $BCED$ un quadrilatère convexe, inscriptible. Soit ℓ une droite passant par A. On suppose que ℓ coupe l'intérieur du segment $[DC]$ en F et coupe la droite (BC) en G. On suppose aussi que $EF = EG = EC$. Montrer que ℓ est la bissectrice de l'angle $\widehat{DAB}$.

Exercice 3. Dans une compétition mathématique certains participants sont des amis. L'amitié est toujours réciproque. Un groupe de participants est appelé une *clique* si toute paire d'entre eux est formée de deux amis. (En particulier, chaque groupe d'au plus un participant constitue une clique.) Le nombre de participants dans une clique est appelé sa *taille*.

On suppose que, dans cette compétition, la plus grande taille des cliques est paire. Montrer que les participants peuvent être répartis dans deux pièces de telle sorte que la plus grande taille des cliques contenues dans une de ces pièces soit égale à la plus grande taille des cliques contenues dans l'autre.

Exercice 4. Dans un triangle ABC la bissectrice de l'angle $\widehat{BCA}$ recoupe le cercle circonscrit en R, coupe la médiatrice de $[BC]$ en P et la médiatrice de $[AC]$ en Q. Le milieu de $[BC]$ est K et le milieu de $[AC]$ est L. Montrer que les triangles RPK et RQL ont la même aire.

Exercice 5. Soit a et b deux entiers strictement positifs. Montrer que si $4ab-1$ divise $(4a^2-1)^2$, alors $a = b$.

Exercice 6. Soit n un entier strictement positif. Dans l'espace on considère l'ensemble

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \ldots, n\}, x + y + z > 0\},$$

constitué de $(n+1)^3 - 1$ points. Trouver le plus petit nombre de plans dont la réunion contient S mais de contient pas $(0, 0, 0)$.

4 Le coin des élèves

Les citations du stage

L'infini, c'est grand ! [Sandrine]

Si ça existe pas, pourquoi on en parle ? [Ambroise]

Si vous lisez Baudelaire, ça ne apprendra pas à faire une quiche. [Antoine]

Le programme s'arrete si et seulement si il ne s'arrête pas. [Antoine]

Supposons que Xavier déménage... Euh non que Sandrine déménage ! [Xavier]

Donc d'aprés la relation $\mathfrak{R}$ Xavier est supérieur à Sandrine, ce qui est évident. [Xavier]

Un carré est nul si est seulement si il est nul. [Igor]

La grande salle ben... C'est la grande salle ! [Xavier]

J'ai fait une photo de Pietro qualité. [Benjamin]

Les intermédiaires qui sont pas là, lever la main. [Xavier]

Le problème des frites se résout avec une patate. [Noé]

Je le mets jamais contre mon camp sauf quand je le mets. [Noé]

Au échecs la stratégie gagnante c'est de jouer contre moi. [Ambroise]

C'est 0 si et seulement si on développe ! [Ambroise]

Jean [*ndrl :* Garcin] m'a dit que son frère s'appelle Lazare. [Benjamin]

À Animath, on a déjà mis des bons 0 ! [François]

Trivial ! [Ambroise et Jean-François]

Début 13h37 [Victor]

Je pense qu'il vaut mieux retenir que "courbes elliptique", c'est un seul mot avec un espace au milieu. [Xavier]

La météo, il la connait aussi bien que moi... enfin aussi mal. [Pierre D.]

Nous avons donné des nougats aux coordinateurs après chaque coordination même s'ils ne nous avaient pas trop gâté. [Johan]

- On a jamais eu d'élèves qui ont participé 3 fois aux olympiades.
- D'ailleurs on en a toujours pas. [Johan et Xavier]

Tu regardes les filles qui restent y en a qui servent à rien... [Ambroise]

Une démonstration sponsorisée par les marchands de craies. [Johan]

Je les écris pas, mais si je les écrivais ce serait intéressant. [Johan]

Le femelle de la tortue. [Victor A.]

Les menus sont modulo 7 [*ndlr* en effet on a mangé la même chose à une semaine d'intervalle]. [Gaspard]

Si tu abîmes le nature, les insectes vont te piquer ensuite ! [Johan]

Chuck Norris sait faire taire Victor. [Nikolas]

25 c'est proche de l'infini. [Sébastien]

Exercice $5 + \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. [Sébastien]

Au tableau « L'ordre n'est pas Total », Xavier répond « total c'est pas la station service, tu peux enlever la majuscule ». [Xavier]

Chuck Norris et les maths

Chuck Norris a compté jusqu'à l'infini, deux fois.

Chuck Norris sait diviser par 0.

Chuck Norris a démontré tous les axiomes.