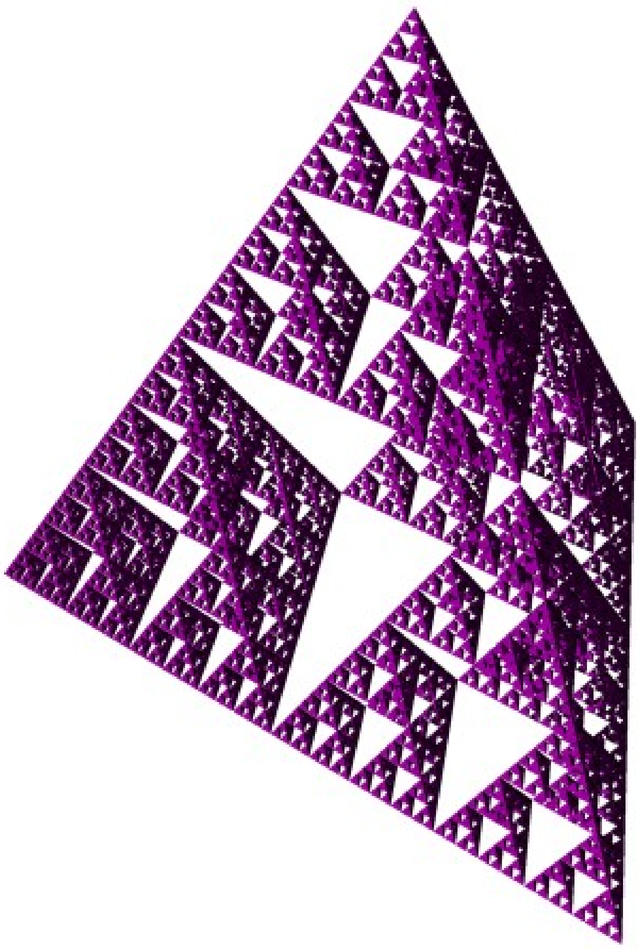
Stage olympique de Grésillon III



Du 21 au 28 août 2009

Stage olympique de Grésillon, août 2009

Avant-propos

Le stage de Grésillon a été organisé par Animath.

Son objet a été de rassembler les lauréats de diverses compétitions mathématiques et de les faire travailler sur des exercices en vue de la formation de l'équipe qui représentera la France à l'Olympiade internationale de mathématiques au Kazakhstan en juillet 2010.

Nous tenons à remercier le château de Grésillon pour son excellent accueil.

Photo de la première page : « Tétraèdre de Sierpinski ».

Table des matières

A Le trombinoscope **7**

B Déroulement du stage **11**

C Les exposés **15**

D Déterminons les niveaux : Olympique, Intermédiaire, Marmot **21**

E En cours **23**
1 Ordre d'un élément . . . 23
1.1 Fonction indicatrice d'Euler . . . 23
1.2 Ordre d'un élément . . . 24
1.3 Exemples d'utilisation . . . 25
2 Géométrie projective . . . 26
3 Exercices de révision . . . 28
3.1 Rudiments de logique . . . 28
3.2 Stratégies de base . . . 28
3.3 Géométrie . . . 29
4 Les solutions . . . 30
4.1 Rudiments de logique . . . 30
4.2 Stratégies de base . . . 31
4.3 Géométrie . . . 34

F En TD **37**
1 Les énoncés . . . 37
1.1 Stratégies de base . . . 37
1.2 Géométrie . . . 39
1.3 Arithmétique . . . 40
2 Les solutions . . . 41
2.1 Stratégies de base . . . 41
2.2 Arithmétique . . . 44

G Les TND **49**
1 Exercices d'acclimatation non corrigés . . . 49
2 Les énoncés . . . 50
2.1 Stratégies de base . . . 50
2.2 Arithmétique . . . 50
2.3 Chasse au trésor . . . 51
3 Les solutions . . . 53
3.1 Stratégies de base . . . 53
3.2 Arithmétique . . . 53

3.3 Chasse au trésor 55

H Les tests **61**
1 Les énoncés 61
1.1 Le test du 23 août 61
1.2 Le test du 27 août 62
1.3 Le test final 63
2 Les solutions 64

I Les problèmes du jour **75**
1 Remplissage de verres 75
2 Les pions sauteurs 75
3 Record des permutations 76
4 Les solutions 76
4.1 Remplissage de verres 76
4.2 Les pions sauteurs 77
4.3 Record des permutations 78

J Les OIM **79**
1 Sujets des OIM 2009 79
2 Sujets des OIM 2008 80

K Le coin des élèves **81**

A. Le trombinoscope

Les profs


Martin Andler


Sandrine Caruso


Xavier Caruso


Sophie Cavadini


Theresia Eisenkoelbl


Igor Kortchemski


Bodo Lass


François Lo Jacomo


Johan Yebbou


David Zmiaikou

Nos hôtes


Brigitte Bourdet


André Bourdet

Les élèves

Nikola Bjecogrlic

Rémi Bricout

Charley Brion Anezo

Thomas Budzinski

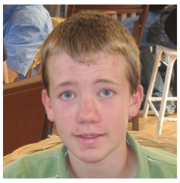
Sébastien Chevaleyre

Guillaume Conchon Kerjan

Léonard Dekens

Aurélien Emmanuel

Matthew Fitch



Cédric Fuchs

Diane Gallois-Wong

Louise Gassot

Victor Godet

Louis Hauseux

Jean Kieffer

Alexis Le Dantec

Luc Lehéricy

Thomas Lehéricy

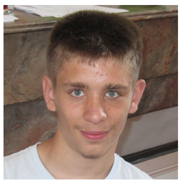
Matthieu Lequesne

Guido Maria Lido

Corentin Lohat

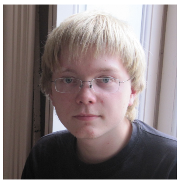
Marie Laura Luisada

Jean-François Martin



Adrien Messager


Léo Miolane


Theodor Misiakiewicz


Victor Mizrahi


Solène Moulin


Vincent Mouly


Jaouad Mourtada

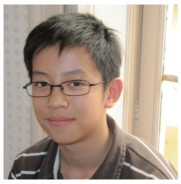

Séginus Mowlavi


Stefano Novello


Grégoire Paille


Michel Pain


Arthur Patora


Victor Quach


Isabelle Rao

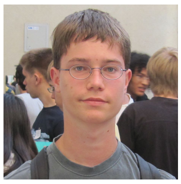

Aurélien Richard


Charles Riou


Vincent Sebag


Oliver Sieweke


Christoph Standke


Alexander Thomas


Sergio Vega


Oscar Walter


Matthieu Zhang

B. Déroulement du stage

La journée du vendredi 21 août a été consacrée à l'accueil des élèves. Après quelques présentations les élèves ont fait connaissance autour du piano, des jeux de carte, des parties d'échec et surtout autour d'exercices qui leurs étaient donnés pour s'acclimater. Voir en G. D'autre part, afin de déterminer trois groupes niveaux : **O**lympique, **I**ntermédiaire et **M**armot, chaque élève a été interrogé sur un exercice tiré au hasard. Les exercices sont donnés en D.

Le programme détaillé de la semaine est donné dans le tableau B.1.

Le stage s'est déroulé en trois parties. La première a commencé par une journée consacrée aux stratégies de base, tandis que le groupe **O** suivait des cours/TD de géométrie principalement, d'un niveau avancé. La deuxième partie fut consacrée à l'arithmétique. Enfin en troisième partie les élèves s'entraînèrent en géométrie. On sanctionnait chaque partie par des tests en fonction des trois niveaux.

On distinguait deux types de séance d'exercices, les TD et les TND.

Les TD étaient des séances d'exercices « classiques », pendant lesquelles les élèves réfléchissaient, avec l'aide du professeur, sur un certain nombre d'exercices. L'enseignant dispensait une correction des exercices au fur et à mesure, et n'hésitait pas à apporter individuellement son aide aux élèves.

Les TND fonctionnaient de la façon suivante. Le professeur donnait aux élèves un exercice sur lesquel ils planchaient seuls pendant au moins une heure. À l'issue de cette réflexion, les idées de chacun étaient confrontées puis l'exercice corrigé.

En plus des cours et de ces séances d'exercices, les élèves ont eu à plancher sur plusieurs tests en temps limité. Pour les **M**armots et les **I**ntermédiaires le premier était sur les stratégies de base et le deuxième sur la géométrie. Quant aux **O**lympiques, leurs tests ont principalement été sur la géométrie et un peu en combinatoire, d'un niveau olympique. Enfin, le dernier test, portant sur

		Olympique	**I**ntermédiaire	**M**armot
Vendredi 21	journée	Arrivée et accueil des élèves		
	18h – 19h	Présentation du stage		
	20h30 – 21h30	Conférence		
Samedi 22	9h – 12h		Cours strat. de base	Cours strat. de base
	14h – 18h		TD strat. de base	TD/Cours strat. de base
	20h30 – 21h30	Volley		
Dimanche 23	9h – 12h		TND strat. de base	TD strat. de base
	14h – 18h	Test		
	18h – 19h30	Correction du test		
	20h30 – 21h30	Problème du jour et projection de film		
Lundi 24	9h – 12h		Cours arith.	Cours arith.
	14h – 18h		TD arith.	Cours/TD arith.
	20h30 – 21h30	Correction du problème de dimanche, nouveau problème, film		
Mardi 25	9h – 12h		TND arith.	TD arith.
	14h – 18h	Chasse au trésor		
	20h30 – 21h30	Conférence, problème du jour, volley		
Mercredi 26	9h – 12h		Cours géom.	Cours géom.
	14h – 18h		TD géom.	Cours/TD géom.
	20h30 – 21h30	Correction du problème de mardi, volley, film		
Jeudi 27	9h – 12h		TND géom.	TD géom.
	14h – 17h	Test		
	17h – 18h30	Correction du test		
	20h20 – 21h30	Conférence et correction du problème de mercredi, volley		
Vendredi 28	8h – 11h	Test final		
	après-midi	Départ des élèves		

TAB. B.1 – Planning du stage

les connaissances acquises tout au long du stage, a eu lieu le dernier jour, dans des conditions les plus proches possibles de celles des olympiades internationales.

À l'issue des tests, des séances de correction d'une heure ont permis de donner une solution aux exercices pour chaque niveau.

Quelques liens utiles :

☞ Le site d'Animath bien sûr ! `www.animath.fr`

☞ Le site de MathLinks, qui présente toutes les compétitions au monde : `www.mathlinks.ro`

☞ Le site du château de Grésillon : `www.gresillon.org`

C. Les exposés

Trois soirées ont été consacrées à des exposés.

Pour le premier exposé, Martin Andler présentait *Ce que sont les mathématiques*. Il y a environ 57000 mathématiciens dans le monde, aujourd'hui.

Mais, qu'est ce qu'un mathématicien ? C'est quelqu'un qui a une activité de recherche en mathématiques. En France, ils sont 3500, dont 90% d'universitaires et le reste dans des organismes de recherche tels que CNRS.

Que fait un mathématicien ? Principalement, il écrit des articles de recherche. La quantité varie en fonction des mathématiciens. Par exemple, Andrew Wiles, mathématicien de premier plan aux USA, a publié 24 articles à 55 ans tandis que Jean Bourgain au même âge et Pierre Louis Lions plus jeune encore, ont publié près de 350 articles ! Il ne faut donc pas se fier au critère quantitatif. Sachez qu'un article est lu par seulement quelques personnes au monde... De même que pour les médailles Fields, il ne faut pas oublier que ´ bon mathématicien ˘ $\nLeftrightarrow$ ´ médaille Fields ˘ !

Les pays importants en mathématiques. Les USA sont en première position, regroupant le plus grand nombre de mathématiciens au monde. L'URSS détenait cette place il y a 20 ans. La France est en deuxième position. Pourquoi ? Du point de vue de sa capacité, la France est très bonne, contrairement à son classement aux OIM. La Grande Bretagne, le Japon et l'Allemagne sont aussi des pays très actifs en mathématiques, malgré une baisse de l'Allemagne depuis 1933. Preuve en est leurs médaillés Fields. L'Inde a produit au XXe un grand nombre de très bons mathématiciens, tels que Ramanudjan. La Chine suite à la révolution culturelle des années 60, a anéanti la classe intellectuelle.
L'activité mathématique a toujours bénéficié d'une grande communication. Elle est évidemment aujourd'hui facilitée par Internet. Thimoty Gowers, médaillé Fields, avait proposé d'attaquer un problème de mathématiques via un site Internet où chacun pourrait donner ses idées. Cette collaboration internationale a ainsi permis des avancées et des démonstrations collectives. Le mérite intellectuel disparaît pour faire place à une oeuvre collective...

Ce qu'on fait en mathématiques. On distingue deux grandes attitudes distinctes : les mathématiques appliquées et les mathématiques pures ou dites fondamentales.

Mathématiques appliquées : C'est sortir de son domaine, forger de nouveaux outils, les confronter avec les spécialistes de la discipline en question. Cet aller-retour entre les deux permet après tests de découvrir les outils les plus performants. Contrairement à l'idée générale, il ne s'agit pas d'appliquer des « choses déja faites », mais d'avoir de nouvelles idées.

Mathématiques pures : Des mathématiciens proposent des problèmes endogènes, i.e au sein des mathématiques. Fermat, par exemple avait énoncé un théorème qui ne fut démontré que 374 ans plus tard par Andrew Wiles. Celui-ci n'a aucun intérêt cependant. En revanche, les travaux de recherche de démonstration, ont permis la création de nombreux outils mathématiques. L'énoncé de l'équation de Navier Stokes, utile en mécanique des fluides, a des applications quotidiennes : étude des turbulences dans un tuyau ou dans un fleuve, par exemple. On ne sait toujours pas si elle a des solutions en mathématiques, mais elle en a physiquement !

Les mathématiques et l'informatique. Aujourd'hui, à l'aide des outils informatiques puissants, on peut arriver à trouver des solutions. Mais il faut remarquer qu'une équation sera toujours difficile à résoudre et des méthodes numériques difficiles à créer, sans bases logiques, sans informations théoriques de départ. Et ce quelque soit la performance des outils informatiques.

Les domaines qui inspirent les mathématiques Les mathématiques appliquées sont fortement en lien avec les sciences physiques : mécanique des fluides, trajectoire des planètes, astronomie, structure et résistance des matériaux, fréquences propres d'un pont (tout le monde connaît l'histoire de ces soldats qui marchant au pas sur un pont, sont entrés en résonance avec ce dernier, causant sa destruction.) Ces problèmes ont motivé l'étude de l'analyse harmonique, pour les vibrations, de la théorie de Fourier.
L'informatique s'est développée dans les années 30/40 pour créer le premier ordinateur en 1945. Cela rendu possible par l'élaboration d'une nouvelle discipline : la logique. En 1940, Turing et Von Neumann reformulent les idées logiques et créent les « machines de Turing ».
De nombreux problèmes naissent de l'informatique : le fonctionnement des réseaux (la compréhension de la géométrie du web), le traitement d'image, la théorie des graphes, etc.
En biologie, l'analyse des génomes (humains, animaux, céréales) demande des outils mathématiques. La molécule d'ADN qui contient l'information génétique est rangée dans un certain ordre déterminé par le génotype. La structure spatiale et la complexité combinatoire nécessitent de nouvelles idées mathématiques.
Les sciences de l'ingénieur, comme la cryptographie, les codages d'informations, sont autant d'outils mathématiques très sophistiqués. La théorie des nombres est un des principaux outils.
Ainsi la frontière en mathématiques appliquées et fondamentales est devenue floue.

Martin Andler « présentait ce que sont les mathématiques »...

Les mathématiques contemporaines. Dans celles ci, il existe de très fortes connexions entre algèbre/géométrie (géométrie algébrique appliquée en théorie des nombres) et analyse/géométrie (géométrie et topologie différentielle). Le domaine des probabilités a de nombreuses applications. Les combinatoires, laissées de côté pendant longtemps car soi disant « pas très intéressant », sont en réalité des mathématiques très astucieuses. Ce domaine, qui a beaucoup évolué depuis 40 ans avec Rota, est aujourd'hui très important. Souvent des jugements fermés à certaines époques ont donné de grandes avancées à d'autres !

Le deuxième exposé s'intitulait *Jouer à Colin-Maillard au bord de la falaise diminue-t-il l'espérance de vie ?*

Dans *Retour vers le futur II*, Lorraine, excédée par l'attitude de Biff, lui conseille d'aller jouer à Colin-maillard au bord de la falaise. Dans ce texte, je me suis demandé dans quelle mesure cela est vraiment dangeureux.

Nous allons très grossièrement modéliser le jeu de Colin-maillard par une marche aléatoire en dimension 1 : initialement Biff fait face à une falaise distante de d pas de sa position et a les yeux bandés (il ne sait donc pas où est la falaise ni même, on peut supposer, qu'il y en a une), tandis que de son côté, chaque minute, Lorraine joue à pile ou face et ordonne à Biff d'avancer d'un pas si le résultat a été « pile »et de reculer d'un pas sinon.

Théorème 0.1. *La probabilité que Biff tombe dans la falaise (en un temps fini mais non précisé) est* 1

L'espérance de vie de Biff, c'est-à-dire le temps moyen t avant que la chute n'arrive (ou pour être plus gai, que le jeu se termine), est $+\infty$.

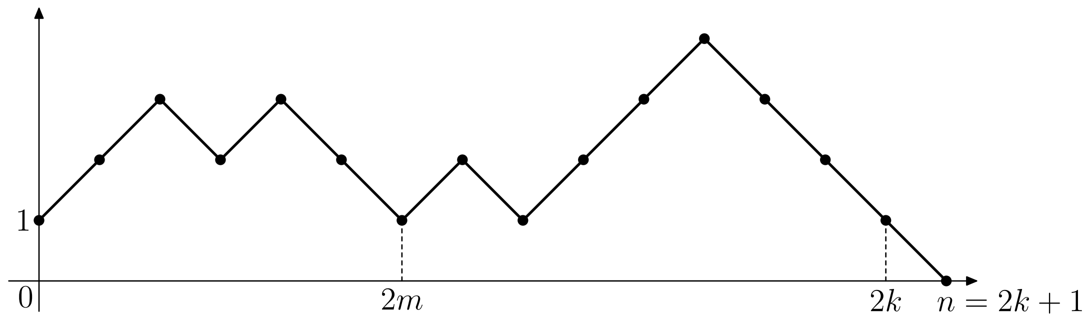
Avant de commenter ce résultat, nous allons nous attarder quelque peu sur sa démonstration. Notons p_n la probabilité que Biff tombe de la falaise au temps n. Elle s'obtient en divisant le nombre de tirages conduisant à un chemin faisant tomber Biff au temps n par le nombre de tirages totals (c'est-à-dire 2^n). La probabilité que Biff tombe de la falaise (à un temps non précisé) est alors :

$$p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n + \cdots$$

tandis que son espérance de vie est :

$$p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \cdots + np_n + \cdots$$

Il nous faut maintenant estimer les p_n et pour cela le nombre de chemins qui conduisent à la chute de Biff au temps n. On commence par supposer que $d = 1$, c'est-à-dire que Biff commence le jeu à un pas de la falaise. Voici un exemple de chemin qui conduit à une chute au temps n :



On remarque tout de suite qu'il n'y a pas de chute possible à un temps n pair. A partir de maintenant, nous allons donc supposer que n est pair, *i.e.* $n = 2k+1$. En introduisant le temps $2m$ de premier retour à un pas de la falaise (voir dessin ci-dessus), on montre la relation de récurrence suivante :

$$c_k = c_0c_{k-1} + c_1c_{k-2} + \cdots + c_{k-1}c_0$$

oô c_k désigne le nombre de chemins que l'on cherche à calculer. Si l'on pose

$$g(x) = 1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots + c_nx^n + \cdots$$

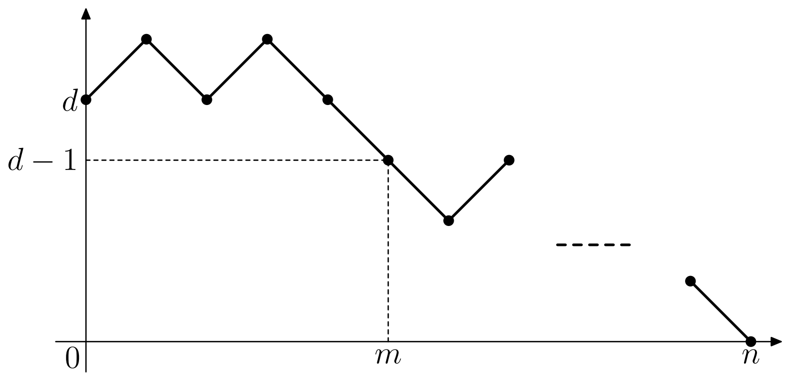
la relation obtenue se réécrit $g(x) - 1 = xg(x)^2$, ce qui conduit finalement à la solution $g(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$. Au niveau des p_n, cela donne :

$$\begin{aligned} f(x) &= p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + \cdots \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{c_1}{2^3}x^3 + \frac{c_2}{2^5}x^5 + \cdots \\ &= \frac{x}{2} g\Big(\frac{x^2}{4}\Big) \\ &= \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}. \end{aligned}$$

Les nombres cherchés se calculent à partir de là comme suit :

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 + \cdots &= f(1) = 1 \\ p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \cdots &= f'(1) = \infty. \end{aligned}$$

On a ainsi bien démontré le théorème dans le cas $d = 1$. Lorsque $d > 1$, on peut raisonner comme suit. Si $p_n(d)$ désigne la probabilité de chute au temps n en partant à d pas du bord, le dessin suivant



conduit à la relation de récurrence

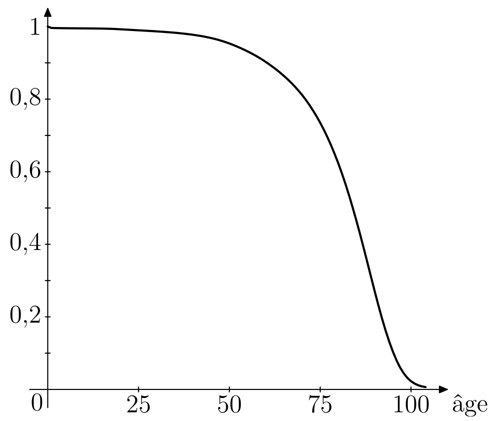
$$p_n(d) = p_0 p_n(d-1) + p_1 p_{n-1}(d-1) + \cdots + p_n p_0(d-1)$$

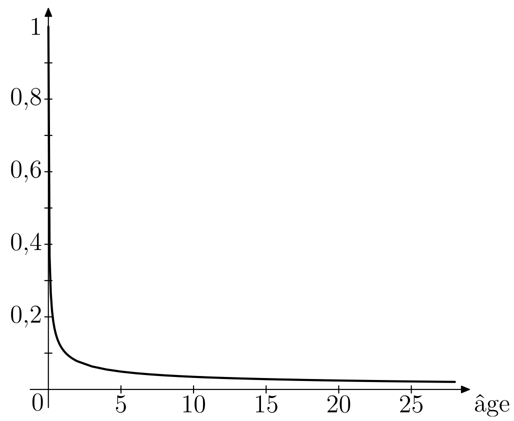
qui conduit à son tour à

$$f_d(x) = p_0(d) + p_1(d)x + p_2(d)x^2 + p_3(d)x^3 + \cdots = f(x) f_{d-1}(x) = f(x)^d.$$

On conclut alors comme précédemment.

Il est temps maintenant de discuter un peu le théorème. *A priori*, dès que l'on naît, on a également une probabilité 1 de mourir, et notre espérance de vie n'est certainement pas infinie mais plutôt de l'ordre de 80 ans. Il semble donc que jouer à Colin-maillard au bord de la falaise soit moins dangereux que tout simplement vivre ! En fait, en creusant un peu, on se rend bien entendu compte qu'il faut faire plus attention que cela. Par exemple, le calcul de la mortalité infantile est intéressant : alors qu'en France, il est de l'ordre de 6,3 ‰, il atteint 89% pour le jeu de Colin-maillard avec $d = 100$ (en supposant que Lorraine lance la pièce toutes les minutes). En fait, les courbes de mortalité sont très différentes comme on le voit sur la figure ci-dessous



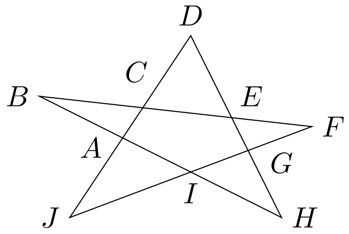


A gauche, est représentée la courbe de mortalité naturelle : en ordonnée est représentée la proportion de personnes qui atteignent l'âge indiquée en abscisse. La deuxième courbe, quant à elle, décrit la mortalité d'une personne jouant à Colin-maillard comme précédemment avec $d = 100$ et un lancé toutes les minutes. Pour le jeu de Colin-maillard, la plupart des personnes meurent très jeunes (avant d'avoir atteint un an), mais il y a malgré tout quelques rares exceptions qui vivent très longtemps, et ce sont ces gens qui arrivent à rendre l'espérance de vie infinie ! En réalité, si l'on tient compte à la fois de la mortalité naturelle et de celle dûe à Colin-maillard au bord de la falaise, on peut calculer que l'espérance de vie chute à à peine 3 ans. Jouer à Colin-maillard au bord de la falaise a donc tendance à diminuer l'espérance de vie !

Enfin un troisième présentait les *Olympiades Internationales de Mathématiques*. Johan, ayant participé, encadré depuis de nombreuses années les OIM, donnait un aperçu de ce qu'elles sont. On pourra regarder les sujets des années 2008 et 2009 donnés au chapitre J.

D. Déterminons les niveaux : Olympique, Intermédiaire, Marmot

Exercice 1 a) Est-ce qu'on peut dessiner une étoile de façon que $AB < BC$, $CD < DE$, $EF < FG$, $GH < HI$ et $IJ < JA$?



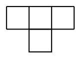
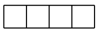
b) Prouvez que la somme des angles aux sommets B, D, F, H et J d'une étoile est $180°$.

Exercice 2 On se donne un cercle de rayon 1 et n points dans le plan. Montrez qu'il existe un point sur le cercle tel que la somme des distances de ce point aux n points donnés est $\geqslant n$.

Exercice 3 Est-ce qu'on peut dessiner 9 segments dans le plan tels que chaque segment intersecte exactement trois autres segments ?

Exercice 4 Deux élèves jouent au jeu suivant : le jeu commence par le nombre 60, chacun son tour les élèves diminuent le nombre obtenu d'un de ses diviseurs. Perd celui qui obtient zéro. Qui a une stratégie gagnante ?

Exercice 5 Montrez que 3^{2010} divise $2^{3^{2009}} + 1$.

Exercice 6 Est-ce qu'on peut paver une table 10×10 en utilisant a) des T-figures  ? b) des rectangles  ?

Exercice 7 Le produit des nombres réels positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est égal à 1. Prouver que

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \geqslant 2^n.$$

Exercice 8 Résoudre l'équation $3^m + 7 = 2^n$ en nombres entiers positifs.

Exercice 9 Soit $ABCD$ un parallélogramme et O un point à l'intérieur de $ABCD$ tel que $\widehat{OAD} = \widehat{OCD}$. Prouvez que $\widehat{OBC} = \widehat{ODC}$.

Exercice 10 Trouvez tous les polynômes P à coefficients réels tels que

$$xP(x-1) = (x-2)P(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

E. En cours

1 Ordre d'un élément

Il s'agit ici d'introduire la notion d'ordre modulo un entier et de donner des applications à la divisibilité entre entiers.

1.1 Fonction indicatrice d'Euler

Définition 1.1. Pour un entier positif n, on note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers premiers avec n et compris au sens large entre 1 et n. φ est appelée *fonction indicatrice d'Euler.*

Exemple 1.2. $\varphi(6) = 2$. *Si p est premier, $\varphi(p) = p - 1$.*

Proposition 1.3. *Si p est premier et $\alpha \geqslant 1$, alors :*

$$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}.$$

Démonstration. Un entier n'est pas premier avec p^α si, et seulement si c'est une puissance de p. Comme il y a exactement $p^{\alpha-1}$ puissances de p entre p et p^α, cela fournit l'égalité désirée. $\square$

La proposition suivante est admise.

Proposition 1.4 (Multiplicativité de φ)**.** *Si m et n sont deux entiers premiers entre eux, alors :*

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n).$$

La multiplicativité de φ nous fournit une formule pratique de calcul.

Corollaire 1.5. *Si la décomposition en facteurs premiers de n est $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ alors :*

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{k} \left(p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i - 1}\right) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

Exemple 1.6. $\varphi(2000) = \varphi(125 \times 16) = \varphi(5^3)\varphi(2^4) = (5^3 - 5^2)(2^4 - 2^3) = 800.$

Un des intérêts de la fonction d'Euler provient du théorème admis suivant.

Théorème 1.7. *Soient a et n deux entiers premiers entre eux. Alors :*

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \quad \textit{modulo } n.$$

Remarque 1.8. *En prenant $n = p$ un nombre premier dans le théorème précédent, nous retrouvons le petit théorème de Fermat.*

Remarque 1.9. *Les théorèmes admis ne sont pas particulièrement difficiles à montrer, mais leurs preuves nécessitent d'introduire le langage de la théorie des groupes.*

1.2 Ordre d'un élément

Le théorème suivant nous permettra de définir la notion d'ordre.

Théorème 1.10. *Soient a, n des entiers naturels. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *a et n sont premiers entre eux.*
2. *Il existe un entier k tel que :*
$$a^k \equiv 1 \quad \textit{modulo } n.$$

Démonstration. Prouvons d'abord le sens direct. D'après le théorème 1.7, il suffit de prendre $k = \varphi(n)$. Donnons une autre preuve qui n'utilise pas ce théorème (parce qu'il a été admis). Comme l'ensemble des résidus modulo n est fini, il existe deux entiers distincts $r < s$ tels que :

$$a^s \equiv a^r \quad \text{modulo } n.$$

Alors n divise $a^r(a^{s-r} - 1)$, donc aussi $a^{s-r} - 1$ car a et n sont premiers entre eux. Il suffit donc de prendre $k = r - s$.

Pour le sens réciproque, raisonnons par l'absurde en supposant que $d = \text{pgcd}(a, n) > 1$. Par hypothèse, il existe un entier r tel que $a^k + rn = 1$. Cela implique que d divise 1, ce qui est contradictoire. □

Définition 1.11. Soient a, n des entiers naturels premiers entre eux. On appelle *ordre de a modulo n* le plus petit entier non nul noté $\omega(a)$, noté[1] $\omega(a)$, vérifiant :

$$a^{\omega(a)} \equiv 1 \quad \text{modulo } n.$$

Remarque 1.12. *D'après le théorème 1.10, cette définition a bien un sens.*

Le théorème suivant illustre un des intérêts de cette définition.

[1] En toute rigueur, il faudrait garder la dépendance en n et noter $\omega_n(a)$, mais la plupart du temps n sera implicite.

Théorème 1.13. *Soient a, n des entiers naturels premiers entre eux et k un entier vérifiant :*

$$a^k \equiv 1 \quad \textit{modulo } n.$$

Alors $\omega(a)$ divise k.

Démonstration. Par l'absurde, supposons que $\omega(a)$ ne divise pas k. Soit $\omega(a) = qk + r$ la division euclidienn de $\omega(a)$ par k, avec $0 < r < k - 1$. Alors :

$$\begin{aligned} 1 &\equiv a^{\omega(a)} \quad \text{modulo } n \\ &\equiv (a^k)^q a^r \quad \text{modulo } n \\ &\equiv a^r \quad \text{modulo } n. \end{aligned}$$

Ceci contredit le caractère minimal de $\omega(a)$ et permet de conclure. □

Corollaire 1.14. *Soient a, n des entiers naturels premiers entre eux. Alors l'ordre de a divise $\varphi(n)$. En particulier, lorsque $n = p$ et premier, l'ordre de a divise $p - 1$.*

Démonstration. Ceci provient du théorème précédent et du fait que $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \quad$ modulo n. □

Remarque 1.15. *Attention ; il faut bien se garder de croire que si p et premier et $0 < a \leqslant p-1$, alors l'ordre de a est $p - 1$. Comme nous venons de le voir, s'il est vrai que l'ordre de a divise $p - 1$, il n'y a pas en général égalité : il suffit par exemple de prendre $p = 7$ et $a = 2$ pour s'en convaincre. Cependant, le théorème suivant donne un résultat allant en ce sens.*

Théorème 1.16. *Soit p un nombre premier. Alors il existe un entier r vérifiant $0 < u \leqslant p - 1$ et tel que l'ordre de u soit exactement $p - 1$*

Le niveau de la démonstration dépasse légèrement le cadre de ce cours, mais ce résultat fondamental est à retenir.

Remarque 1.17. *Soit p un nombre premier. Un entier u vérifiant $0 < u \leqslant p - 1$ et tel que l'ordre de u soit exactement $p - 1$ est appelé* racine primitive *et vérifie la propriété suivante : si $0 < a \leqslant p - 1$, il existe k tel que $u^k \equiv a$ modulo n.*

Exemple 1.18. 3 *est une racine primitive modulo* 7*, mais* 2 *n'est pas une racine primitive modulo* 7*.*

Remarque 1.19. *Il est important de se rappeler que la propriété d'être une racine primitive dépend toujours du modulo considéré.*

Exemple 1.20. *Pour un exemple d'exercice faisant intervenir ce théorème, voir l'exercice* 4 *du Rallye Grésillomath.*

1.3 Exemples d'utilisation

Citons deux exercices d'arithmétique de type « olympiade » qui peuvent se résoudre en utilisant cette notion.

Proposition 1.21. *Il n'existe pas d'entier $n > 1$ tel que n divise $2^n - 1$.*

Démonstration. Soit n tel que n divise $2^n - 1$. Soit p le plus petit facteur premier divisant n. Remarquons que n est nécessairement impair, donc $p > 2$ et p est premier avec 2. Or p divise n qui divise $2^n - 1$. Donc :

$$2^n \equiv 1 \quad \text{modulo } p.$$

D'autre part, d'après le petit théorème de Fermat :

$$2^{p-1} \equiv 1 \quad \text{modulo } p.$$

Ainsi, d'après le théorème 1.13, $\omega(2)$, l'ordre de 2 modulo p, divise à la fois n et $p - 1$. Ainsi, $1 < \omega(2) < p$, ce qui contredit le caractère minimal de p. □

Proposition 1.22. *Il n'existe pas d'entier impair $n > 1$ tel que n divise $3^n + 1$.*

Démonstration. Raisonnons de même ; soit $n > 1$ un entier impair divisant $3^n + 1$ et notons p le plus petit facteur premier divisant n de sorte que $p > 3$. D'une part, $3^n \equiv -1$ modulo p, ce qui fournit :

$$3^{2n} \equiv 1 \quad \text{modulo } p.$$

D'autre part, d'après le petit théorème de Fermat :

$$3^{p-1} \equiv 1 \quad \text{modulo } p.$$

Ainsi, d'après le théorème 1.13, $\omega(3)$, l'ordre de 3 modulo p, divise à la fois $2n$ et $p - 1$. Par suite, $\omega(3)$ est pair, et le cas $\omega(3) = 2$ est à exclure puisqu'alors $9 \equiv 1$ modulo p. Ainsi, $1 < \frac{\omega(3)}{2} < p$ et $\frac{\omega(3)}{2}$ divise n, ce qui contredit le caractère minimal de p. $\square$

2 Géométrie projective

Largement inspiré par un texte de Jean-François Martin

Soient A, B et C trois points du plan alignés. On définit le rapport de ces trois points dans cet ordre par :

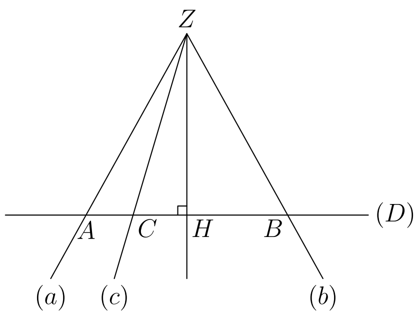
$$r_{A,B,C} = \overline{AC} \cdot \overline{BC}^{-1}$$

où les barres signifient que l'on considère les distances algébriques. De façon analogue, si (a), (b) et (c) sont trois droites concourantes, on définit leur rapport par la formule :

$$r_{(a),(b),(c)} = \frac{\sin\widehat{(c,a)}}{\sin\widehat{(c,b)}}.$$

Lemme 2.1. *Soient (a), (b) et (c) trois droites concourantes au point Z, et (Δ) une droite ne passant pas par Z. On note A, B et C les intersections respectives de (a), (b) et (c) avec (Δ). Alors $r_{(a),(b),(c)} = \frac{ZB}{ZA} r_{A,B,C}$.*

Démonstration. Soit H le projeté orthogonal de Z sur (Δ). Si les points sont disposés comme sur la figure ci-contre, on a successivement :



$$\begin{aligned}
r_{(a),(b),(c)} &= \frac{\sin\widehat{(c,a)}}{\sin\widehat{(c,b)}} \\
&= \frac{ZB}{ZA} \cdot \frac{\sin\widehat{(c,a)} \cdot ZC \cdot ZA}{\sin\widehat{(c,b)} \cdot ZC \cdot ZB} \\
&= \frac{ZB}{ZA} \cdot \frac{\mathcal{A}_{ZAC}}{\mathcal{A}_{ZBC}} \\
&= \frac{ZB}{ZA} \cdot \frac{AC \cdot ZH}{BC \cdot ZH} = \frac{ZB}{ZA} r_{A,B,C}.
\end{aligned}$$

Si les points A, B et C ne sont pas disposés dans cet ordre, on raisonne pareillement. $\square$

Maintenant si A, B, C et D sont quatre points alignés, on définit leur birapport $b_{A,B,C,D}$ par

$$b_{A,B,C,D} = r_{A,B,C} \cdot r_{B,A,D}. \tag{E.1}$$

De même, si (a), (b), (c) et (d) sont quatre droites concourantes, on définit leur birapport par

$$b_{(a),(b),(c),(d)} = r_{(a),(b),(c)} \cdot r_{(b),(a),(d)}.$$

On dit que quatre points alignés sont harmoniques si leur birapport est -1. De même quatre droites concourantes de birapport -1 sont dites harmoniques.

On déduit facilement du lemme précédent que si (a), (b), (c) et (d) sont quatre droites concourantes au point Z et que si (Δ) est une droite qui ne passe pas par Z, alors

$$b_{(a),(b),(c),(d)} = b_{A,B,C,D} \tag{E.2}$$

si A, B, C et D désignent les intersections respectives de (Δ) avec (a), (b), (c) et (d). Ainsi les points A, B, C et D sont harmoniques si, et seulement si les droites (a), (b), (c) et (d) le sont.

Définition 2.2. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans dans l'espace, et soit Z un point qui n'appartient ni à $\mathcal{P}_1$, ni a $\mathcal{P}_2$.

La *projection* sur $\mathcal{P}_2$ de centre Z est la transformation qui associe à un point $A \in \mathcal{P}_1$ l'unique point de $A' \in \mathcal{P}_2$ tel que Z, A et A' soient alignés.

En fait, la définition précédente n'est pas vraiment satisfaisante car, si la droite (ZA) est parallèle à $\mathcal{P}_2$, le point A n'a pas d'image. Pour palier à cela, on « complète » $\mathcal{P}_2$ en ajoutant des points à l'infini. Ceci conduit à la définition suivante.

Définition 2.3. Un *plan projectif réel* est la réunion d'un plan standard et d'un point à l'infini pour chaque direction de $\mathcal{P}_2$.

On convient que tous les points à l'infini sont alignés sur une droite, appelée *droite à l'infini.*

On remarque qu'avec cette définition, deux droites du plan projectif (*i.e.* une droite classique ou la droite à l'infini) s'intersectent toujours en un unique point. En outre, la projection de centre Z que nous avons défini auparavant s'étend en une application bien définie du plan projectif associé à $\mathcal{P}_1$ dans celui associé $\mathcal{P}_2$.

D'après la formule (E.2), une projection converse l'alignement et le birapport — au moins, pour l'instant, lorsque celui-ci est défini, c'est-à-dire lorsque les points ne sont pas à l'infini. Mais, cette propriété couplée au fait qu'il soit toujours possible d'envoyer par une projection des points à l'infini sur des points à distance finie (en orientant bien les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$) permet d'étendre la définition du birapport à des points quelconques du plan projectif. Dans ce cas, par définition même, le birapport est encore conservé par projection. On remarquera également que dans le cas où un seul des points est à l'infini, la formule (E.1) fonctionne encore pour calculer le birapport si l'on convient que la distance entre un point à l'infini et un point à distance finie est infinie et que $\frac{\infty}{\infty} = 1$. Autrement dit, si A, B et C sont trois points alignés et si ω désigne le point à l'infini déterminé par leur droite, on a :

$$b_{A,B,C,\omega} = r_{A,B,C} = \overline{AC} \cdot \overline{BC}^{-1}.$$

On en déduit directement le lemme suivant.

Lemme 2.4. *Si $[AB]$ est un segment de milieu I et que ∞ désigne le point à l'infini donnée par la direction de la droite (AB), alors les quatre A, B, I et ∞ dans cet ordre sont harmoniques.*

Définition 2.5. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans dans l'espace. Soit (Δ) une droite qui n'est parallèle ni à $\mathcal{P}_1$, ni a $\mathcal{P}_2$.

La *transformation affine* de affine de direction (Δ) est la transformation qui associe à un point $A \in \mathcal{P}_1$ l'unique point de $A' \in \mathcal{P}_2$ tel que (AA') soit parallèle à (Δ).

Remarque. En fait, on peut voir une transformation affine comme une projection dont le centre est rejeté à l'infini.

Quoi qu'il en soit, on vérifie facilement (par le théorème de Thalès) que les transformations affines conservent elles aussi l'alignement et le birapport. En outre, celles-ci s'étendent aussi au plan projectif (et conservent alors encore le birapport). Dans la suite, on appellera *transformation projective* une projection ou une transformation affine.

Lemme 2.6. *Il existe une transformation affine qui envoie trois points quelconques non alignés A, B et C sur trois points donnés non alignés A', B' et C'.*

Démonstration. On peut fixer le plan $\mathcal{P}_2$ pour que A coïncide avec A'. Il existe alors une similitude directe qui envoie B en B' et C en C'. □

Corollaire 2.7. *Étant donné quatre points A, B, C et D (resp. A', B', C' et D') dans un plan projectif dont trois d'entre eux ne sont jamais alignés, il existe une transformation projective qui envoie A sur A', B sur B', C sur C' et D sur D'.*

Démonstration. Exercice. □

3 Exercices de révision

3.1 Rudiments de logique

Exercice 1 1. Dresser la table de vérité des formules $\neg(F \wedge G)$ et $\neg F \vee \neg G$. Que constate-t-on ?
2. Dresser la table de vérité des formules $F \Rightarrow G$ et $\neg F \vee G$. Que constate-t-on ?

Exercice 2 Nier la phrase « S'il fait beau, alors j'irai jouer au Volley, sauf si personne ne veut ».

Exercice 3 Les points du plan sont coloriés de telle sorte que chaque point soit rouge ou bleu. Montrer qu'il existe une couleur telle que pour tout réel x on puisse trouver deux points de cette couleur distants de x.

3.2 Stratégies de base

Raisonnement par récurrence

Exercice 4 Trouver tous les $n \in \mathbb{Z}$ tels que $2^n \geqslant n^2$.

Exercice 5 A Mathland, deux villes sont toujours reliées soit par une ligne aérienne, soit un canal navigable (à double sens). Montrer qu'il est possible de choisir un moyen de transport, tel que, en partant de n'importe quelle ville, on puisse atteindre n'importe quelle autre ville uniquement à l'aide de ce moyen de transport.

Exercice 6 Soit $u_0, u_1, \ldots$ une suite de nombres vérifiant $u_0 = 1$ et pour $n \geqslant 0$:

$$u_{n+1} = u_0 + \cdots + u_n.$$

Calculer u_n.

Exercice 7 Soit α un nombre réel tel que $\alpha + 1/\alpha \in \mathbb{Z}$. Montrer que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Z}.$$

Principe des tiroirs

Exercice 8 Démontrer les deux assertions suivantes, où n est un entier strictement positif : 1. Si $n+1$ chaussettes sont réparties dans n tiroirs, montrer qu'il existe un tiroir contenant au moins deux chaussettes. 2. Soit k un entier strictement positif. Si au moins $kn+1$ chaussettes sont réparties dans n tiroirs, alors il existe un tiroir contenant au moins $k+1$ chaussettes.

Exercice 9 Lors d'une réunion de n personnes, montrer qu'il existe deux personnes qui ont serré la main au même nombre de personnes.

Exercice 10 On choisit $A_1, \ldots, A_5$ 5 points du plan à coordonnées entières (par rapport au repère orthonormé usuel). Montrer qu'il existe deux entiers i, j (avec $i \neq j$) tels que $]A_iA_j[$ passe par un point à coordonnées entières.

Invariants

Exercice 11 Xavier écrit les nombres $(2,3,4)$ au tableau. Sandrine a le droit d'effectuer l'opération suivante : choisir deux de ces nombres (a,b) et remplacer le troisième par $a+b-1$. Est-ce que Sandrine peut obtenir $(2009, 2010, 2011)$ en utilisant uniquement cette opération ?

Exercice 12 Lors d'une réunion de n personnes, montrer que le nombre de personnes qui ont échangé un nombre impair de poignées de main est pair.

Exercice 13 Est-il possible de paver avec des dominos 2×1 : (i) un damier 9×9 ? (ii) un damier 8×8 auquel manque les coins en haut à gauche et en bas à droite ?

Descente infinie

Exercice 14 Résoudre l'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz,$$

où $x, y, z \in \mathbb{Z}$ sont des nombres entiers relatifs.

3.3 Géométrie

Exercice 15 Soient Δ une droite, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles tangents à Δ en respectivement A_1 et A_2 avec $A_1 \neq A_2$, et tangents entre eux. On notre r_1 le rayon de $\mathcal{C}_1$ et r_2 le rayon de $\mathcal{C}_2$. Montrer que $A_1A_22 = 4r_1r_2$.

Exercice 16 Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles de rayons respectifs r_1 et r_2 se coupant en A et B, Δ une droite quelconque passant par A et pas par B. Soient C et D les points d'intersection respectifs de Δ avec Γ_1 et Γ_2. Calculer le rapport $\frac{BC}{BD}$ en fonction uniquement de r_1 et r_2.

Exercice 17 **Droite de Simpson.** Soit Γ un cercle et A, B, C trois points de Γ. Soit P un point du plan, P_A, P_B, P_C ses projections sur les droites $(BC), (CA), (AB)$ respectivement. Montrer que les points P_A, P_B, P_C sont alignés si et seulement si P appartient à Γ.

Exercice 18 Étant donné un triangle ABC, construire trois points A', B' et C' tels que B' soit le milieu de $[AC']$, C' celui de $[BA']$ et A' celui de $[CB']$.

Exercice 19 Étant donnés n points $A_1, \cdots, A_n$ du plan, existe-t-il n points $B_1, \ldots, B_n$ tels que $A_1, \ldots, A_n$ soient les milieux de, respectivement, $[B_1B_2], \ldots, [B_nB_1]$?

Exercice 20 Soient A, B, A' et B' quatre points du plans tels que $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$. Construire le centre de la similitude directe qui envoie A sur A' et B sur B'.

4 Les solutions

4.1 Rudiments de logique

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> 1. On constate que les deux tables de vérité sont identiques à :

F	G	$\neg(F \wedge G)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

2. On constate que les deux tables de vérité sont identiques à :

F	G	$F \Rightarrow G$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Soit B la proposition « je jouerai au Volley » et C la proposition « quelqu'un veut jouer au Volley ».

Concentrons-nous d'abord sur la proposition « B sauf si $\neg C$ ». Si B est vraie, nécessairement C est vraie (sinon, personne veut jouer et donc je ne joue pas). Réciproquement, si C est vraie, alors nécessairement je joue au Volley, autrement dit B est vraie. En conclusion, la proposition « B sauf si $\neg C$ »est équivalente à la proposition « B si, et seulement si C ».

Comme la négation de « si F, alors G » est $F \wedge \neg G$, la négation de la proposition de départ est :

il fait beau et soit je joue au Volley alors que personne ne veut jouer, soit je ne joue pas au Volley alors que quelqu'un veut jouer.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Raisonnons par l'absurde en supposant qu'on puisse trouver des distances x et y telles que deux points rouges ne soient jamais distants de x et deux points bleus ne soient jamais distants de y.

Il existe alors un point rouge ; notons le A. Considérons ensuite un triangle isocéle ABC tel que $AB = AC = x$ et $BC = y$. Ainsi, B et C doivent être bleu. Or ces deux points sont distants de y, ce qui est contradictoire. Notre supposition de départ était donc fausse ; ce qui conclut.

4.2 Stratégies de base

Solution de l'exercice 4 On commence par remarquer que $n = 0, 1, 2, 4$ conviennent mais pas $n = 3$. Des essais conduisent à conjecturer que les entiers recherchés sont exactement $n = 0, 1, 2$ et $n \geqslant 4$. Soit n un entier tel que $2^n \geqslant n^2$. D'une part, si $n < 0$, alors $2^n < 1$ et $n^2 \geqslant 1$, ce qui montre que $n \geqslant 0$. Ensuite, notons P_n la proposition suivante :

$$P_n : \qquad « \, 2^n \geqslant n^2, \, »$$

que nous allons démontrer par récurrence sur n.

- (Initialisation) On a déjà vu que P_4 est vérifiée.
- (Hérédité) Soit $n \geqslant 4$ un entier et supposons que P_n est vraie. Montrons que P_{n+1} est satisfaite. Il s'agit donc de montrer que $2^{n+1} \geqslant n^2$. Écrivons $2^{n+1} = 22^n$ afin de faire apparaître le terme 2^n et de pouvoir utiliser l'hypothèse de récurrence. Celle-ci nous fournit :

$$2^{n+1} \geqslant 22^n \geqslant 2n^2.$$

Il suffit donc de montrer que $2n^2 \geqslant (n+1)^2$. Or cette derniére inégalité est équivalente à :

$$(n-1)^2 \geqslant 2,$$

qui est vérifiée car $n \geqslant 4$.

Solution de l'exercice 5 Notons n le nombre de villes. Pour avoir une intuition de ce qui se passe, il est conseillé de tester différentes configurations pour des petites valeurs de n. Pour $n = 2$, il n'y a un qu'un seul moyen de transport. Pour $n = 3$, soient A, B, C les trois villes. Sans perte de généralité, supposons que $A - B$ est une ligne aérienne. Alors soit C peut être relié à A ou B par une ligne aérienne, auquel cas l'avion convient, soit C est relié à A et B par un canal, auquel cas le bateau convient.

Cela suggére de démontrer que la véracité de la proposition suivante par récurrence[2] sur n :

P_n : « Pour toute configuration de n villes, il existe un moyen de transport vérifiant les conditions requises. »

- (Initialisation) On a déjà vu que P_2 est vérifiée.
- (Hérédité) Soit $n \geqslant 2$ un entier et supposons que P_n est vraie. Montrons que P_{n+1} est satisfaite. Considérons A une ville quelconque et appliquons la propriété P_n à la configuration des n villes restantes. Sans perte de généralité, supposons que c'est l'avion qui convient. Alors de deux choses l'une : soit il existe une ligne aérienne reliant A à une autre ville, auquel cas l'avion convient, soit A est relié à toutes les autres villes par un canal, auquel cas le bateau convient.

Solution de l'exercice 6 En calculant les premiers termes de la suite, on est amené à conjecturer que $u_n = 2^{n-1}$ pour $n \geqslant 1$ (mais pas pour $n = 0$). Soit donc, pour $n \geqslant 1$, P_n la propriété :

$$u_n = 2^{n-1}.$$

Démontrons ceci par récurrence sur l'entier n.

- (Initialisation) On calcule que $u_1 = 1$, de sorte que P_1 est vérifiée.

[2]il faut toujours connaître la propriété *précise* que l'on veut prouver afin d'éviter les mauvaises surprises (par exemple lors de deux récurrences imbriquées ou autre réjouissances de ce type).

- (Hérédité) Soit $n \geqslant 1$ un entier et supposons que P_n est vraie. Montrons que P_{n+1} est satisfaite. Nous remarquons que d'aprés la formule de l'énonce (utilisée pour n et $n+1$) :

$$u_{n+1} = u_n + u_n = 2u_n.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $u_{n+1} = 22^{n-1} = 2^n$. Cela montre que P_{n+1} est vérifiée et conclut la récurrence.

Solution de l'exercice 7 Montrons que la propriété suivante est vérifiée par récurrence sur n :

$$P_n : \qquad « \, \alpha^{n-1} + \frac{1}{\alpha^{n-1}} \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Z} \, ».$$

- (Initialisation) P_1 est clairement vraie.
- (Hérédité) Soit $n \geqslant 1$ un entier et supposons que P_n est vraie. Remarquons que :

$$\alpha^{n+1} + \frac{1}{\alpha^{n+1}} = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}\right) - \left(\alpha^{n-1} + \frac{1}{\alpha^{n-1}}\right),$$

qui est entier grâce à l'hypothèse de l'énoncé et à l'hypothèse de récurrence P_n. Cela conclut.

Solution de l'exercice 8 Contentons-nous de montrer le deuxième point (celui-ci implique le premier avec $k = 1$). Montrons la proposition contraposée, à savoir que s'il n'existe pas de tiroir contenant au moins $k+1$ chaussettes, alors il n'y a pas au moins $kn+1$ chaussettes réparties dans n tiroirs.

Or dire qu'il n'existe pas de tiroir contenant au moins $k+1$ chaussettes, c'est dire que tous les tiroirs contiennent au plus k chaussettes, et comme il a n tiroirs, cela implique qu'il y a au plus kn chaussettes. Cela conclut.

Solution de l'exercice 9 Ici, les tiroirs et les chaussettes s'imposent naturellement : les personnes, au nombre de n, jouent le rôle de chaussettes et le nombre de personnes auxquelles on a serré la main, compris entre 0 et $n-1$, jouent le rôle de tiroirs. Il y a ainsi n tiroirs et n chaussettes. D'aprés le principe des tiroirs, le seul cas où il n'existe pas de tiroir contenant au moins deux chaussettes se produit lorsque chaque tiroir est occupé par exactement une chaussette. Mais alors, il existerait à la fois une personne n'ayant serré aucune main et une personne ayant serré la main de tout le monde, ce qui n'est pas possible. Ainsi, il existe un tiroir contenant au moins deux chaussettes, ce qui exactement ce qu'il fallait prouver.

Solution de l'exercice 10 Les parités des coordonnées d'un point à coordonnées entiéres ne peuvent être que de quatre types : $(\text{pair}, \text{pair})$, $(\text{impair}, \text{pair})$, $(\text{pair}, \text{impair})$ et $(\text{impair}, \text{impair})$. Comme nous avons affaire à cinq points, d'aprés le principe des tiroirs il existe deux points différents, disons A_i et A_j, de même type de parité. Alors le milieu de $]A_iA_j[$ est un point à coordonnées entiéres, ce qui montre que nous pouvons choisir A_i et A_j pour répondre aux exigences de l'énoncé.

Solution de l'exercice 11 On remarque que la parité de la somme des nombres écrits au tableau est toujours impaire. La configuration hyptothétique $(2009, 2010, 2011)$ est telle que la somme de ces nombres est paire. On ne peut donc pas l'obtenir en utilisant l'unique opération autorisée.

Solution de l'exercice 12 Soient N le nombre total de poignées de main échangées, X_i l'ensemble des personnes ayant échangé un nombre impair de poignées de main et X_p l'ensemble de personnes ayant échangé un nombre pair de poignées de main. Pour une personne x, notons $n(x)$ le nombre de poignées de mains échangées par x. Nous avons alors, chaque poignée de main étant comptée deux fois :

$$2N = \sum_{x \in X_i} n(x) + \sum_{x \in X_p} n(x).$$

En considérant cette équation modulo 2, il vient :

$$0 \equiv \sum_{x \in X_i} 1 + \sum_{x \in X_p} 0 \bmod 2.$$

Ainsi, le cardinal de X_i est pair, ce qu'il fallait démontrer.

Solution de l'exercice 13 (i) Une figure pavée entiérement par des triminos 1×2 posséde un nombre multiple de 2 cases. Or le damier à paver posséde un nombre de cases qui n'est pas multiple de 2. La réponse est donc *non.* (ii) Colorions le damier comme un échiquier. On remarque qu'un domino recouvre nécessairement 2 cases dont les couleurs sont différentes. Comme la figure à paver ne posséde pas la même nombre de cases de chaque couleur, la réponse est encore *non.*

Solution de l'exercice 14 La solution triviale $(0,0,0)$ convient. Nous allons montrer que c'est la seule qui soit en utilisant le principe de descente infinie. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une solution (x_0, y_0, z_0) de l'équation de départ telle que $(x_0, y_0, z_0) \neq (0,0,0)$. 1. Si l'un des entiers est nul, disons x_0 par symétrie, alors $y_0^2 + z_0^2 = 0$, ce qui impose $(y_0, z_0) = (0,0)$. Nous pouvons donc supposer qu'aucun des entiers n'est nul. 2. Si tous les entiers ne sont pas strictement positifs, comme le terme de droite de l'équation est positif, il y a nécessairement deux entier négatifs, disons x_0 et y_0, et un entier positif, disons z_0. Mais alors, $(-x_0, -y_0, z_0)$ est également une solution non triviale. En conclusion, on peut supposer que x_0, y_0, z_0 sont tous strictement positifs 3. Comme le terme de droite est pair, on voit qu'au moins un entier parmi x_0, y_0, z_0 est pair, disons x_0. Écrivons alors $x_0 = 2x_1$ avec $x_1 > 0$. En réinjectant la valeur de x_0, il vient :

$$4x_1^2 + y_0^2 + z_0^2 = 4x_1 y_0 z_0.$$

Ceci impose que $y_0^2 + z_0^2$ soit pair et donc que y_0 et z_0 aient la même parité. 4. Nous allons montrer que nécessairement y_0 et z_0 sont tous les deux pairs. Raisonnons par l'absurde en supposant que y_0 et z_0 sont tous les deux impairs. Écrivons $y_0 = 2y' + 1$ et $z_0 = 2z' + 1$. En réinjectant les valeurs de y_0 et de z_0 dans l'équation, nous obtenons :

$$4x_1^2 + 4y'^2 + 4z'^2 + 2 = 4x_1 y_0 z_0,$$

ce qui est absurde car le terme de gauche n'est pas divisible par 4. 5. Ainsi, nous pouvons écrire $y_0 = 2y_1$ et $z_0 = 2z_1$. En réinjectant les valeurs de y_0 et de z_0 dans l'équation, il vient :

$$4x_1^2 + 4y_1^2 + 4z_1^2 = 16x_1 y_1 z_1,$$

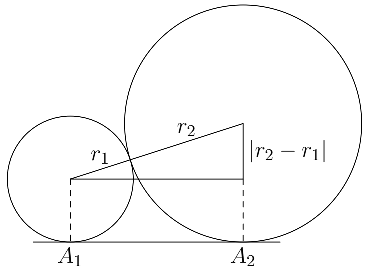
où encore $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1 y_1 z_1$. Remarquons que dans le raisonnement qui précéde, nous n'avons fait qu'utiliser le fait que le terme de droite était pair. Comme $(x_1, y_1, z_1) \neq (0,0,0)$, nous pouvons itérer par récurrence ce que nous avons fait en construisant une suite de triplets d'entiers (x_n, y_n, z_n) tels que pour $n \geqslant 0$:

$$x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 = 2^{n+1} x_n y_n z_n \quad \text{et} \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{2} \quad y_{n+1} = \frac{y_n}{2} \quad z_{n+1} = \frac{z_n}{2},$$

6. La suite (infinie) (x_n) est ainsi une suite strictement décroissante d'entiers strictement positifs, ce qui est absurde.

4.3 Géométrie

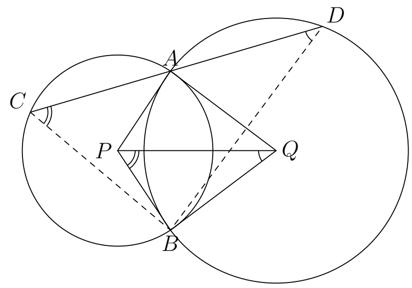
Solution de l'exercice 15 La droite joignant les centres de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ passe par leur point de contact. On applique alors le théorème de Pythagore au triangle rectangle dessiné sur la figure ci-dessous.



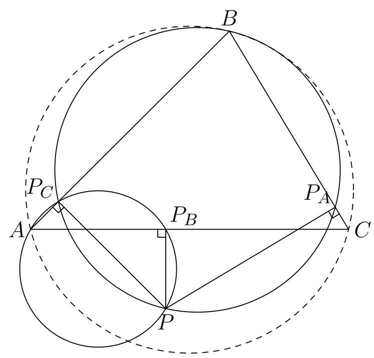
On obtient $A_1A_22 + (r_2 - r_1)2 = (r_2 + r_1)2$ ce qui donne bien $A_1A_22 = 4r_1r_2$.

Solution de l'exercice 16 *Première méthode.* D'après la loi des sinus, on a $BC = 2r_1 \sin \widehat{BAC}$ et $BD = 2r_2 \sin \widehat{BAD}$. Or on a $\widehat{BAC} + \widehat{BAD} = \pi$, d'où $\sin \widehat{BAC} = \sin \widehat{BAD}$ et donc $\frac{BC}{BD} = \frac{r_1}{r_2}$.

Deuxième méthode. Soient P et Q les centres respectifs de Γ_1 et Γ_2. D'après le théorème de l'angle au centre, $\widehat{BCA} = \frac{1}{2}\widehat{BPA} = \widehat{BPQ}$. De même, $\widehat{ADB} = \frac{1}{2}\widehat{AQB} = \widehat{PQB}$. Ainsi, les triangles CBD et PBQ sont semblables, et $\frac{BC}{BD} = \frac{BP}{BQ} = \frac{r_1}{r_2}$.



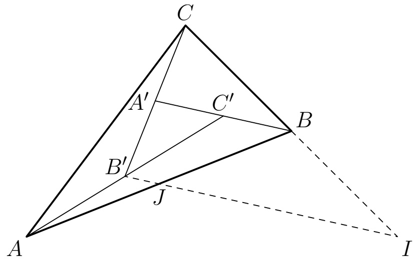
Solution de l'exercice 17 On raisonne dans le cas où P est de l'autre côté de (AC) par rapport à B comme sur la figure, les autres cas se traitent de même.



Les angles $\widehat{PP_AB}$, $\widehat{PP_CB}$, $\widehat{PP_BA}$ et $\widehat{PP_CA}$ étant droits, les points P, P_A, B, P_C d'une part, P, A, P_B, P_C d'autre part, sont cocycliques. D'où $\widehat{PP_CP_A} = \widehat{PBP_A} = \widehat{PBC}$ et $\widehat{PP_CP_B} = \widehat{PAP_B} = \widehat{PAC}$. Or les points P_A, P_B, P_C sont alignés si et seulement si $\widehat{PP_CP_A} = \widehat{PP_CP_B}$, donc si et seulement si $\widehat{PBC} = \widehat{PAC}$, donc si et seulement si les points A, B, C, P sont cocycliques.

Solution de l'exercice 18 *Première méthode.* L'homothétie $h_{A,\frac{1}{2}}$ de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$ envoie C' sur B'. De même, $h_{B,\frac{1}{2}}(A') = C'$ et $h_{C,\frac{1}{2}}(B') = A'$. Ainsi, $h_{A,\frac{1}{2}} \circ h_{B,\frac{1}{2}} \circ h_{C,\frac{1}{2}}(B') = B'$. Or, la composée d'homothéties de rapports non inverses est une homothétie. Donc $h_{A,\frac{1}{2}} \circ h_{B,\frac{1}{2}} \circ h_{C,\frac{1}{2}}$ est l'homothétie de centre B' et de rapport $\frac{1}{8}$.

Soit I le point tel que B soit le milieu de $[CI]$, et soit J le milieu de $[AB]$. On vérifie facilement que $h_{A,\frac{1}{2}} \circ h_{B,\frac{1}{2}} \circ h_{C,\frac{1}{2}}(I) = J$, et on en déduit que $\overrightarrow{B'J} = \frac{1}{8}\overrightarrow{B'I}$ puis la position du point B', et enfin les positions de C' et A'.



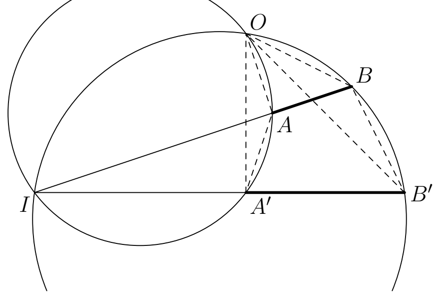
Deuxième méthode. Le point B' étant le milieu de $[AC']$, c'est le barycentre du système pondéré $\{(A,4),(C',4)\}$; et C' est le barycentre du système pondéré $\{(B,2),(A',2)\}$. Par associativité des barycentres et unicité, on en déduit que B' est le barycentre du système pondéré $\{(A,4),(B,2),(A',2)\}$. Puis, de même, A' étant le barycentre de $\{(C,1),(B',1)\}$, le point B' est finalement le barycentre de $\{(A,4),(B,2),(C,1),(B',1)\}$, donc de $\{(A,4),(B,2),(C,1)\}$. On en déduit que $\overrightarrow{AB'} = \frac{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{7}$. On construit ensuite comme précédemment les points C' et A'.

Solution de l'exercice 19 Considérons les symétries s_{A_i} de centre A_i. S'il existe des points B_i vérifiant les conditions de l'énoncé, alors $s_{A_i}(B_i) = B_{i+1}$ $(i < n)$ et $s_{A_n}(B_n) = B_1$. En particulier, $B_1 = s_{A_n} \circ s_{A_{n-1}} \circ \cdots \circ s_{A_1}(B_1)$. Or, la composée de n symétries centrales est une translation si n est pair, et une symétrie centrale si n est impair.

Par conséquent, si n est impair, il existe un unique B_1 point fixe de $s_{A_n} \circ \cdots \circ s_{A_1}$, et les autres B_i s'en déduisent de manière unique. Il y a donc une unique solution au problème posé.

Si n est pair, deux cas : soit $s_{A_n} \circ \cdots \circ s_{A_1}$ est une translation de vecteur non nul, et alors elle n'a aucun point fixe, donc il n'y a aucune solution. Soit $s_{A_n} \circ \cdots \circ s_{A_1}$ est l'identité du plan, et alors tout point B_1 du plan donne lieu à une solution.

Solution de l'exercice 20 Si (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, la similitude en question est une homothétie de centre le point d'intersection de (AA') et (BB'). Sinon, soit I le point d'intersection de (AB) et $(A'B')$. Soit O le deuxième point d'intersection des cercles circonscrits à IAA' et IBB'. Alors O est le centre de la similitude que l'on cherche.



En effet, montrons que les triangles OAA' et OBB' sont directement semblables. Par le théorème de l'angle inscrit, les angles orientés $\widehat{AOA'}$ et $\widehat{AIA'}$ sont égaux, ainsi que les angles $\widehat{BOB'}$ et $\widehat{BIB'} = \widehat{AIA'}$, donc $\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'}$. De même pour les angles $\widehat{OAA'}$ et $\widehat{OBB'}$, tous deux égaux à $\widehat{OIA'} = \widehat{OIB'}$.

F. En TD

Les exercices suivants sont classés par thème, et par ordre de difficulté croissante.

1 Les énoncés

1.1 Stratégies de base

Exercice 1 Nier les propositions suivantes.

1. Dans la classe, toutes les filles sont brunes et il y a au moins un garçon blond.
2. S'il pleut, je prendrai un parapluie ou un imperméable.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in \mathbb{R}, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Question bonus : que signifie la proposition 3 ?

Exercice 2 On considère des « mots » écrits avec les lettres x, y, z et t. On s'autorise les trois transformations suivantes : $xy \leftrightarrow yyx$, $xt \leftrightarrow ttx$ et $yt \leftrightarrow ty$. Les mots suivants sont-ils équivalents ?

1. $xxyy$ et $xyyyyx$,
2. $xytx$ et $txyt$,
3. xy et xt.

Exercice 3 a) Déterminer le nombre maximal de rois que l'on peut disposer sur un échiquier de sorte que deux quelconques ne s'attaquent jamais.

b) Idem pour les cavaliers.

Exercice 4 Est-il possible de répartir les entiers $1, 2, \ldots, 33$ en 11 groupes disjoints de trois éléments chacun de telle sorte que dans chaque groupe l'un des éléments soit la somme des deux autres ?

Exercice 5 Existe-t-il un triangle dont le périmètre fait moins de 1 centimètre, tandis le rayon de son cercle circonscrit excède 1 kilomètre ?

Exercice 6 Montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers.

Exercice 7 La somme de vingt entiers consécutifs est 1030. Quel est le plus petit de ces entiers ?

Exercice 8 Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f(2007) = 1$ et $f \circ f \circ f(x) = x$?

Exercice 9 Montrer le principe de récurrence forte à partir du principe de récurrence simple.

Exercice 10 Trouver tous les triplets d'entiers (x, y, z) tels que $x^3 + 2y^3 = 4z^3$.

Exercice 11 À partir d'un triplet (a, b, c) on peut effectuer l'opération suivante : on choisit deux des nombres du triplet, mettons x et y, et on remplace x par $\frac{x-y}{\sqrt{2}}$ et y par $\frac{x+y}{\sqrt{2}}$, en laissant le troisième nombre inchangé. Peut-on passer du triplet initial $(2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ au triplet $(1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ en respectant ces règles ?

Exercice 12 Vingt-deux arbres sont placés en rond, et sur chaque arbre se pose un corbeau. Puis, toutes les minutes, deux corbeaux se déplacent chacun sur un arbre voisin du leur. Est-il possible qu'au bout d'un certain temps, tous les corbeaux soient sur le même arbre ?

Exercice 13 Prouver les relations suivantes :
a) $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$;
b) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
c) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \frac{n-1}{n}$.

Exercice 14 Prouver que tout nombre entier $n > 0$ peut s'écrire comme une somme de nombres distincts de Fibonacci.

Exercice 15 Prouver que 133 divise $11^{1006} + 12^{2009}$.

Exercice 16 Montrer les inégalités suivantes :
a) $2^n > 1 + n\sqrt{2^{n-1}}$ pour tout $n > 1$;
b) $(1 + x)^n > 1 + nx$ pour tous $n > 1$ et $x > -1$;
c) $2(\sqrt{n+1} - 1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$ pour tout $n > 1$;
d) $1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2$ pour tout $n > 1$.

Exercice 17 Une table $m \times n$ est remplie par des nombres réels tels que la somme des nombres dans chaque ligne et chaque colonne est 1. Montrer que $m = n$.

Exercice 18 Une souris ronge un cube de fromage 3×3 qui est découpés en 27 petits cubes. Après avoir mangé un petit cube, elle procède avec un autre petit cube qui est adjacent au précédant (c-a-d qui a une face en commun). Est-ce que la souris peut manger tout le cube sauf le petit cube au centre ?

Exercice 19 a) Les nombres $1, 2, \ldots, 20$ sont écrits au tableau. On peut effacer deux nombres quelconques a et b et écrire à leur place le nombre $a + b - 1$. Quel nombre sera au tableau après 19 opérations ?
b) Et si l'on remplace deux nombres a et b par $a + b + ab$?

Exercice 20 Pierre a une carte avec le couple de nombres $(5, 19)$. Chaque fois qu'il montre une carte (a, b), Ivan lui donne la carte $(a + 1, b + 1)$. Si de plus a et b sont pairs, alors Thomas lui donne aussi la carte $(a/2, b/2)$. Enfin, si Pierre montre deux cartes (a, b) et (b, c), alors Guillaume lui offre la carte (a, c). Est-ce que Pierre peut ainsi obtenir la carte $(1, 2009)$?

Exercice 21 Combien y-a-t-il de nombres de 6 chiffres qui ont 2 chiffres pairs et 4 chiffres impairs ?

Exercice 22 Prouver que a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$; b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$; c) $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$.

Exercice 23 15 garçons ont trouvé 100 champignons. Prouver qu'au moins deux de ces garçons ont trouvé le même nombre de champignons.

Exercice 24 a) On a placé 6 points dans un rectangle 3×4. Montrer que la distance entre au moins deux de ces points est inférieure à $\sqrt{5}$.

b) On a placé 51 points dans un carré de côté 1. Montrer qu'on peut en choisir trois qui se trouvent dans un cercle de rayon $1/7$.

1.2 Géométrie

Exercice 25 Soient h_1, h_2 et h_3 les longueurs des hauteurs d'un triangle. Est-ce possible que $h_1 = h_2/2 = h_3/3$?

Exercice 26 Dans un triangle ABC on a tracé les hauteurs $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ et les médianes $[AA_2]$, $[BB_2]$, $[CC_2]$. Prouver que la longueur de la ligne brisée $A_1B_2C_1A_2B_1C_2A_1$ est égale au périmètre du triangle ABC.

Exercice 27 Sur les côtés BC et CD d'un parallélogramme $ABCD$ on a construit de manière externe deux triangles équilatéraux BCP et CDQ. Prouver que le triangle APQ est équilatéral.

Exercice 28 Deux cercles se rencontrent en les points P et Q. Une droite intersecte le segment $[PQ]$ et rencontre les cercles en les points A, B, C et D dans cet ordre-là. Prouver que $\widehat{APB} = \widehat{CQD}$.

Exercice 29 Soit M le milieu de la base $[BC]$ d'un triangle isocèle ABC. Le point E sur le côté AC est tel que $HE \perp AC$, le point O est le milieu de $[HE]$. Montrer que les droites (AO) et (BE) sont perpendiculaires.

Exercice 30 On se donne un triangle ABC et des points X, Y, Z tels que $\widehat{ABZ} = \widehat{XBC}$, $\widehat{BCX} = \widehat{YCA}$, $\widehat{CAY} = \widehat{ZAB}$. Prouver que les droites AX, BY et CZ sont concurrentes.

Exercice 31 Soient (OA) et (OB) deux droites passant par le point O qui touchent un cercle aux points A et B. On a tracé une corde $[AC]$ parallèle à (OB), soit E le deuxième point de l'intersection du segment $[OC]$ avec le cercle. Montrer que la droite (AE) rencontre le segment $[OB]$ en son milieu.

1.3 Arithmétique

Exercice 32 Montrer que quel que soit n, $n!$ n'est jamais divisible par 2^n, mais qu'il existe une infinité d'entiers n tels que $n!$ soit divisible par 2^{n-1}.

Exercice 33 On considère la suite de Fibonacci, définie par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Montrer que pour tous n et k entiers, $F_{n+k} = F_{k+1}.F_n + F_k.F_{n-1}$. En déduire que si a divise b, F_a divise F_b.

Exercice 34 Quel est le plus grand diviseur commun de tous les $n^{13} - n$ pour n entier positif quelconque ?

Exercice 35 Pour quelles valeurs de l'entier n le nombre $n^4 + 4^n$ est-il premier ?

Exercice 36 Montrer que quel que soit $n \geqslant 1$, $n^5 + 7$ n'est pas un carré.

Exercice 37 Montrer que les entiers de la forme $2^{2^n} + 1$ sont deux à deux premiers entre eux.

Exercice 38 Montrer que, si a et b sont deux entiers premiers entre eux, tous les facteurs premiers impairs de $a^2 + b^2$ sont de la forme $4k + 1$.

Montrer plus généralement que, si a et b sont deux entiers premiers entre eux, tous les facteurs premiers impairs de $a^{2^n} + b^{2^n}$ sont de la forme $2^{n+1}k + 1$.

En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4k + 1$, $8k + 1$... et plus généralement $2^{n+1}k + 1$ quel que soit n positif.

Exercice 39 Soit p un nombre premier.

a) Montrer que le dénominateur de : $S_p = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{p}$ est divisible par p. On pose donc : $S_p = \frac{a}{bp}$.

b) Montrer que $a - b$ est divisible par p^2.

c) $a - b$ est-il divisible par p^3 ?

Exercice 40 Soit S_n l'ensemble des entiers compris entre 1 et 2^n. Montrer que l'on peut partitionner S_n en deux sous-ensembles disjoints :

$A = \{a_1, a_2, ...a_p\}$ et $B = \{b_1, b_2, ...b_q\}$ (avec bien évidemment $p + q = 2^n$) tels que pour tout k compris entre 1 et $n - 1$,

$$\sum_{a_i \in A} (a_i)^k = \sum_{b_i \in B} (b_i)^k$$

Exercice 41 Olympiade internationale 1998

Trouver tous les couples (a, b) d'entiers strictement positifs tels que
$ab^2 + b + 7$ divise $a^2b + a + b$.

Exercice 42 Olympiade internationale 2005

Déterminer tous les entiers strictement positifs premiers avec tous les nombres de la forme $2^n + 3^n + 6^n - 1$, pour n entier naturel.

Exercice 43

1. Calculer $m = v_2(73!)$, l'entier maximal tel que : 2^m divise $73!$.
2. Trouver la somme $s_2(73)$ des « décimales »en base 2.
3. Trouver une relation entre $v_2(n!)$ et $s_2(73)$ et la prouver.

Exercice 44 Soient $n = p_1^{\alpha^1}$ et $\tau(n)$ est le nombre de diviseurs de n. Trouver une formule pour $\tau(n)$ telle que $\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$.

Exercice 45 Soit l'algorithme suivant :
n lampes (éteintes)
changer (i.e allumer) $1, 2, 3..., n$ lampes
changer (i.e éteindre) $2, 4, 6, ...$ lampes
changer (i.e allumer) $3, 6, 9, ...$
...
changer n.
Quelles sont les lampes allumées ?

Exercice 46 Trouver toutes les solutions $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ telles que :

1. $2^y = x^2 + 13$
2. $5^y = x^2 + 2x + 9$
3. $3^y = x^2 + 8x + 19$

Exercice 47 Trouver toutes les solutions dans $\mathbb{Z}$ de $y^2 = x^5 - 4$.

Exercice 48 Montrer que la somme de n carrés strictement positifs consécutifs n'est jamais la somme des n puissances quatrièmes positives consécutives. Essayer avec $n = 2$ par exemple.

Exercice 49 Trouver tout $a, b, c > 1$ tel que
a divise $b^2 - 1$, b divise $a^2 - 1$, a divise $c^2 - 1$, c divise $a^2 - 1$, b divise $c^2 - 1$, c divise $b^2 - 1$.

2 Les solutions

2.1 Stratégies de base

Solution de l'exercice 1

1. Dans la classe, il y a au moins une fille qui n'est pas brune, ou aucun garçon n'est blond.
2. Il pleut, et je ne prendrai ni parapluie, ni imperméable.
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists y \in \mathbb{R}, |x - y| < \eta$ et $|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon$.

La proposition 3 signifie que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 2

1. Les deux mots sont équivalents : $xxyy \leftrightarrow xyyxy \leftrightarrow xyyyyx$.
2. Les deux mots ne sont pas équivalents : en effet, le nombre de x est un invariant.
3. Les deux mots ne sont pas équivalents : la présence de y (ou celle de t) est un invariant.

Solution de l'exercice 3

a) On divise l'échiquier 8×8 en 16 carrés 2×2. D'après le principe des tiroirs, si l'on place au moins 17 rois sur l'échiquier, au moins deux se retrouveraient dans le même carré 2×2 et donc s'attaqueraient. Par conséquent, il est impossible de placer plus de 16 rois sur l'échiquier sans que deux s'attaquent. Réciproquement, on trouve facilement une disposition à 16 rois. Le maximum cherché est donc 16.

b) Le maximum cherché est 32. Tout d'abord, on note qu'un cavalier situé sur une case blanche n'attaque que des cases noires. Ainsi, en plaçant 32 cavaliers, un sur chaque case blanche, on a une disposition à 32 cavaliers sans que deux s'attaquent. Réciproquement, on divise l'échiquier en 8 rectangles 2×4, puis on divise chacun de ces rectangles en 4 paires de 2 cases comme indiqué

1	2	3	4
3	4	1	2

D'après le principe des tiroirs, si l'on plaçait au moins 33 cavaliers sur l'échiquier, au moins 5 seraient dans un même rectangle 2×4 considéré ci-dessus. Et donc, tiroirs toujours, au moins deux seraient sur des cases de même numéro dans ce rectangle, et donc s'attaqueraient. Ainsi, il est impossible de placer plus de 32 cavaliers en respectant les contraintes.

Solution de l'exercice 4

C'est impossible. En effet, si ça l'était, dans chaque groupe de trois la somme des trois nombres serait paire (double du plus grand des trois), et donc la somme de tous les éléments serait encore paire. Or, $1+2+\cdots+33 = \frac{33\times 34}{2} = 33 \times 17$ est impair.

Solution de l'exercice 5

Oui. Il suffit de considérer un cercle de rayon supérieur à 1 kilomètre, et de choisir sur ce cercle trois points distants de moins de 1 millimètre les uns des autres...

Solution de l'exercice 6 On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il n'y a qu'un nombre fini de nombres premiers, et notons-les $p_1, \ldots, p_n$. Soit $N = p_1 \cdots p_n + 1$. Le nombre N est premier avec chacun des p_i ; or, il admet un facteur premier (ceci peut se démontrer par récurrence forte), qui n'est donc aucun des p_i. Contradiction.

Solution de l'exercice 7 Notons n le plus petit de ces entiers. On a donc $n+(n+1)+\cdots+(n+19) = 1030$, c'est-à-dire $20n + 190 = 1030$. On obtient finalement $n = 42$.

Solution de l'exercice 8 La fonction définie par $f(2007) = 1$, $f(1) = 0$, $f(0) = 2007$ et $f(x) = x$ pour tout x distinct de $0, 1, 2007$ est solution du problème.

Solution de l'exercice 9

Soit $P(x)$ une proposition dépendant d'un paramètre $x \in \mathbb{N}$. On suppose $P(0)$, et que pour tout $x \in \mathbb{N}$, $(P(0)$ et $\ldots$ et $P(x) \Rightarrow P(x+1)$. On veut montrer que $\forall x \in \mathbb{N}, P(x)$.

Considérons la proposition $Q(x) = (\forall y \in \mathbb{N}, y \leqslant x, P(y))$. Nous allons montrer par récurrence simple que $\forall x, Q(x)$. On a $Q(0) = P(0)$ donc $Q(0)$ est bien vraie par hypothèse. Soit $x \in \mathbb{N}$ et supposons $Q(x)$. Alors, $\forall y \leqslant x, P(y)$. Donc, d'après la deuxième hypothèse faite sur P, on a $P(x+1)$. On a donc finalement $\forall y \leqslant x+1, P(y)$, c'est-à-dire $Q(x+1)$. On en déduit par récurrence simple que $\forall x \in \mathbb{N}, Q(x)$. Or, $Q(x) \Rightarrow P(x)$ donc $\forall \in \mathbb{N}, P(x)$ et le principe de récurrence forte est démontré.

Solution de l'exercice 10

Le triplet $(0, 0, 0)$ est bien entendu solution. Montrons que c'est le seul. Supposons que nous avons une autre solution (x, y, z). Alors $x3 = 4z3 - 2y3$ est pair, donc x aussi. On écrit $x = 2x'$ et on obtient $8x'^3 + 2y3 = 4z3$ soit $y3 = 2z3 - 4x'^3$. On en déduit que $y3$, puis y, est pair et on écrit $y = 2y'$. On obtient alors $4x'^3 + 8y'^3 = 2z3$ et $2x'^3 + 4y'^3 = z3$; $z3$, et z, sont donc pairs et on écrit $z = 2z'$. Enfin, on obtient $2x'^3 + 4y'^3 = 8z'^3$ et $x'^3 + 2y'^3 = 4z'^3$. Ainsi, (x', y', z') est encore solution. Mais $x' < x$, $y' < y$ et $z' < z$ et on construit ainsi trois suites strictement décroissantes d'entiers positifs, ce qui est impossible. On en déduit que $(0, 0, 0)$ est la seule solution.

Solution de l'exercice 11 On ne peut pas. En effet, pour un triplet (a, b, c), la quantité $a2+b2+c2$ est invariante par les opérations autorisées. Mais pour le premier triplet, $22 + (\sqrt{2})2 + (1/\sqrt{2})2 = 6 + 1/2$ et pour le deuxième $12 + (\sqrt{2})2 + (1 + \sqrt{2})2 = 6 + 2\sqrt{2}$.

<u>*Solution de l'exercice 12*</u> Ce n'est pas possible. On colorie les arbres alternativement en noir et en blanc (c'est possible, puisqu'il y en a un nombre pair). Alors, à chaque étape, la parité du nombre de corbeaux sur les arbres blancs ne change pas. Comme, initialement, il y a 11 corbeaux sur les arbres blancs, il y en a toujours un nombre impair, et il ne peut y en avoir ni 22, ni 0.

<u>*Solution de l'exercice 13*</u> a) Récurrence sur n.
b) Récurrence sur n.
c) Récurrence sur n ou comme suit :

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots\frac{1}{(n-1)\cdot n}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}.$$

<u>*Solution de l'exercice 14*</u> Récurrence sur n. Pour $n=1$ c'est vrai, supposons que c'est vrai pour tout $k\leqslant n$ et on va le montrer pour $n+1$. En effet, soit F_l le plus grand nombre de Fibonacci qui n'exède pas $n+1$, alors $n+1-F_l\leqslant n$ et $n+1-F_l<F_l$, car sinon on aurait $n+1\geqslant 2F_l>F_l+F_{l-1}=F_{l+1}$ ce qui condtradit au choix du F_l. Donc, par récurrence $n+1-F_l=F_i+\dots+F_j$ et $n+1$ est une somme de nombres de Fibonacci distincts.

<u>*Solution de l'exercice 15*</u> Par récurrence sur n on montre que 133 divise $11^{n+2}+12^{2n+1}$. Dans notre cas $n=1004$.

<u>*Solution de l'exercice 16*</u> a), b) et c) par récurrence sur n.
d) On montre par récurrence l'inégalité suivante :

$$1+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$$

ce qui est plus fort que l'inégalité donnée.

<u>*Solution de l'exercice 17*</u> D'un côté la somme des nombres dans toutes les lignes est $m\cdot 1$ et de l'autre côté la somme des nombres dans toutes les colonne est $n\cdot 1$. Vu que c'est la même chose, on a $m=n$.

<u>*Solution de l'exercice 18*</u> Non. Supposons que la souris peut le faire. On colorie les petits cubes en noir et blanc de façon que deux cubes adjacents soient de couleurs différentes (les cubes dans les coins sont noirs). Alors en passant d'un petit cube à l'autre, la souris change de couleur. Or, elle devra manger 12 cubes blancs et 14 cubes noirs. Contradiction.

<u>*Solution de l'exercice 19*</u> a) Invarinat : si sur le tableau sont écrits n nombres $a_1,a_2,\dots,a_n$, alors l'expression $S_n=a_1+a_2+\dots+a_n-n$ reste constante. Au debut elle est égale à $S_{20}=1+2+\dots+20-20=\frac{(1+20)20}{2}-20=190$ et si à la fin il reste le nombre r, alors $190=S_1=r-1$, d'où $r=191$.
b) On vérifie aisement qu'étant donnés n nombres $a_1,a_2,\dots,a_n$ sur le tableau, l'opération ne change pas le produit $(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_n+1)$. Soit r le nombre qui reste, alors

$$r+1=(1+1)(2+1)\dots(20+1)=21!,\text{ d'où } r=21!-1.$$

<u>*Solution de l'exercice 20*</u> Non. On constate que Ivan ne peut obténir que des cartes (a,b) telle que $b-a$ est divisible par 7. Or, $2009-1=2008$ ne l'est pas.

<u>*Solution de l'exercice 21*</u> Réponse : $14\cdot 5^6$.

Il y a 5 chiffres pairs et 5 chiffres impairs. Le nombres de nomres de 6 chiffres avec 2 chiffres pairs et 4 chiffres impairs (le premier chiffre n'est pas nul) est égales à $(\binom{6}{2}\cdot 5^2)\cdot 5^4-(5\cdot 5)\cdot 5^4 = 14\cdot 5^6$, où $(\binom{6}{2}\cdot 5^2)\cdot 5^4$ est le nombre de mots composés de 2 chiffres pairs et 4 chiffres impairs (y compris ceux qui commencent par 0) et $(5\cdot 5)\cdot 5^4$ est le nombre de mots composés de 2 chiffres pairs et 4 chiffres impairs commençant forcement par 0.

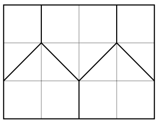
Solution de l'exercice 22 a) D'après le binôme de Newton on a $(1+x)^n = \binom{n}{0}\cdot x^0 + \binom{n}{1}\cdot x^1 + \cdots + \binom{n}{n}\cdot x^n$. En posant $x=1$ on obtient la relation voulue.

b) D'après le binôme de Newton on a $(1-x)^n = \binom{n}{0}\cdot x^0 - \binom{n}{1}\cdot x^1 + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}\cdot x^n$. En posant $x=1$ on obtient la relation voulue.

c) On considère une table $2n\times 2n$ et on place un pion sur la case au coin en bas à gauche. Il est permis de bouger le pion soit d'une case à droite, soit d'une case en haut. Le nombre de possibilités de se retrouver sur la case au coin en haut à droite après n pas est égal à $\binom{2n}{n}$. De l'autre côté le nombre de possibilité de passer par la k-ième case sur la diagonale est $\binom{n}{k}^2$. D'où le résultat.

Solution de l'exercice 23 Supposons le contraire, alors les garçons ont trouvé au moins $0+1+\cdots+14 = \frac{1+14}{2}\cdot 14 = 105 > 100$ champignons. Contradiction.

Solution de l'exercice 24 a) On découpe le rectangle 3×4 en 5 figures (voir le dessin ci-dessous). Alors au moins deux des 6 points tombent dans la même figure, donc la distance entre eux sera $\leqslant \sqrt{5}$.



b) On découpe le carré en 25 carreaux de côté 0,2. D'après le principe des tirroirs au moins trois des 51 points se trouvent dans le même carreau. Ce carreau est inscrit dans le cercle de rayon $\frac{1}{2}\cdot 0{,}2\cdot\sqrt{2} < 1/7$;

2.2 Arithmétique

Solution de l'exercice 32 Dans le produit $n!$ des entiers inférieurs ou égaux à n, le facteur 2 apparaît $\left[\frac{n}{2}\right]$ fois pour les entiers pairs, $\left[\frac{n}{4}\right]$ fois de plus pour les multiples de 4, ... $\left[\frac{n}{2^k}\right]$ fois de plus pour les multiples de 2^k : en tout, l'exposant de 2 dans la décomposition de $n!$ vaut $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]+...\left[\frac{n}{2^k}\right]+....$ Les termes de cette somme sont nuls à partir d'un certain rang q, donc la somme est inférieure ou égale à : $\frac{n}{2}+\frac{n}{4}+...+\frac{n}{2^{q-1}} = n\left(1-\frac{1}{2^{q-1}}\right) < n$. En revanche, si $n=2^q$, pour $k\leqslant q$, $\left[\frac{n}{2^k}\right] = \frac{n}{2^k} = 2^{q-k}$, et la somme : $2^{q-1}+2^{q-2}+...+2+1 = 2^q-1 = n-1$, donc $n!$ est divisible par 2^{n-1}.

Solution de l'exercice 33 La définition : $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ entraîne : $F_{n+2} = F_{n+1}+F_n = 2.F_n+F_{n-1}$, puis $F_{n+3} = 3.F_n+2.F_{n-1}$, $F_{n+4} = 5.F_n+3.F_{n-1}$... Cela se généralise par récurrence, à condition de poser comme hypothése de récurrence deux relations consécutives : $F_{n+k-1} = F_k.F_n + F_{k-1}.F_{n-1}$ et $F_{n+k} = F_{k+1}.F_n + F_k.F_{n-1}$, et d'en déduire les deux relations suivantes : $F_{n+k} = F_{k+1}.F_n+F_k.F_{n-1}$ et $F_{n+k+1} = F_{k+2}.F_n+F_{k+1}.F_{n-1}$. La premiére n'est pas à redémontrer, car elle était déjà parmi les hypothéses de récurrence, et la seconde résulte immédiatement de $F_{k+2} = F_{k+1}+F_k$ et $F_{k+1} = F_k+F_{k-1}$. Mais il faut deux relations consécutives pour initialiser la récurrence (nous en avons donné plus que deux), sinon la démonstration est fausse.

Pour en déduire que F_a divise F_b si a divise b, donc si $b=ka$, il faut construire une autre récurrence, sur k. La formule ci-dessus permet d'écrire : $F_{2a} = F_{a+1}.F_a + F_a.F_{a-1}$, ce qui est manifestement divisible par F_a. Supposons donc que F_{ka} soit divisible par F_a. $F_{(k+1)a} = F_{ka+a} = F_{a+1}.F_{ka} + F_a.F_{ka-1}$ est lui aussi divisible par F_a, ce qui achéve la démonstration.

Solution de l'exercice 34 Soit p un nombre premier. Pour tout n premier avec p, $n^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, donc quel que soit k, $n^{k(p-1)} \equiv 1^k \equiv 1 \pmod p$. Il en résulte que pour tout n premier ou non avec p, $n^{k(p-1)+1} - n$ est divisible par p. Or les diviseurs de $13-1$ sont : $1, 2, 3, 4, 6$ et 12 : si $p-1$ en fait partie, ce qui est le cas pour $p = 2, 3, 5, 7$ et 13, $n^{13} - n$ sera divisible par p quel que soit n. $2730 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$ est donc un diviseur commun de tous les $n^{13} - n$. Ce n'est pas obligatoirement le plus grand, mais le plus grand cherché doit diviser notamment $2^{13} - 2 = 8190 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$, ce ne peut être que 2730 ou 8190, selon que 3^2 divise ou non tous les $n^{13} - n$. Or 3^2 ne divise pas $3^{13} - 3$, puisqu'il divise 3^{13} et pas 3. La réponse est donc 2730.

Solution de l'exercice 35 Il est quasiment impossible de démontrer mathématiquement qu'un nombre est premier, donc pour un tel probléme, on s'attend à un trés petit nombre de solutions que l'on peut expliciter à la main (en l'occurrence, $n = 1$). Il s'agit donc de prouver que pour tous les autres n, $n^4 + 4^n$ est non premier, donc manifestement factorisable : la meilleure maniére de factoriser ce genre d'expression est de l'écrire comme différence de deux carrés. De fait, si n est pair $n^4 + 4^n$ est pair et supérieur à 4, donc non premier, et si n est impair, $n^4 + 4^n = \left(n^2 + 2^n\right)^2 - \left(2^{\frac{n+1}{2}} n\right)^2 = \left(n^2 - 2^{\frac{n+1}{2}} n + 2^n\right)\left(n^2 + 2^{\frac{n+1}{2}} n + 2^n\right)$. Pour $n = 1$, le premier facteur est égal à 1 de sorte que le produit, 5, est un nombre premier, mais pour $n > 1$, $\left(n^2 - 2^{\frac{n+1}{2}} n + 2^n\right) = \left(n - 2^{\frac{n-1}{2}}\right)^2 + 2^{n-1} \geqslant 2^{n-1} \geqslant 2$: $n^4 + 4^n$ est produit de deux facteurs supérieurs ou égaux à 2, il est donc non premier.

C'est à Sophie Germain qu'on doit la factorisation plus générale :

$$a^4 + 4b^4 = \left(a^2 - 2ab + 2b^2\right)\left(a^2 + 2ab + 2b^2\right)$$

Solution de l'exercice 36 Il existe deux méthodes habituellement utilisables pour prouver qu'un nombre n'est pas un carré : soit il est trop proche d'un carré pour être lui-même un carré (il n'existe pas de carré entre $n^2 + 1$ et $n^2 + 2n$), mais ce n'est manifestement pas le cas dans notre probléme, soit en utilisant les résidus. Pour tout $p \geqslant 3$, il existe des entiers a tels qu'aucun carré ne soit congru à a modulo p. Par exemple, aucun carré n'est congru à 2 modulo 3, aucun n'est congru à 2 ni 3 modulo 4... Modulo un nombre premier impair p, il existe $\frac{p-1}{2}$ entiers $a < p$ tels qu'aucun carré ne soit congru à a modulo p. Par exemple, modulo 5, aucun carré n'est congru à 2 ni 3. Quand il existe un carré congru à a modulo p, on dit que a est résidu quadratique modulo p. Le souci, ici, c'est que modulo la plupart des nombres premiers p, $n^5 + 7$ peut prendre toutes les valeurs possibles, donc être résidu quadratique. Il faut donc chercher un nombre premier pour lequel le nombre de valeurs prises par $n^5 + 7$ est réduit, et pour cela utiliser le théoréme de Fermat : par exemple si n est premier avec 11, $\left(n^5\right)^2 = n^{10} \equiv 1 \pmod{11}$, donc n^5 ne peut prendre que les valeurs $0, 1$ ou -1 modulo 11. $n^5 + 7 \equiv 6, 7$ ou $8 \pmod{11}$, or les résidus quadratiques modulo 11 sont : $1^2 \equiv 10^2 \equiv 1$, $2^2 \equiv 9^2 \equiv 4$, $3^2 \equiv 8^2 \equiv 9$, $4^2 \equiv 7^2 \equiv 5$, $5^2 \equiv 6^2 \equiv 3$, ce qui achéve la démonstration.

Solution de l'exercice 37 Deux solutions méritent d'être signalées : par récurrence sur $k \geqslant 1$, on prouve que $2^{2^{n+k}} + 1$ est premier avec $2^{2^n} + 1$. C'est vrai pour $k = 1$, car $2^{2^{n+1}} + 1 = \left(2^{2^n} + 1\right)\left(2^{2^n} - 1\right) + 2 \equiv 2 \pmod{2^{2^n} + 1}$. Supposons plus généralement que $2^{2^{n+k}} + 1 \equiv 2 \pmod{2^{2^n} + 1}$, $2^{2^{n+k+1}} + 1 = \left(2^{2^{n+k}} + 1\right)^2 - 2\left(2^{2^{n+k}} + 1\right) + 2 \equiv 2 \pmod{2^{2^n} + 1}$, ce qui achéve la démonstration. Mais on peut aussi remarquer que :

$$2^{2^n} - 1 = \left(2^{2^{n-1}} + 1\right)\left(2^{2^{n-1}} - 1\right) = \left(2^{2^{n-1}} + 1\right)\left(2^{2^{n-2}} + 1\right)\left(2^{2^{n-2}} - 1\right) =$$

$$... = \left(2^{2^{n-1}}+1\right)\left(2^{2^{n-2}}+1\right)...\left(2^{2^1}+1\right)\left(2^{2^1}-1\right)$$

Donc non seulement $2^{2^n}-1$ est divisible par tous les $2^{2^k}+1$ qui précédent, mais c'est précisément le produit de tous ces $2^{2^k}+1$, ce qui prouve que $2^{2^n}+1$ est premier avec chacun d'eux, car un diviseur commun diviserait 2.

<u>*Solution de l'exercice 38*</u> Soit $p = 2q+1$ un facteur premier impair de a^2+b^2. $a^2 \equiv -b^2 \pmod p$, donc $a^{2q} \equiv (-1)^q.b^{2q} \pmod p$. Par ailleurs, si a ou b était divisible par p, $a^2 \equiv -b^2 \pmod p$ impliquerait que l'autre est aussi divisible par p, les deux nombres ne seraient pas premiers entre eux. Comme a et b sont premiers avec p, $a^{p-1} \equiv 1 \equiv b^{p-1} \pmod p$, et comme $p-1 = 2q$, $(-1)^q = 1$ donc q est pair : $q = 2k$ donc $p = 4k+1$.

Ce résultat se généralise par récurrence. Supposons que, pour a et b premiers entre eux, tous les facteurs premiers impairs de $a^{2^n}+b^{2^n}$ soient de la forme $2^{n+1}k+1$: on vient de le démontrer pour $n=1$. Un facteur premier impair de $a^{2^{n+1}}+b^{2^{n+1}} = \left(a^2\right)^{2^n}+\left(b^2\right)^{2^n}$ s'écrit lui aussi sous la forme $2^{n+1}k+1$. Par ailleurs, puisque $a^{2^{n+1}} \equiv -b^{2^{n+1}} \pmod p$, $a^{2^{n+1}k} \equiv (-1)^k b^{2^{n+1}k} \pmod p$: comme $2^{n+1}k = p-1$ et que $a^{p-1} \equiv 1 \equiv b^{p-1} \pmod p$, k est nécessairement pair, ce qui achéve la démonstration.

Dés lors, s'il existait un nombre fini de nombres premiers de la forme $2^n k+1$, soit P le produit de tous ces nombres. $(2P)^{2^{n-1}}+1$ est impair et premier avec P. Or tous ses facteurs premiers sont de la forme $2^n k+1$, ce qui prouve qu'il existe des nombres premiers de cette forme qui ne sont pas dans le produit P : contradiction.

D'une maniére générale, on peut prouver, mais par une méthode trés différente, que si a et b sont premiers entre eux, il existe une infinité de nombres premiers de la forme $ak+b$. Mais on ne connaît pas d'autre résultat de ce type : par exemple, on ne sait pas s'il existe une infinité de nombres premiers de la forme n^2+1 bien que ce soit hautement vraisemblable.

Le cas $2^{2^k}+1$ est intéressant historiquement : au XVIIe siécle, on s'est demandé à quelle condition 2^n-1 ou 2^n+1 était premier. Si $n = pq$, 2^n-1 est divisible par 2^q-1, donc 2^n-1 ne peut être premier que si n est lui-même premier. Quant à 2^n+1, il est divisible par 2^q+1 si $n = pq$ avec p impair. Il ne peut être premier que si tous les diviseurs de n sont pairs, donc si n est une puissance de 2. Si n est premier ou même seulement impair, 2^n+1 est divisible par 3.

Mersenne avait émis l'hypothése que pour tout nombre premier p, 2^p-1 était premier, et Fermat, que pour toute puissance de 2 : $n = 2^k$, $2^{2^k}+1$ était premier. Toutes les conjectures de ce type sur les nombres premiers sont fausses, et concernant Fermat, c'est la seule conjecture fausse qu'il nous ait laissée. Déjà $2^{11}-1 = 23 \times 89$ est non premier, et on n'a trouvé pour l'instant que 47 nombres premiers de Mersenne parmi des millions de nombres testés. Il demeure toutefois probable qu'il existe une infinité de nombres premiers de Mersenne. Quant aux nombres de Fermat, ils sont premiers jusqu'à $2^{16}+1$, mais il se peut qu'il n'en existe pas d'autre : on n'en connaît aucun qui soit premier pour $k \geqslant 5$. C'est Euler qui, en 1732, a trouvé la premiére exception : $2^{32}+1$ est divisible par 641. Il connaissait la démonstration ci-dessus, prouvant que les facteurs premiers de $2^{32}+1$ étaient impérativement de la forme $64k+1$, il n'avait donc pas beaucoup d'essais à faire avant d'atteindre 641. Mais il existe une démonstration élégante qui ne nécessite aucun calcul. $641 = 5^4+2^4$ divise $2^{28}\left(5^4+2^4\right)$. Par ailleurs, $641 = \left(5 \times 2^7\right)+1$ divise $5^4 \times 2^{28}-1$ car a^4-1 est toujours divisible par $a-1$ et $a+1$. Il divise donc la différence de ces deux nombres, à savoir $2^{32}+1$.

<u>*Solution de l'exercice 39*</u> a) Il est clair que p n'apparaît pas au dénominateur de S_{p-1} que l'on notera : $\frac{c}{b}$, car les dénominateurs des termes additionnés, tous strictement plus petits que p, sont tous premiers avec p. Donc $S_p = \frac{c}{b}+\frac{1}{p} = \frac{cp+b}{bp}$, et comme b n'est pas multiple de p, cette fraction ne peut pas se simplifier par p, son dénominateur est obligatoirement multiple de p.

b) Avec la notation précédente, $a-b = cp$ est au moins multiple de p. c est le numérateur de S_{p-1}. Or pour p premier impair, on peut regrouper deux par deux les termes de $S_{p-1} =$

$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{p-1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p-2}\right)+...+\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{p-k}\right)+...=\left(\frac{p}{1\times(p-1)}\right)+\left(\frac{p}{2\times(p-2)}\right)+...+\left(\frac{p}{k\times(p-k)}\right)+...=$ $p\times\left(\frac{1}{1(p-1)}+...+\frac{1}{k(p-k)}+...\right)$. Donc S_{p-1} a un numérateur divisible par p, ce qui signifie que $a-b$ est divisible par p^2.

A partir de $p=5$, $a-b$ est même divisible par p^3. Pour le prouver, il faut montrer que le numérateur de $\left(\frac{1}{1(p-1)}+...+\frac{1}{k(p-k)}+...\right)$ est lui aussi multiple de p. Soit D le dénominateur commun de cette somme : D est premier avec p. Pour tout k compris entre 1 et $p-1$, il existe un et un seul i_k tel que $k\times i_k\equiv 1 \pmod p$. Après réduction au même dénominateur D, le numérateur de $\frac{1}{k(p-k)}$ vaut : $\frac{D}{k(p-k)}\equiv -Di_k^2 \pmod p$ car $k(p-k)i_k^2\equiv -1 \pmod p$. La somme des numérateurs est donc congrue, modulo p, à : $-D\Sigma i_k^2$, et la somme Σi_k^2 des résidus quadratiques est divisible par p dès lors que $p\geqslant 5$. En effet, on remarque que les i_k constituent une permutation des entiers de 1 à $p-1$, car chacun de ces entiers y apparaît une et une seule fois : à deux k distincts correspondent deux i_k distincts. Qui plus est, si l'on multiplie par un même j^2 tous ces résidus, on obtient les mêmes résidus à nouveau permutés, car $j^2i_k^2=(ji_k)^2$ est un résidu et à deux i_k distincts correspondent deux ji_k distincts modulo p. Donc $\Sigma i_k^2=j^2\Sigma i_k^2$. Dès lors qu'il existe un $j\not\equiv 0 \pmod p$ vérifiant $j^2\not\equiv 1 \pmod p$, cela suffit à prouver que $\Sigma i_k^2\equiv 0 \pmod p$. Mais cela exclut $p=2$ et $p=3$.

Solution de l'exercice 40 La méthode qui s'impose est la démonstration par récurrence sur n, en explicitant les ensembles A_n et B_n pour chaque n. On supposera donc que pour un n donné, il existe deux ensembles A_n et B_n ayant le même nombre d'éléments, vérifiant pour tout k compris entre 1 et $n-1$, $\sum_{a_i\in A_n}(a_i)^k=\sum_{b_i\in B_n}(b_i)^k$. C'est vrai pour $n=2$: il suffit de poser $A_2=\{1,4\}$ et $B_2=\{2,3\}$, car $1+4=2+3$. Construisons $A_{n+1}=A_n\cup(B_n+2^n)$ et $B_{n+1}=(A_n+2^n)\cup B_n$, A_n+2^n désignant l'ensemble obtenu en ajoutant 2^n à chaque élément de A_n. Par exemple, $A_3=\{1,4\}\cup\{6,7\}$ et $B_3=\{5,8\}\cup\{2,3\}$. Il est clair que si A_n et B_n ont chacun 2^{n-1} éléments, et si leur réunion vaut $\{1,2,...,2^n\}$, A_{n+1} et B_{n+1} ont chacun 2^n éléments et leur réunion vaut $\{1,2,...,2^{n+1}\}$. En outre, la somme des puissances k-ièmes des éléments de A_{n+1} vaut : $\Sigma a_i^k+\Sigma\left(2^n+b_i\right)^k=\Sigma a_i^k+\Sigma b_i^k+k.2^n\Sigma b_i^{k-1}+\frac{k(k-1)}{2}2^{2n}\Sigma b_i^{k-2}+....$ Si pour $k=1,2,...n-1$ $\Sigma a_i^k=\Sigma b_i^k$, cette somme est manifestement égale, pour $k=1,2,...n$, à la somme des puissances k-ièmes des éléments de B_{n+1}. On gagne une valeur de k car pour l'exposant k, le terme $\Sigma a_i^k+\Sigma b_i^k$ est identique dans les deux sommes sans aucune hypothèse.

Solution de l'exercice 41 Si ab^2+b+7 divise a^2+a+b, il divise également $a\left(ab^2+b+7\right)-b\left(a^2b+a+b\right)=7a-b^2$. Donc $\mid 7a-b^2\mid\geqslant ab^2+b+7$

Soit $7a<b^2$, ce qui entraîne $\mid 7a-b^2\mid<b^2$ alors que ab^2+b+7 ne peut pas être inférieur à b^2 puisque, par hypothèse, a est non nul : pas de solution.

Soit $7a=b^2$, donc b est multiple de 7 : si l'on pose $b=7k$, on voit que tous les couples $\left(7k^2,7k\right)$ sont solutions.

Soit $7a>b^2$. $ab^2+b+7<7a$ n'est possible que si $b^2<7$, d'où deux possibilités :

$b=1$, et $a+8$ doit diviser $7a-1$, donc $(7a-1)-7(a+8)=-57=-3\times 19$, soit $a+8=19$ ou $a+8=57$: on vérifie que les couples $(11,1)$ et $(49,1)$ sont tous deux solutions du problème initial.

$b=2$, et $4a+9$ doit diviser $7a-4$, donc $4(7a-4)-7(4a+9)=-79$. Comme 79 est un nombre premier, on doit avoir $4a+9=79$, ce qui n'a pas de solution entière.

Les seules solutions du problème sont donc les couples $(11,1),(49,1)$ et $\left(7k^2,7k\right)$ pour tout entier $k\geqslant 1$.

Solution de l'exercice 42 Cherchons les nombres premiers qui ne divisent aucun des $2^n+3^n+6^n-1$ pour n entier naturel.

2 n'en fait pas partie, car il divise $2+3+6-1$ (et même $2^0+3^0+6^0-1$).

3 non plus, car il divise 2^2-1, donc également $2^2+3^2+6^2-1$.

Soit $p \geqslant 5$ premier. $2,3$ et 6 étant premiers avec p, $2^{p-1} \equiv 3^{p-1} \equiv 6^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. $6\left(2^{p-2}+3^{p-2}+6^{p-2}-1\right) = \left(3 \times 2^{p-1}\right) + \left(2 \times 3^{p-1}\right) + 6^{p-1} - 6 \equiv 3+2+1-6 \equiv 0 \pmod p$. Donc p divise $6\left(2^{p-2}+3^{p-2}+6^{p-2}-1\right)$, et comme p est premier avec 6, p divise $2^{p-2}+3^{p-2}+6^{p-2}-1$.

Il n'existe pas de nombre premier qui ne divise aucun des $2^n+3^n+6^n-1$, donc le seul entier qui soit premier avec tous les nombres de cette forme est 1.

Remarque : on peut même écrire $2^{p-2}+3^{p-2}+6^{p-2}-1 \equiv \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-1 \equiv 0 \pmod p$, ce qui rend la démonstration moins artificielle. Dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on peut calculer $\frac{a}{b}$: c'est l'élément de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ qui, multiplié par b, est congru à a, et l'addition de telles "fractions" peut se faire de la même manière que dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels. La méthode proposée plus haut revient à additionner les numérateurs de ces "fractions".

G. Les TND

Les exercices suivants sont classés par thème, et par ordre de difficulté croissante.

1 Exercices d'acclimatation non corrigés

Exercice 1 Est-ce qu'une table 75×75 peut être pavée par des dominos (rectangles 1×2) et des croix (figures consistuées d'un carreau et de ses quatre voisins) ?

Exercice 2 Soit $ABCDE$ un pentagone régulier tel que l'aire de l'étoile $ACEBD$ est 1. Soit P le point d'intersection de (AC) and (BE), et soit Q le point d'intersection de (BD) et (CE). Déterminer l'aire de $APQD$.

Exercice 3 Montrez qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $f(x + f(y)) = f(x) - y$ pour tous entiers x et y.

Exercice 4 Soit $n > 1$ un nombre entier. On dénote par $\sigma(n)$ et $\tau(n)$ la somme et le nombre de diviseurs de n (y compris 1 et n) respectivement. Montrez que les inégalités suivantes

$$\tau(n) \cdot \sqrt{n} < \sigma(n) < \sqrt{2\tau(n)} \cdot n$$

sont satisfaites pour tout $n > 1$.

Exercice 5 Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle et soit X l'intersection des diagonales $[AC]$ et $[BD]$. Les perpendiculaires abaissées de X sur chacun des côtés rencontrent les côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ respectivement aux points A', B', C' et D'. Démontrer que

$$|A'B'| + |C'D'| = |A'D'| + |B'C'|.$$

($|A'B'|$ est la longueur du segment $A'B'$, etc.)

Exercice 6 2n + 1 segments sont placés sur une droite. Chaque segment intersecte au moins n autres segments. Prouvez que l'un des segments intersecte tous les autres.

Exercice 7 Soient $x_1, x_2, \ldots$ et $y_1, y_2, \ldots$ deux suites définies de manière récursive :

$$x_1 = y_1 = \sqrt{3}, \quad x_{n+1} = x_n + \sqrt{1 + x_n^2}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + \sqrt{1 + y_n^2}}$$

pour tout $n \geqslant 1$. Prouver que $2 < x_n y_n < 3$ pout tout $n > 1$.

Exercice 8 Soit ABC un triangle dont les trois angles sont aigus et soit H son orthocentre. Les tangentes au cercle de diamètre BC issues du point A touchent le cercle aux points P et Q. Montrez que P, Q et H sont colinéaires.

Exercice 9 Dans une classe chaque garçon est ami avec au moins une fille. Montrez qu'il existe un groupe constitué d'au moins une moitié d'élèves tel que chaque garçon dans ce groupe est ami avec un nombre impair de filles.

Exercice 10 Est-ce qu'il existe trois entiers $a, b, c > 1$ premiers entre eux tels que b divise $2^a + 1$, c divise $2^b + 1$ et a divise $2^c + 1$?

2 Les énoncés

2.1 Stratégies de base

Exercice 1 On considère la suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ définie par $a_1 = 1$ et

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{n}{a_n}$$

pour tout entier $n \geqslant 1$. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 4$, on a $[a_n^2] = n$ (où $[x]$ désigne la partie entière de x).

Exercice 2 Sur un échiquier rectangulaire de taille 5×9, on joue au jeu suivant. Au départ, un certain de poins sont répartis sur l'échiquier, au plus un par case. Un tour consiste à déplacer tous les pions selon les règles suivantes :
(i) chaque point peut-être déplacé soit d'une case vers la gauche, vers la droite, vers le haut ou vers le bas
(ii) si un pion a été déplace horizontalement au tour précédent, il doit être déplacé verticalement ce tour-ci et vice versa
(iii) à la fin de tous les déplacements, aucune case ne doit contenir plusieurs pions.
Le jeu s'arrête s'il devient impossible de déplacer les pions en respectant les règles précédentes. Montrer que s'il y a 33 pions, le jeu s'arrête forcément au bout d'un nombre fini de tours, alors que ce n'est pas le cas s'il n'y en a que 32.

2.2 Arithmétique

Exercice 3 Trouver toutes les solutions de l'équation :

$$2^x + 3^y = z^2,$$

où x, y, z sont des entiers naturels.

Exercice 4

1. Trouver tous les entiers naturels non nuls n tels que :
$$(n-1)!+1=n^2.$$
2. Trouver tous les nombres premiers p tels qu'il existe un entier naturel m de sorte que :
$$(p-1)!+1=p^m.$$

Exercice 5 Montrer que pour tout entier $n>0$ le nombre :
$$A_n=\prod_{k=0}^{n-1}(2^n-2^k)$$
est divisible par $n!$.

2.3 Chasse au trésor

Résultats applaudis de la chasse au trésor !

Principe : 9 énigmes étaient cachées dans le domaine du château de Grésillon (forêt et batîments). A l'aide d'un plan, il s'agissait de trouver toutes les énigmes pour résoudre tous les exercices le plus rapidement possible avec réponse et démonstrations correctes. Ramener une énigme et y répondre donnait droit à l'énoncé d'un exercice. La solution de l'exercice donnait un nombre correspondant aux coordonnées de l'emplacement de l'énigme suivante. Ainsi de suite !

Énigme numéro 1. Qui a réussi à démontrer le grand théorème de Fermat ?

Exercice 6 Xavier a caché quelques entiers distincts. Il n'accepte de donner que leurs sommes deux à deux : 17, 20, 28, 14, 42, 36, 28, 39, 25 et 31. Retrouvez-les, puis allez chercher une nouvelle énigme aux coordonnées correspondant aux trois premiers chiffres du produit de ces nombres ?

Énigme numéro 2. Qui a énoncé la conjecture suivante : « Tout objet de dim n qui a les mêmes caractéristiques qu'une sphère est une sphère » ?

Exercice 7 Soit $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ la fonction suivante :
$$f(n)=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1}\frac{2^i}{i}}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{k}^{-1}}.$$

Allez chercher une nouvelle énigme aux coordonnées correspondant aux deux derniers chiffres de la partie entière de $f(31)$.

Énigme numéro 3. Citer un nom de mathématicien médaillé Fields encore en activité.

Exercice 8 Les longueurs des deux côtés adjacents et de la diagonale d'un rectangle sont des entiers. Allez chercher une nouvelle énigme aux coordonnées correspondant à l'aire minimale d'un tel rectangle.

Énigme numéro 4. Quelle est la périodicité de nomination pour la médaille Fields ?

Exercice 9 Allez chercher une nouvelle énigme aux coordonnées correspondant aux trois premiers chiffres de la plus grande valeur possible de $p^2 + q^2$ où p, q sont des nombres premiers tels que :

$$\alpha^{3pq} \equiv \alpha \mod 3pq$$

pour tout entier naturel α.

Énigme numéro 5. Citer un des « pères » de l'ordinateur.

Exercice 10 Allez chercher une nouvelle énigme aux coordonnées correspondant aux trois derniers chiffres de la plus grande valeur entière que peut prendre l'expression

$$\frac{29 \div 28 \div 27 \div \cdots \div 16}{15 \div 14 \div 13 \div \cdots \div 2}$$

lorsqu'on place des parenthèses de la même façon au numérateur qu'au dénominateur.

Énigme numéro 6. Quel est l'âge limite pour être médaillé Fields ?

Exercice 11 Allez chercher une nouvelle énigme aux coordonnées correspondant à la somme des $x^4 + y^4$, où x, y sont des entiers relatifs satisfaisant à :

$$x^6 + x^3 y = y^3 + 2y^2.$$

Énigme numéro 7. Donner un exemple d'application des mathématiques ?

Exercice 12 L'entier A possède la propriété suivante : l'écriture décimale de la somme des entiers compris au sens large entre 1 et A est égale à celle de A à laquelle on concatène trois autres chiffres. Allez chercher une nouvelle énigme aux coordonnées correspondant aux trois premiers chiffres de A.

Énigme numéro 8. De quelle nationalité est le mathématicien Ramanudjan ?

Exercice 13 Soit P^* l'ensemble des nombres premiers plus petits que 10000. Allez chercher une nouvelle énigme aux coordonnées correspondant au plus grand $p \in P^*$ modulo 825 pour lequel la propriété suivante est vérifiée :

Pour tout sous-ensemble S de P^* de cardinal au moins 2 et ne contenant pas p, il existe $q \in P^* \backslash S$ tel que :

$$q + 1 \mid \prod_{s \in S} (s + 1).$$

Énigme numéro 9. Citer une mathématicienne.

Exercice 14 Allez chercher une nouvelle énigme aux coordonnées correspondant au trois premiers chiffres du nombre de quadruplets d'entiers (x, y, z, w) compris au sens large entre 0 et 36 tels que :

$$x^2 + y^2 \equiv z^3 + w^3 \pmod{37}.$$

3 Les solutions

3.1 Stratégies de base

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Posons $u_n = a_n^2$. On a $u_{n+1} = \frac{u_n}{n^2} + \frac{n^2}{u_n} + 2 = f_n(u_n)$. Remarquons tout de suite que la fonction f_n est décroissante sur l'intervalle $]0, n^2]$.

Soit $n \geqslant 5$. Nous allons montrer que de $u_{n-1} < n$, on peut déduire $u_n > n$ et $u_{n+1} < n + 2$. La première assertion résulte de

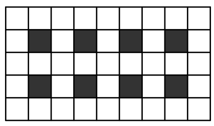
$$u_n = f_{n-1}(u_{n-1}) \geqslant f_{n-1}(n) = \frac{n}{(n-1)^2} + \frac{(n-1)^2}{n} + 2 > \frac{1}{n} + n - 2 + \frac{1}{n} + 2 = n + \frac{2}{n}$$

d'où il suit directement $u_n > n$ comme voulu. Maintenant, en reprenant $u_n > n + \frac{1}{n}$, on obtient

$$u_{n+1} = f_n(u_n) \leqslant f_n(n+\frac{2}{n}) = \frac{n^3}{n^2+2} + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^3} + 2 = n+2-\frac{n^2-2}{n(n^2+2)}) + \frac{2}{n^3} < n+2+\frac{n^2}{n^3} < n+2.$$

On vérifie par le calcul que $[u_4] = 4$ et $[u_5] = 5$. Une récurrence à partir de l'implication que l'on vient de prouver montre que $u_n < n + 1$ pour tout $n \geqslant 4$. Une nouvelle utilisation de l'implication entraîne alors $u_n > n$ pour tout $n \geqslant 5$, d'où il suit $[u_n] = n$ pour tout $n \geqslant 5$.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Si l'on noircit certaines cases de l'échiquier comme suit



on se rend compte que, tant que le jeu se poursuit, chaque pion passe exactement un tour sur quatre sur une case noircie. Ainsi, il ne peut pas y avoir plus de quatre fois plus de poins qu'il n'y a de cases. On compte : il y a 8 cases, donc au maximum 32 pions.

Pour 32 pions, une solution consiste à les placer initialement dans le rectangle 4×8 en haut à gauche, puis à déplacer tous les poins d'abord vers la droite, puis vers le bas, puis vers la gauche, puis vers le haut, et ainsi de suite.

3.2 Arithmétique

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Soit (x, y, z) une solution. Traitons d'abord le cas $y = 0$. Alors :

$$2^x = z^2 - 1 = (z-1)(z+1).$$

Cela implique que $z - 1$ et $z + 1$ sont tous les deux des puissances de 2. Or les seules puissances de 2 de différence égale à deux sont 4 et 2. Donc $z = 3$, puis $x = 3$. Réciproquement, $(3, 0, 3)$ est bien une solution.

Le cas où $x = 0$ se traite de la même manière et fournit la solution $(0, 1, 2)$.

Supposons dorénavant que $x > 0$ et $y > 0$. En regardant modulo 3 l'équation, il vient que x est pair car il n'existe pas de carré congru à 2 modulo 3. Écrivons $x = 2x'$, de sorte que :

$$3^y = z^2 - 2^{2x'} = (z - 2^x)(z + 2^x).$$

Il existe donc deux entiers $a \leqslant b$ de somme y tels que $z - 2^{x'} = 3^a$ et $z + 2^{x'} = 3^b$. En ré-injectant la première de ces égalités dans l'identité initiale, il vient :

$$2^{2x'} + 3^{a+b} = (3^a + 2^{x'})^2,$$

ou encore, après simplifications :

$$3^b = 3^a + 2^{x'+1}.$$

Modulo 3, ceci fournit $a = 0$. Ensuite, comme $x' \geqslant 1$, modulo 4 cela entraîne que b est pair. Écrivons donc $b = 2b'$:

$$2^{x'+1} = 3^{2b'} - 1 = (3^{b'} - 1)(3^{b'} + 1).$$

Comme précédemment, on en tire $b' = 1$. Finalement, $b = 2$, $y = 2$; $x' = 2$, $x = 4$; $z = 5$. Réciproquement, $(4, 2, 5)$ est bien solution.

En conclusion, les seules solutions sont $(3, 0, 3)$, $(0, 1, 2)$ et $(4, 2, 5)$.

Solution de l'exercice 4

1. Pour $n \geqslant 2$ l'équation est équivalente à :

$$(n - 2)! = n + 1.$$

Parmi les entiers $n \leqslant 6$, on vérifie par le calcul que seul $n = 5$ est solution. Il semblerait que $(n-2)!$ croisse beaucoup plus vite que $n+1$, ce que nous allons maintenant démontrer. Soit P_n la proposition :

« $(n - 2)! > n + 1$ ».

Montrons par récurrence sur l'entier n que P_n est vraie pour $n \geqslant 6$.

(i) (Initialisation) Nous avons vu que P_6 est vérifiée.

(ii) (Hérédité) Soit $n \geqslant 6$. Supposons que P_n est vraie et montrons P_{n+1}. D'après l'hypothèse de récurrence :

$$(n - 1)! = (n - 1)(n - 2)! \geqslant (n - 1)(n + 1)$$

Il suffit donc de montrer que $(n - 1)(n + 1) \geqslant (n + 2)$, ou encore que

$$(n - 1/2)^2 - 13/4 = n^2 - n - 3 \geqslant 0,$$

ce qui est vérifié pour $n \geqslant 6$.

2. Il est clair que $p = 2$, $p = 3$ et $p = 5$ conviennent (prendre $m = 1$, $m = 1$ et $m = 2$). Supposons donc que $p \geqslant 5$ soit un nombre premier impair vérifiant les conditions de l'énoncé. Ainsi :

$$(p - 2)! = p^{m-1} + \cdots + p + 1.$$

Comme $p > 5$ est impair, le terme de droite est divisible par $p - 1$. De plus, chaque terme intervenant dans la somme de droite est congru à 1 modulo $p-1$. Modulo $p-1$, cette égalité entraîne que $p - 1$ divise m et donc que $m \geqslant p - 1$. En définitive :

$$p^m \geqslant p^{p-1} > (p - 1)^{p-1} > (p - 1)!,$$

ce qui est absurde. Ainsi, seuls $p = 2, 3, 5$ conviennent.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> On vérifie que 2! divise $A_2 = 6$. Supposons donc $n \geqslant 3$. Soit p un nombre premier divisant n. Nous allons montrer que la valuation p-adique $v_p(n!)$ est inférieure à $v_p(A_n)$.

D'une part, d'après la formule de Legendre, pour tout entier k :

$$\begin{aligned} v_p(n!) &\leqslant \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor. \\ &\leqslant \frac{n}{p} + \cdots + \frac{n}{p^2} + \cdots + \frac{n}{p^k} \\ &= \frac{n}{p} \cdot \frac{1 - \frac{1}{p^k}}{1 - \frac{1}{p}} \\ &\leqslant \frac{n}{p} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \\ &\leqslant \frac{n}{p-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, $v_p(n!) \leqslant \left\lfloor \frac{n}{p-1} \right\rfloor$.

Traitons d'abord le cas $p = 2$ à part. Comme :

$$A_n = \prod_{k=0}^{n-1} 2^k \prod_{k=0}^{n-1} (2^{n-k} - 1),$$

on a $v_2(A_n) = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Or pour $n \geqslant 3$, on a :

$$v_2(n!) \leqslant n \leqslant \frac{n(n-1)}{2} = v_2(A_n),$$

d'où le résultat.

Ensuite, dans le cas général, écrivons :

$$A_n = \prod_{k=0}^{n-1} 2^k \prod_{k=1}^{n} (2^{n-k} - 1).$$

D'après le petit théorème de Fermat, p divise $2^{(p-1)} - 1$, et donc $2^{k(p-1)} - 1$ pour tout entier $k > 0$. Or le nombre d'entiers $k > 0$ tels que $k(p-1) \leqslant n$ est exactement égal à $\left\lfloor \frac{n}{p-1} \right\rfloor$. Nous venons donc d'obtenir que :

$$v_p(n!) \leqslant \left\lfloor \frac{n}{p-1} \right\rfloor \leqslant v_p(A_n),$$

ce qui conclut la résolution de l'exercice.

Fin

3.3 Chasse au trésor

Solution de l'énigme 1 : Andrew Wiles.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> Soient $a > b > c > d > e$ les cinq nombres cachés. Dans la liste des sommes deux à deux, ils interviennent chacun 4 fois, d'où, en sommant :

$$a + b + c + d + e = \frac{17 + 20 + 28 + 14 + 42 + 36 + 28 + 39 + 25 + 31}{4} = 70.$$

D'autre part, $a+b=42$ et $d+e=14$, donc $c=70-42-14=14$. De plus, $a+c$ est la deuxième plus grande somme, donc $a=39-14=25$, et de même $e=17-14=3$. Mais alors $b=42-25=17$ et $d=14-3=11$. Réciproquement, on vérifie facilement que ces nombres donnent bien les sommes annoncées.

Solution de l'énigme 2 : Henri Poincaré.

Solution de l'exercice 7 Le calcul des petites valeurs de $f(n)$ nous permet de conjecturer que $f(n)=\frac{2^n}{n+1}$. Notons ainsi :

$$S_n=\frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{2^i}{i},\quad T_n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^{-1}.$$

On vérifie que S_n satisfait à la relation de récurrence :

$$2(n+1)S_{n+1}=(n+2)S_n+2(n+1).$$

Comme $S_1=T_1=2$, il suffit donc de montrer que T_n vérifie la même relation de récurrence. Or :

$$\begin{aligned}2(n+1)T_{n+1} &- (n+2)T_n-2(n+1)=(2n+2)\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}^{-1}-(n+1)\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^{-1}-(2n+2)\\ &= (2n+2)+\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{2(i)!(n+1-i)!}{n!}-(n+2)\frac{i!(n-i)!}{n!}\right)-(2n+2)\\ &= \sum_{i=0}^{n}\frac{i!(n-i)!}{n!}(n-2i)=\sum_{i'=0}^{n}\frac{i'!(n-i')!}{n!}(2i'-n).\end{aligned}$$

Cette somme est égale à son opposée et est donc nulle.

Solution de l'énigme 3 : Terence Tao, Pierre-Louis Lions, Alain Connes, Jean-Christophe Yoccoz, etc.

Solution de l'exercice 8 Soit a la longueur du rectangle, b sa largeur et c la longueur de ses diagonales. Le triplet d'entiers (a,b,c) vérifie donc $a^2+b^2=c^2$, autrement dit est pythagoricien. Il existe donc des entiers p,q,k avec p,q premiers entre eux tels que :

$$a=k(p^2-q^2),\qquad b=2kpq,\qquad c=k(p^2+q^2).$$

L'aire d'un tel rectangle est alors $2k^2(p-q)(p+q)pq$, qui est minimale pour $k=1$, $p=2$ et $q=1$. La réponse cherche vaut donc 12.

Solution de l'énigme 4 : 4 ans.

Solution de l'exercice 9 Par symétrie des rôles, on peut supposer $p\leqslant q$. On a $2^{3pq}\equiv 2 \pmod 3$, ce qui implique que p et q sont impairs (sinon 2^{3pq} serait congru à 1). Comme q est premier, on a $x^{3pq-1}\equiv 1 \pmod q$. Rappelons le résultat suivant[1] : il existe un entier x tel que pour tout n, on ait :

$$x^n\equiv 1 \pmod q \iff n \text{ est multiple de } q-1.$$

D'après ce résultat et la congruence précédente, on déduit que $q-1$ divise $3pq-1$. En outre, $3pq-1-3p(q-1)=3p-1$, donc $q-1$ divise $3p-1$, et de même, $p-1$ divise $3q-1$. Supposons

[1] On dit alors que x est d'ordre $q-1$. Le fait qu'un tel x existe n'est pas une évidence, mais c'est malgré tout un résultat à connaître.

que $p = q$. Dans ce cas, $p - 1$ divise $3p - 1$, or $3p - 1 - 3(p - 1) = 2$ donc $p - 1$ divise 2, d'où $p = q = 3$. Mais $4^{27} \equiv 1 \pmod{27}$, donc $(3, 3)$ n'est pas solution. On a alors $p \neq q$.

Quitte à échanger p et q, on peut supposer $p < q$. Alors, comme p et q sont impairs, on a $q \geqslant p+2$, et donc l'entier $\frac{3p-1}{q-1}$ est strictement inférieur à 3. De plus, il est clairement différent de 1, et est donc égal à 2, c'est-à-dire que $2q = 3p+1$. Or, $p-1$ divise $3q-1$, donc aussi $6q-2 = 9p+1$ puis $(9p+1)-9(p-1) = 10$. Il reste les deux possibilités $(3, 5)$ et $(11, 17)$. Mais $3^{45} \equiv 0 \pmod{45}$ donc $(3, 5)$ n'est pas solution du problème.

Enfin, montrons que $(11, 17)$ est solution. D'après le théorème chinois, il suffit de démontrer que $x^{3\times11\times17} \equiv x \pmod 3$, $x^{3\times11\times17} \equiv x \pmod{11}$ et $x^{3\times11\times17} \equiv x \pmod{17}$. On a $3\times11\times17 \equiv 1 \pmod 2$; pour $x \not\equiv 0 \pmod 3$, on a $x^2 \equiv 1 \pmod 3$ donc $x^{3\times11\times17} \equiv x \pmod 3$, et ceci est encore vrai pour $x \equiv 0 \pmod 3$. De même, on a $3 \times 11 \times 17 \equiv 1 \pmod{10}$, $x^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ pour $x \not\equiv 0 \pmod{11}$, donc $x^{3\times11\times17} \equiv x \pmod{11}$ et $3\times11\times17 \equiv 1 \pmod{16}$, $x^{16} \equiv 1 \pmod{17}$ pour $x \not\equiv 0 \pmod{17}$, donc $x^{3\times11\times17} \equiv x \pmod{17}$, ce qui conclut : les solutions sont les couples $(11, 17)$ et $(17, 11)$.

Le maximum demandé est donc $11^2 + 17^2 = 410$.

Remarque. Les entiers n composés vérifiant $x^n \equiv x \pmod n$ pour tout n sont appelés les nombres de Carmichael. Celui de l'exercice $3 \times 11 \times 17 = 561$ est le plus petit et le plus connu, et comme on vient de le montrer c'est le seul de la forme $3pq$ avec p et q premiers. On sait aujourd'hui qu'il existe une infinité de nombres de Carmichael.

Solution de l'énigme 5 : Turing, Von Neumann.

<u>*Solution de l'exercice 10*</u> Une fois parenthésée, l'expression s'écrit

$$x = \left(\frac{29}{15}\right)^{\varepsilon_1}\left(\frac{28}{14}\right)^{\varepsilon_2}\left(\frac{27}{13}\right)^{\varepsilon_3}\cdots\left(\frac{16}{2}\right)^{\varepsilon_{14}}$$

où les ε_i valent 1 ou -1 et même $\varepsilon_1 = 1$ et $\varepsilon_2 = -1$. Comme les fractions $\frac{27}{13}, \dots, \frac{16}{2}$ sont toutes plus grandes que 1, on a nécessairement

$$x \leqslant \left(\frac{29}{15}\right)\left(\frac{14}{28}\right)^{\varepsilon_2}\left(\frac{27}{13}\right)^{\varepsilon_3}\cdots\left(\frac{16}{2}\right)^{\varepsilon_{14}} = 1\,292\,646.$$

Par ailleurs, comme le résultat de l'opération donne un entier, cette borne supérieure est atteinte. La réponse est donc 1 292 646.

Solution de l'énigme 6 : 40 ans.

<u>*Solution de l'exercice 11*</u> Montrons que les seules solutions sont $(0, 0)$, $(0, -2)$ et $(2, 4)$. Si $x = 0$, on démontre facilement que $y = 0$ ou $y = -2$. De même, si $y = 0$, il vient $x = 0$. Supposons à partir de maintenant que ni x ni y n'est nul.

Soit p un nombre premier divisant y. Supposons dans un premier temps $p > 2$. En réécrivant l'équation sous la forme $x^3(x^3 + y) = y^2(y + 2)$ puis en prenant les valuations p-adiques de deux côtés, on obtient

$$3v_p(x) + v_p(x^3 + y) = 2v_p(y). \tag{G.1}$$

puisque p ne divise pas $y+2$ (sinon il diviserait 2). Si $3v_p(x) < v_p(y)$, on aurait $v_p(x^3+y) = 3v_p(x)$, puis $3v_p(x) = v_p(y)$ en reportant dans G.1. C'est une contradiction. De même si $3v_p(x) > v_p(y)$, il suit $v_p(x^3 + y) = v_p(y)$ puis $3v_p(x) = v_p(y)$, c'est-à-dire encore une contradiction. On en déduit que, nécessairement, $3v_p(x) = v_p(y)$. Si $p = 2$ et $v_2(y) > 1$, un raisonnement ananlogue conduit encore à $3v_2(x) = v_2(y)$. On déduit de tout cela qu'il existe des entiers a et b tels que le couple (x, y) soit de l'un des trois formes suivantes : $(ab, 2b^3)$, (ab, b^3), $(ab, \frac{b^3}{2})$.

On reporte maintenant chacune des formes précédentes dans l'équation de départ. Dans le premier cas, on obtient $a^6 + 2a^3 = 8b^3 + 8$. Si $a > 1$, alors $(a^2 + 1)^3 > (2b)^3 > (a^2)^3$ et donc l'équation n'a pas de solution. De même, si $a < -2$, on a $(a^2)^3 > (2b)^3 > (a^2 - 1)^3$ et il n'y a à nouveau pas de solution. Enfin, on traite les cas $a = -2, -1, 0$ à la main et on ne trouve pas non plus de solution.

Les deuxième et troisième cas se traitent de façon analogue : pour le deuxième cas, on ne trouve encore pas de solution tandis que pour le troisième, on obtient la seule solution $(2, 4)$.

Solution de l'énigme 7 : Cryptographie, biologie, *etc.*

<u>*Solution de l'exercice 12*</u> Traduit sous forme mathématique, l'énoncé dit qu'il existe un entier B tel que $0 \leqslant B < 1000$ et

$$1 + 2 + \cdots + A = \frac{A(A+1)}{2} = 1000A + B.$$

La dernière égalité se réécrit $A(A - 1999) = 2B$. La contrainte d'inégalité sur B montre que la seule solution est $A = 1999$.

Solution de l'énigme 8 : Indien.

<u>*Solution de l'exercice 13*</u> Nous allons montrer que p vérifie la propriété si, et seulement s'il est de la forme $M_n = 2^n - 1$: on dit alors que p est un *nombre premier de Mersenne.* Notons T l'ensemble des nombres premiers de Mersenne dans P^* ; un calcul direct montre que $T = \{3, 7, 31, 127, 8191\}$.

Supposons d'abord que p n'est pas un nombre premier de Mersenne. Nous allons montrer que p ne vérifie pas la propriété de l'énoncé pour l'ensemble T. En effet, il est clair que le produit des $s + 1$ pour s parcourant T est une puissance de 2 et donc il n'y a aucun $q \in P^* \backslash T$ tel que $q + 1$ divise ce produit.

Réciproquement, supposons que p appartienne à T. Soit $S \subset P^*$ de cardinal au moins 2 ne contenant par p. Notons $p_1 < \ldots < p_k$ les éléments de S. On a $k \geqslant 2$. Raisonnons par l'absurde en supposant que pour tout $q \in P^*$, on a

$$(q + 1) \mid (p_1 + 1) \cdots (p_k + 1) \quad \Longrightarrow \quad q \in S.$$

Comme 4 divise $(p_1 + 1)(p_2 + 1)$, on a nécessairement $M_2 \in S$, puis successivement

- comme 8 divise $(M_2 + 1)(p_2 + 1)$, on déduit $M_3 \in S$;
- comme 32 divise $(M_2 + 1)(p_2 + 1)$, on déduit $M_5 \in S$;
- comme 128 divise $(M_2 + 1)(p_2 + 1)$, on déduit $M_7 \in S$;
- comme 8192 divise $(M_2 + 1)(p_2 + 1)$, on déduit $M_{13} \in S$.

Ainsi, puisque $p \in T = \{M_2, M_3, M_5, M_7, M_{13}\}$, on doit avoir $p \in S$. C'est une contradiction, d'où résulte la réciproque.

Au final, le plus grand p convenable est 8191 et la réponse à la question est $8191 \mod 825 = 766$.

Solution de l'énigme 9 : Sophie Germain, Sophia Kovaleskaia.

<u>*Solution de l'exercice 14*</u> On va raisonner en fixant le couple (z, w), et en comptant le nombre de couples (x, y) qui conviennent. Soit $k = z^3 + w^3$.

Si $k \equiv 0 \pmod{37}$, on doit dénombrer les couples (x, y) modulo 37 tels que $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{37}$. On écrit :

$$x^2 \equiv -y^2 \equiv 36y^2 = (6y)^2 \pmod{37}$$

de sorte que 37 divise $(x-6y)(x+6y)$, donc divise l'un des deux facteurs, d'où $x \equiv \pm 6y \pmod{37}$. Or $6y$ et $-6y$ sont distincts modulo 37 si et seulement si $y \neq 0$, donc on trouve en tout $1+2\times 36 = 73$ solutions.

Si à l'inverse $k \not\equiv 0 \pmod{37}$, on est conduit à résoudre :

$$(x-6y)(x+6y) \equiv k \pmod{37} \tag{G.2}$$

On pose alors $a = x - 6y$, $b = x + 6y$. Notons qu'alors, $2x \equiv a + b \pmod{37}$, et donc $x \equiv 19 \cdot (2x) \equiv 19(a+b) \pmod{37}$. De la même manière, $y \equiv -3 \cdot 12y \equiv -3(b-a) \pmod{37}$. Ainsi, le nombre de couples (x, y) modulo 37 vérifiant (G.2) est exactement le nombre de couple (a, b) modulo 37 vérifiant $ab \equiv k \pmod{37}$. Cela impose a et b non nuls modulo 37, et réciproquement, pour chaque a donné non divisible par 37, il existe un entier b, unique modulo 37, tel que $ab \equiv k \pmod{37}$.[2] Donc il y a exactement 36 couples (x, y) solutions.

Reste à déterminer le nombre de couples (z, w) tels que $k = z^3 + w^3 \equiv 0 \pmod{37}$. Si $w = 0$, la seule solution est $z = w = 0$. Sinon, on peut écrire $z \equiv tu \pmod{37}$ pour un certain u unique modulo 37, et l'équation devient :

$$u^3 + 1 = (u+1)(u^2 - u + 1) \equiv 0 \pmod{37}$$

Il vient donc $u \equiv -1 \pmod{37}$ ou bien :

$$\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 \equiv -\frac{3}{4} \pmod{37}$$

soit encore :

$$(u-19)^2 \equiv 27 \equiv 8^2 \pmod{37}$$

(On obtient cette dernière congruence en calculant la table des carrés). Il y a donc en tout trois solutions distinctes à l'équation $u^3 + 1 \equiv 0 \pmod{37}$, soit -1, 11 et 27. Il en résulte que pour chaque $w \neq 0$, l'équation $z^3 + w^3 \equiv 0 \pmod{37}$ admet trois solutions. Il y a donc en tout $36 \times 3 + 1 = 109$ couples (z, w) pour lesquels $k \equiv 0 \pmod{37}$.

Finalement, on obtient $109 \times 73 + (37^2 - 109) \times 36 = 53\,317$ quadruplets (x, y, z, w) solutions.

[2] L'existence est une conséquence du théorème de Bézout. En effet, comme a est premier à 37, il existe b et m entiers tels que $ab + 37m = k$. L'unicité résulte de ce que, si $ab \equiv ab' \pmod{37}$, alors 37 divise $a(b - b')$ et pas a, donc $b - b'$.

H. Les tests

Les exercices suivants sont classés par thème, et par ordre de difficulté croissante.

1 Les énoncés

1.1 Le test du 23 août

Exercice 1 Cet exercice est constitué de deux parties indépendantes.

1. Nier les propositions suivantes :
   a. Il fait beau et je prends mon parasol.
   b. L'exposé sera donné par Xavier ou par François.
   c. Aucun de mes stylos ne fonctionne.
   d. J'aurai 7/7 à au moins un exercice du test.
2. Soit $F(x)$ une formule mathématique qui dépend de la variable x et G une autre formule mathématique qui ne dépend pas de la variable x. Montrer que les deux formules suivantes sont équivalentes :

   (P1) $\forall x \ (F(x) \Longrightarrow G)$

   (P2) $(\exists x \, F(x)) \Longrightarrow G$.

Exercice 2 Xavier écrit 2009 fois le nombre 1 au tableau. Sandrine a le droit d'effectuer l'opération suivante : remplacer deux de ces nombres (a, b) par les nombres $(a+2b, b+2a)$. Est-ce que Sandrine peut obtenir 2009 fois le nombre 2010 en utilisant uniquement cette opération ?

Exercice 3 Soit n un entier naturel. À un stage de mathématiques, $2n+1$ éléves se réunissent, chacun étant muni d'un pistolet à eau. On suppose que les distances entre éléves sont deux à deux distinctes. À midi précises, chaque éléve tire sur son plus proche voisin. Montrer qu'il existe au moins un éléve qui restera sec.

Exercice 4 Soit n un entier naturel. On considère $2n+1$ nombres entiers relatifs, deux à deux distincts, compris au sens large entre $-2n+1$ et $2n-1$. Montrer qu'on peut en choisir trois dont la somme soit nulle.

Exercice 5 Soient A, B et C trois points fixés sur un cercle K, et soit $P \in K$ un point variable tel que $(PC) \cap (AB)$ soit à l'intérieur de K. Notons I et J les centres des cercles inscrits de PCA et PCB respectivement.

Montrer que si le cercle circonscrit de PIJ coupe K en P et Q, alors Q est un point fixe bien que P soit variable.

Exercice 6 Soit ABC un triangle et soit K son cercle circonscrit. Notons I le centre de son cercle inscrit et S le second point d'intersection de K avec la droite (AI). Soient E et F les projections orthogonales de I sur (BS) et (CS) respectivement. On suppose que $IE + IF = \frac{AS}{2}$. Déterminer $\widehat{BAC}$.

Exercice 7 Soit ABC un triangle et soit P un point de son intérieur. Soit A_1 (resp. B_1, resp. C_1) l'intersection des droites (AP) et (BC) (resp. des droites (BP) et (CA), resp. des droites (CP) et (AB)). Soient A_2 et C_2 les points de (A_1C_1) tels que (CC_1) coupe $[B_1C_2]$ en son milieu et (AA_1) coupe $[B_1A_2]$ en son milieu. Posons $A_3 = (B_1A_2) \cap (CC_1)$ et $C_3 = (B_1C_2) \cap (AA_1)$. Montrer que les droites (A_3C_3) et (AC) sont parallèles.

Exercice 8 Soient $ABCD$ un quadrilatère convexe et P un point de son intérieur. Montrer que les symétriques de (PA), (PB), (PC) et (PD) par rapport aux bissectrices de $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ et $\hat{D}$ respectivement sont concourantes si, et seulement si $\widehat{APB} + \widehat{CPD} = \widehat{BPC} + \widehat{DPA}$.

1.2 Le test du 27 août

Exercice 9 Dans cet exercice, on considère un triangle ABC.
a) Soit P, Q, R des points appartenant respectivement à $]BC[$, $]CA[$ et $]AB[$. Montrer que les droites (AP), (BQ), (CR) sont concourantes si, et seulement si

$$\frac{\sin \widehat{BAP}}{\sin \widehat{CAP}} \cdot \frac{\sin \widehat{CBQ}}{\sin \widehat{ABQ}} \cdot \frac{\sin \widehat{ACR}}{\sin \widehat{BCR}} = 1.$$

b) Soit M un point intérieur à ABC. On note Δ_a la droite symétrique de la droite (AM) par rapport à la bissectrice de $\widehat{BAC}$. Les droites Δ_b et Δ_c sont définies de façon analogue. Montrer que Δ_a, Δ_b, Δ_c sont concourantes. (Leur point de concours M' est appelé conjugué isogonal de M dans le triangle ABC.)
c) Dans la question *b)* on prend $M = O$, centre du cercle circonscrit à (ABC). Montrer que $M' = H$, orthocentre de ABC.

Exercice 10 Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe admettant un cercle inscrit. Montrer que les cercles inscrits dans les triangles ABC et CDA sont tangents.

Exercice 11 Soit n un entier naturel. Soit $P_1, P_2, \dots, P_{2n+1}$ des points du plan appartenant au cercle de rayon 1 et de centre O. On suppose que les points sont situés du même côté d'un diamètre de ce cercle. Montrer que $\|\overrightarrow{OP_1} + \cdots + \overrightarrow{OP_{2n+1}}\| \geqslant 1$.

Exercice 12 Soit $A_1A_2A_3A_4A_5$ un pentagone convexe quelconque. On pose $A_6 = A_1$, $A_7 = A_2$, $A_8 = A_3$ et $A_9 = A_4$. Pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, soit a_i la droite qui passe par A_i et par $(A_{i+1}A_{i+3}) \cap (A_{i+2}A_{i+4})$. Soit B_i le point d'intersection de a_i et de $(A_{i+2}A_{i+3})$. Montrer que

$$\frac{A_1B_4}{A_2B_4} \cdot \frac{A_2B_5}{A_3B_5} \cdot \frac{A_3B_1}{A_4B_1} \cdot \frac{A_4B_2}{A_5B_2} \cdot \frac{A_5B_3}{A_1B_3} = \pm 1.$$

Exercice 13 Soient A, B et C trois points fixés sur un cercle K et soit $P \in K$ un point variable. Notons I et J les centres des cercles inscrits de PCA et PCB, respectivement. Soit X le centre du cercle circonscrit de PIJ. Déterminer le lieu des points X.

Exercice 14 Soient α, β et γ trois angles tels que $\alpha + \beta + \gamma = 60°$. Soit ABC un triangle équilatéral, et soient A', B' et C' trois points dans son intérieur tels que

$$\widehat{A'BA} = \gamma,\ \widehat{A'CA} = \beta,\ \widehat{B'CB} = \alpha,\ \widehat{B'AB} = \gamma,\ \widehat{C'AC} = \beta,\ \widehat{C'BC} = \alpha.$$

Montrer qu'il existe des entiers i, j et k tels que $\widehat{A'B'C'} = i\alpha + j\beta + k\gamma$.

Exercice 15 Nous avons n^2 lampes qui sont arrangées dans un carré $n \times n$. Chaque fois qu'on touche une lampe, on change cette lampe et toutes les lampes dans la même ligne et dans la même colonne, c.à.d. les lampes éteintes sont allumées et les lampes allumées sont éteintes. Au début toutes les lampes sont éteintes.

Montrer qu'on peut toujours allumer toutes les lampes avec une suite des telles opérations et trouver le nombre minimal d'opérations pour chaque entier n.

1.3 Le test final

Exercice 16 Trouver tous les entiers $a > 0$ tels que

$$\frac{a^2 + 8a + 2}{a^2 + 5a + 5}$$

est un entier.

Exercice 17 Trouver tous les entiers $x, y > 0$ tels que $x! + 3 = y^2$.

Exercice 18 Soit A l'ensemble des entiers $2^i 3^j$ quand i et j décrivent $\mathbb{N}$. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des éléments $a_1, \ldots, a_r$ de A tels que $n = a_1 + \cdots + a_r$ et tels que pour tous $i \neq j$, a_i ne divise pas a_j.

Exercice 19 On a n lampes $0, 1, \ldots, n-1$ dont exactement une est allumée. Pour chaque diviseur d de n tel que $d < n$ et chaque entier r, il est permis de changer l'état de toutes les lampes $kd + r$ mod n, si toutes ces n/d lampes ont déjà le même état.

Pour quels n est-ce qu'on peut allumer toutes les lampes ?

Exercice 20 Déterminer le nombre de possibilités de couvrir un rectangle $3 \times n$ par des dominos 1×2 et 2×1 sans trous ni débordements ?

Exercice 21 Autour d'une table ronde il y a n filles qui jouent à un jeu avec n cartes. Au début, une fille a toutes les n cartes. Tant qu'il y a une fille qui a au moins deux cartes, elle doit donner une carte à sa voisine de gauche et une carte à sa voisine de droite.

Pour quels entiers naturels n est-ce que ce jeu se termine toujours ?

Pour quels entiers naturels n est-ce que ce jeu ne se termine jamais ?

2 Les solutions

Solution de l'exercice 1 *1.*

- Il ne fait pas beau ou je ne prends pas mon parasol
- S'il y a un exposé, il ne sera donné ni par Xavier, ni par François.
- J'ai un stylo qui fonctionne.
- Je n'aurai 7/7 à aucun exercice du test.

2. Supposons dans un premier temps (P1). On souhaite démontrer (P2) et pour cela, on suppose qu'il existe x_0 tel que $F(x_0)$ et on veut prouver G. Mais, par (P1), on sait que $F(x_0)$ implique G. Ainsi G est vraie comme voulu.

Réciproquement supposons (P2) et considérons un x. On veut montrer que $F(x)$ implique G. Mais si l'on suppose $F(x)$, la prémisse de (P2) est clairement vérifiée. Ainsi la conclusion, c'est-à-dire G, l'est aussi.

Solution de l'exercice 2 On remarque que si a et b sont impairs, il en est de même de $a + 2b$ et $b + 2a$. Comme tous les nombres écrits initialement par Xavier sont impairs (ils sont tous égaux à 1), Sandrine ne pourra écrire que des nombres impairs en utilisant le seule opération qui lui est permise. Ainsi, elle n'arrivera jamais à écrire 2010.

Solution de l'exercice 3 Raisonnons par récurrence sur n. Si $n = 0$, le seul stagiaire reste sec. Supposons le résultat vrai pour $n-1$ et démontrons-le pour n. Considérons pour une assemblée de $2n+1$ stagiaires et isolons mentalement parmi eux les deux qui sont les plus proches, disons Sergio et Jean-François. Ceux-là vont clairement s'entre-mouiller à midi. Par ailleurs, d'après l'hypothèse de récurrence, si ni Sergio ni Jean-François n'étaient pas là, il resterait une personne sèche à l'issue des tirs, disons Thomas. Avec les deux stagiaires en plus, les seuls tirs qui pourraient être modifiés atteindraient soit Sergio, soit Jean-François. Ceci prouve que, quoi qu'il arrive, Thomas reste sec.

Solution de l'exercice 4 On raisonne par récurrence sur n. Si $n = 1$, il y a trois nombres à choisir dans $\{-1, 0, 1\}$; on en est obligé de choisir les trois et comme leur somme est nulle, la propriété de l'énoncé est vérifiée.

Supposons maintenant la propriété vraie pour n, et prouvons la pour $n + 1$. Donnons-nous donc un sous-ensemble $E \subset \{-2n - 1, -2n, \dots, 2n + 1\}$ de cardinal $2n + 3$. Si E contient $2n + 1$ éléments compris au sens large entre $-2n + 1$ et $2n - 1$, l'hypothèse de récurrence s'applique et on a terminé. On suppose donc à partir de maintenant que ce n'est pas le cas ; cela signifie que E contient au moins trois des quatre nombres $-2n - 1$, $-2n$, $2n$, $2n + 1$.

Supposons d'abord que E contient $2n+1$ et $-2n-1$. Si $0 \in E$, il existe bien trois éléments de E dont la somme est nulle. Si, au contraire, $0 \notin E$, on remarque qu'au moins un de deux ensembles $E \cap \{1, \dots, 2n\}$ ou $E \cap \{-2n, \dots, -1\}$ est de cardinal supérieur ou égal à $n+1$ (puisque leur réunion compte $2n+1$ éléments). Supposons que c'est le premier (l'autre cas se traite de manière totalement analogue). Par le principe des tiroirs, l'un des doubletons $\{1, 2n\}, \{2, 2n - 1\}, \dots, \{n, n + 1\}$ est contenu dans E. Comme la somme des deux éléments de chacun des doubletons vaut $2n + 1$ et que $-2n - 1 \in E$, on a bien trouvé trois éléments de E de somme nulle.

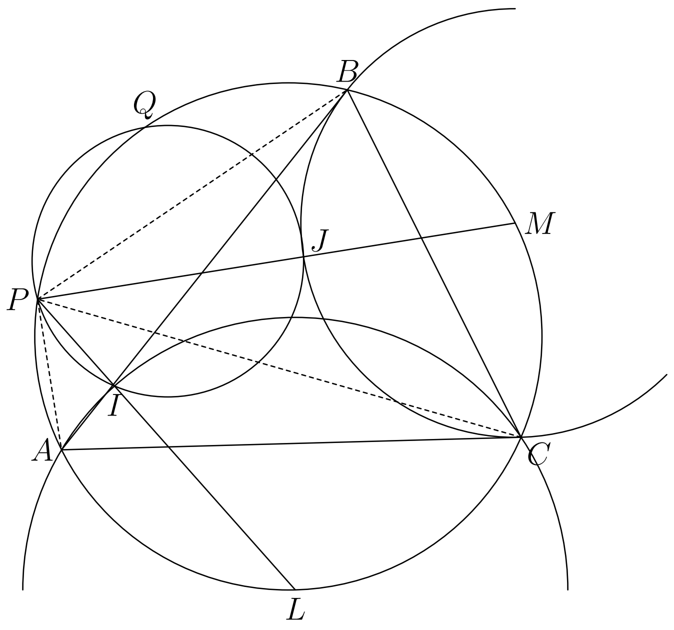
On suppose désormais que $2n+1 \notin E$ (si $-2n-1 \notin E$, le raisonnement est le même). Dans ce cas, on a $-2n \in E$, $-2n-1 \in E$ et $2n \in E$. On peut supposer $0 \notin E$ car, dans le cas contraire, on a une solution évidente au problème à savoir $2n + 0 + (-2n)$. De même, on peut supposer $1 \notin E$. Alors, comme dans l'alinéa précédent, on a deux cas (non exclusifs)

- l'ensemble $E \cap \{2, \dots, 2n - 1\}$ compte au moins n éléments, ou
- l'ensemble $E \cap \{-2n + 1, \dots, -1\}$ compte au moins $n + 1$ éléments.

Dans le premier cas, on remarque que nécessairement l'un des doubletons $\{2, 2n-1\}, \{3, 2n\}, \dots, \{n, n+1\}$ est inclus dans E, d'où on conclut puisque $-2n - 1 \in E$. Dans le deuxième cas, le cardinal de

$E \cap \{-2n-1, \dots, -n+1, -n-1, \dots, -1\}$ est au moins n et on conclut comme précédemment en considérant les sous-ensembles $\{-1, -2n+1\}, \{-2, -2n+2\}, \dots, \{-n+1, -n\}$.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> On introduit les points L et M, milieux respectifs des arcs $\widehat{AC}$ et $\widehat{BC}$.



Par un résultat classique[1], les points P, I et L d'une part et P, J et M d'autre part sont alignés. De plus, les points A, I et C sont situés sur un même cercle de centre L tandis que le cercle circonscrit à BJM a pour centre M.

On sait en outre qu'il existe une unique similitude directe s qui envoie L sur M d'une part et I sur J d'autre part. Montrons que le point Q est le centre de s. Pour cela, il suffit de montrer que les triangles QIJ et QLM sont directement semblables. Or, en angle orientés, on a :

$$(\overrightarrow{QI}, \overrightarrow{QJ}) \equiv (\overrightarrow{PI}, \overrightarrow{PJ}) \equiv (\overrightarrow{PL}, \overrightarrow{PM}) \equiv (\overrightarrow{QL}, \overrightarrow{QM}) \pmod{\pi}$$

et

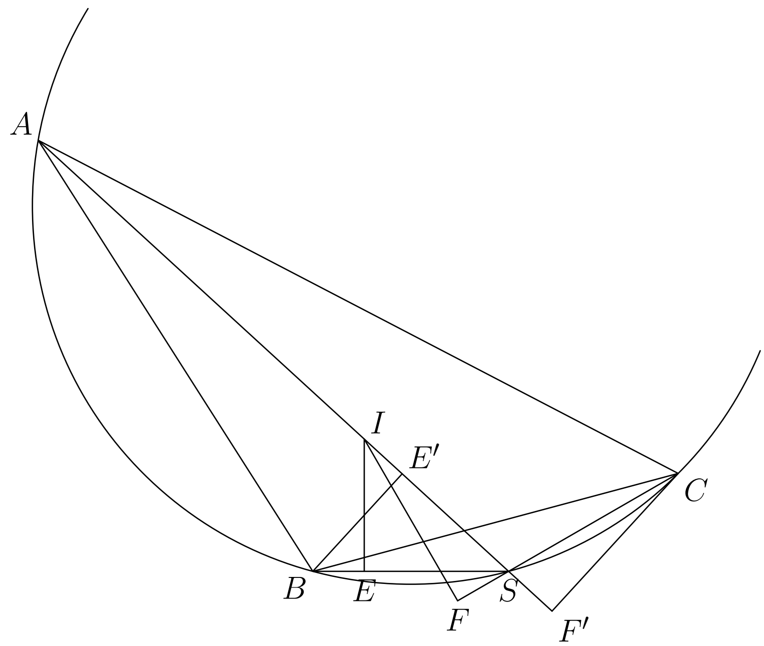
$$(\overrightarrow{JQ}, \overrightarrow{JI}) \equiv (\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PI}) \equiv (\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PL}) \equiv (\overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{ML}) \pmod{\pi}$$

d'où il découle ce que l'on souhaite. À ce stade, il suffit pour conclure de montrer que la similitude s ne dépend pas de P. Or, son rapport est le rapport des rayons de cercles Γ_1 et Γ_2 : il est donc constant. Son angle est aussi fixe puisqu'il vaut $\widehat{LPM}$, P variant sur K qui passe par L et M. Comme finalement $s(L) = M$, on déduit bien que s est indépendant de P.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> Notons α, β et γ les angles de ABC avec les conventions habituelles. Notons également E' (resp. F') le projeté de B (resp. C) sur la droite (AS).

---

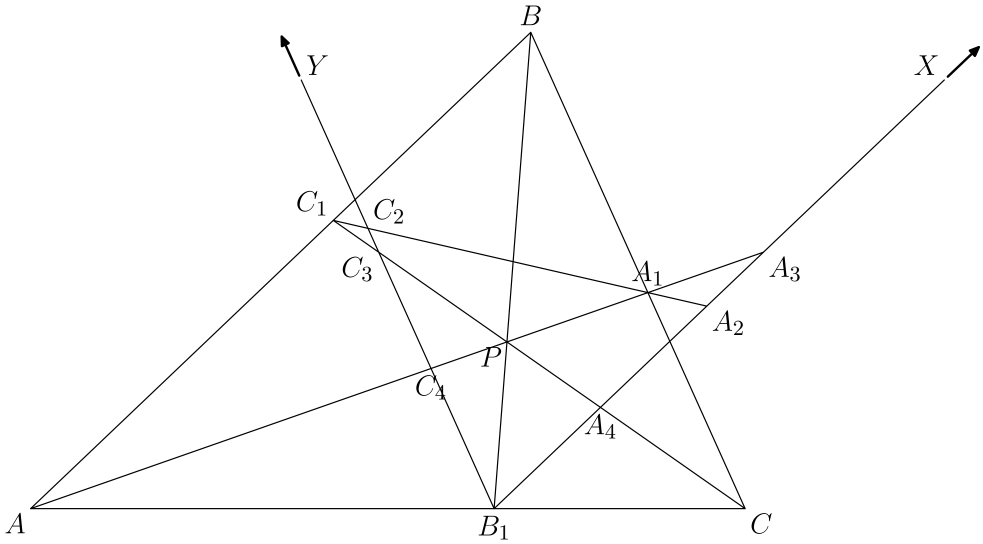
[1] Si vous ne connaissez pas ce résultat, cela vous fera un bon exercice...



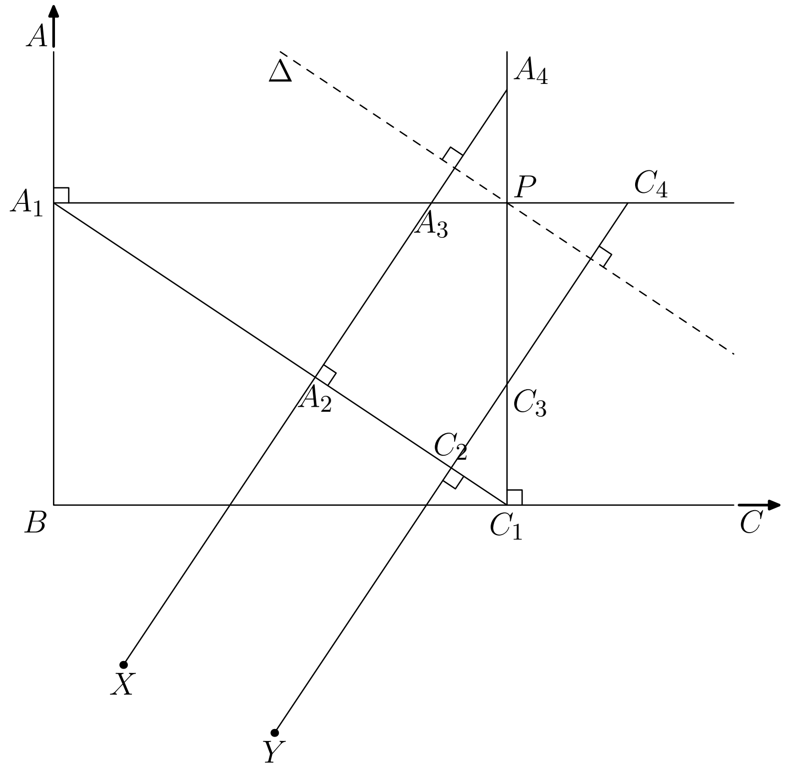
Par symétrie axiale par rapport à la troisième hauteur de ISB, les segments $[IE]$ et $[BE']$ ont même longueur. De même, $IF = CF'$. La relation $IE+IF = \frac{AS}{2}$ se réécrit alors $BE'+CF' = \frac{AS}{2}$. Or la trigonométrie dans ABE' donne $BE' = AB\sin(\frac{\alpha}{2})$. De même $CF' = AC\sin(\frac{\gamma}{2})$. La relation de l'énoncé devient alors $2\sin(\frac{\alpha}{2})(\frac{AB}{AS} + \frac{AC}{AS}) = 1$. La loi des sinus dans le triangle ABS donne alors $\frac{AB}{AS} = \frac{\sin\widehat{ABS}}{\sin\widehat{ASB}}$. Or $\widehat{CBS} = \widehat{CAS} = \frac{\alpha}{2}$. On en déduit que $\widehat{ABS} = \beta + \frac{\alpha}{2}$. On a par ailleurs $\widehat{ASB} = \widehat{ACB} = \gamma$. Ainsi $\frac{AB}{AS} = \frac{\sin\gamma}{\sin(\beta+\frac{\alpha}{2})}$. De même, on montre que $\frac{AC}{AS} = \frac{\sin\beta}{\sin(\gamma+\frac{\alpha}{2})}$.

À partir de là et en utilisant la formule $\sin\beta + \sin\gamma = \sin(\frac{\beta+\gamma}{2})\sin(\frac{\beta-\gamma}{2})$, quelques calculs de trigonométrie que l'on laisse au lecteur montrent que la formule de l'énoncé est finalement équivalente à $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ou $\alpha = \frac{5\pi}{6}$.

Solution de l'exercice 7 Nous présentons une solution utilisant la géométrie projective. Nous invitons donc ceux qui ne sont pas (encore) à l'aise avec cela à consulter préalablement le bref rappel de cours à ce sujet, p.26 dans ce poly. Notons X et Y les points à l'infini correspondant respectivement aux droites (B_1C_2) et (B_1A_2).



Considérons une transformation projective qui envoie les points A et C à l'infini ; cette transformation en particulier envoie la droite (AC) sur la droite à l'infini. On peut également fixer la position du point B, et donc en particulier s'arranger pour que l'angle $\widehat{A_1BC_1}$ devienne droit (si l'on préfère, on peut commencer par ne pas se soucier de cette deuxième condition, et appliquer ensuite une transformation affine qui ne modifie plus les points à l'infini). Après application de la transformation, la figure devient :



les droites qui se coupaient avant en un point de la droite (AC) deviennent désormais parallèles. Attention quand même : des droites qui étaient avant parallèles deviennent maintenant *a priori* séquentes. Précisément, elles se coupent en un point de l'image de la droite à l'infini, c'est-à-dire de la droite (XY). Au départ, nous souhaitions montrer que les droites (A_3C_3) et (AC). D'après ce que nous venons de dire, après transformation, il s'agit de montrer que les droites (A_3C_3) et (XY) sont parallèles.

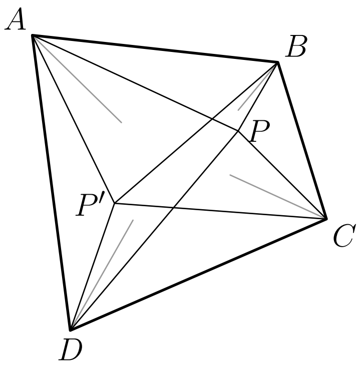
Remarquons également qu'initialement les points B_1, C_2, C_4 et Y dans cet ordre étaient harmoniques. Ainsi, il le reste après transformation, ce qui signifie que dans la nouvelle figure A_2 est le milieu de $[A_4X]$. De même, C_2 est le milieu de $[C_4Y]$. Si on appelle (Δ) la droite parallèle à (A_1C_1) passant par P, la symétrie s par rapport à (Δ) envoie (A_4C_3) sur (A_3C_4). Comme en plus (A_3A_4) et (Δ) sont perpendiculaires, on en déduit que $s(A_3) = A_4$. De même, $s(C_3) = C_4$. Ainsi (XY) s'envoie sur (A_4C_4) par la symétrie d'axe (A_1C_1) (d'après les angles droits) puis sur (A_3C_3) par s. Comme la composée de deux symétries d'axes parallèles est une translation, on en déduit le parallélisme de (A_3C_3) et (XY) comme voulu.

Solution de l'exercice 8 Pour simplifier les écritures à venir, nommons quelques droites comme suit :

$$a = (AB) \quad ; \quad b = (BC) \quad ; \quad c = (CD) \quad ; \quad d = (DA)$$

$$a' = (AP) \quad ; \quad b' = (BP) \quad ; \quad c' = (CP) \quad ; \quad d' = (DP)$$

et de façon générale si Δ est une droite, notons s_Δ la symétrie par rapport à Δ. Notons également a'' (resp. b'', resp c'', resp. d'') le symétrique de a' (resp. b', resp c', resp d') par rapport à la bissectrice de $\hat{A}$ (resp. $\hat{B}$, resp. $\hat{C}$, resp. $\hat{D}$).



On a $\widehat{(d'', d)} = \widehat{(c, d')}$, d'où on déduit que $s_{d''} \circ s_d = s_c \circ s_{d'}$, puis en composant par s_d à droite, il vient

$$s_{d''} = s_c \circ s_{d'} \circ s_d.$$

On a bien entendu des formules analogues en permutant cycliquement les variables. Il en résulte, après un petit calcul que

$$r'' = s_{a''} \circ s_{b''} \circ s_{c''} \circ s_{d''} = s_d \circ s_{a'} \circ s_{b'} \circ s_{c'} \circ s_{d'} \circ s_d. \tag{H.1}$$

De plus, $s_{a'} \circ s_{b'}$ (resp. $s_{c'} \circ s_{d'}$) est la rotation de centre P et d'angle $2\widehat{APB}$ (resp. d'angle $2\widehat{CPD}$). On en déduit que $r' = s_{a'} \circ s_{b'} \circ s_{c'} \circ s_{d'}$ est la rotation de centre P et d'angle $2(\widehat{APB} + \widehat{CPD})$.

Si l'on suppose maintenant que $\widehat{APB} + \widehat{CPD} = \widehat{BPC} + \widehat{DPA}$, il suit que r' est l'identité, et donc qu'il en est de même de r''. Notons P' le point d'intersection de a'' et b'' et P'' celui de c'' et d''. La composée $s_{a''} \circ s_{b''}$ est alors une rotation non triviale de centre P', alors que $s_{d''} \circ s_{c''}$ est une rotation non triviale de centre P''. Or, par ce que l'on a vu, $s_{a''} \circ s_{b''} = s_{d''} \circ s_{c''}$, et donc $P' = P''$. Les droites a'', b'', c'' et d'' sont donc bien concourantes.

Réciproquement, supposons la concourance de ces droites, en un point que l'on note par exemple P'. Alors r'' est la rotation de centre P'' et d'angle $2(\widehat{BPC} + \widehat{DPA})$. Rappelons que l'on avait déjà vu que, de même, r' est la rotation de centre P' et d'angle $2(\widehat{APB} + \widehat{CPD})$. Supposons par l'absurde que l'égalité d'angles à prouver ne soit pas satisfaite. Alors r' et r'' sont des rotations non triviales. La relation (H.1) prouve en outre que les centres de r' et r'' sont échangés par s_d, c'est-à-dire $P' = s_d(P)$. Mais cela n'est pas possible car $s_d(P)$ est manifestement un point extérieur au quadrilatère $ABCD$ contrairement à P'. Ceci termine la démonstration.

Solution de l'exercice 9

a) La loi des sinus dans le triangle ABP donne $\sin\widehat{BAP} = \frac{BP}{AP}\sin\widehat{ABP} = \frac{BP}{AP}\sin\widehat{ABC}$. De même $\sin\widehat{CAP} = \frac{CP}{AP}\sin\widehat{ACB}$. En prenant le rapport des deux relations, on a $\frac{\sin\widehat{BAP}}{\sin\widehat{CAP}} = \frac{BP}{CP}\frac{\sin\widehat{ABC}}{\sin\widehat{ACB}}$, donc

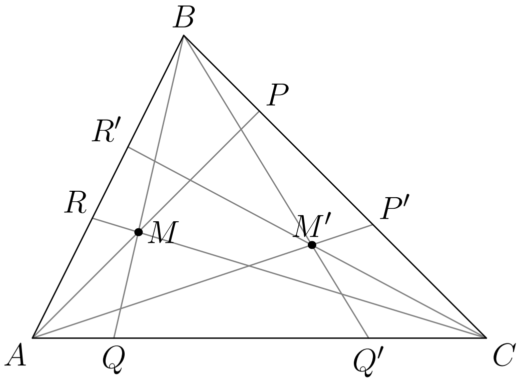
$$\frac{\sin\widehat{BAP}}{\sin\widehat{CAP}} = \frac{BP}{CP}\frac{AC}{AB},$$

car $\frac{\sin\widehat{ABC}}{\sin\widehat{ACB}} = \frac{AC}{AB}$ d'après la loi des sinus dans le triangle ABC. On obtient de même $\frac{\sin\widehat{CBQ}}{\sin\widehat{ABQ}} = \frac{CQ}{AQ}\frac{AB}{BC}$ et $\frac{\sin\widehat{ACR}}{\sin\widehat{BCR}} = \frac{AR}{BR}\frac{BC}{AC}$. En faisant le produit des trois relations analogues, il vient

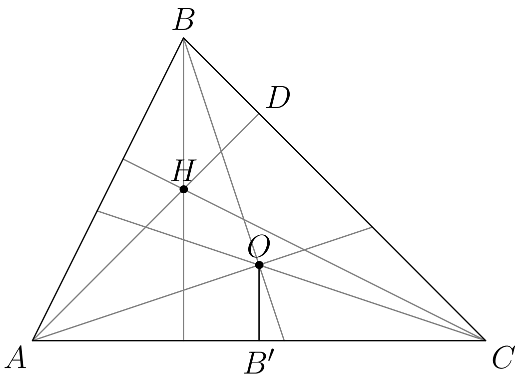
$$\frac{\sin\widehat{BAP}}{\sin\widehat{CAP}} \cdot \frac{\sin\widehat{CBQ}}{\sin\widehat{ABQ}} \cdot \frac{\sin\widehat{ACR}}{\sin\widehat{BCR}} = \frac{BP}{CP}\frac{AC}{AB} \cdot \frac{CQ}{AQ}\frac{AB}{BC} \cdot \frac{AR}{BR}\frac{BC}{AC} = \frac{BP}{CP}\frac{CQ}{AQ}\frac{AR}{BR}.$$

D'après le théorème de Ceva, le dernier membre est égal à 1 si et seulement si les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes.

b) Soit P, Q, R (respectivement P', Q', R') les points d'intersection (AM), (BM), (CM) (respectivement Δ_a, Δ_b, Δ_c) avec $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. On note $u = \frac{\sin \widehat{BAP}}{\sin \widehat{CAP}} \cdot \frac{\sin \widehat{CBQ}}{\sin \widehat{ABQ}} \cdot \frac{\sin \widehat{ACR}}{\sin \widehat{BCR}}$ et $u' = \frac{\sin \widehat{BAP'}}{\sin \widehat{CAP'}} \cdot \frac{\sin \widehat{CBQ'}}{\sin \widehat{ABQ'}} \cdot \frac{\sin \widehat{ACR'}}{\sin \widehat{BCR'}}$. On a $\widehat{BAP'} = \widehat{CAP}$ et $\widehat{CAP'} = \widehat{BAP}$, ainsi que quatre relations analogues obtenues en raisonnant sur Q ou R. On en déduit que u et u' sont inverses l'un de l'autre. Comme (AP), (BQ), (CR) concourent, on a $u = 1$, donc $u' = 1$. Cela signifie que (AP'), (BQ'), (CR') sont concourantes, ce qui conclut la question.

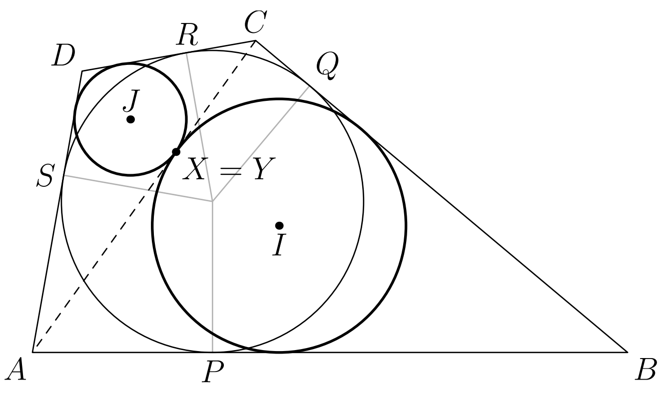


c) Nous résolvons l'exercice pour un triangle ABC acutangle (dont les angles sont aigus) ; sinon, les points O et H ne sont pas intérieurs à ABC, ce qui empêche d'appliquer directement les questions précédentes. En utilisant des angles orientés, on peut cependant vérifier que le résultat reste valable.



Soit B' le milieu de $[AC]$. L'angle $\widehat{AOB'}$ est la moitié de $\widehat{AOC}$, donc $\widehat{AOB'} = \widehat{ABC}$. Si D est le pied de la hauteur issue de A, on constate, (par égalité des angles en O et B, que les triangles rectangles AOB' et ABD sont semblables. Alors $\widehat{OC} = \widehat{BAD}$, ce qui signifie que (AD) et (AO) sont symétriques par rapport à la bissectrice de $\widehat{BAC}$.

<u>*Solution de l'exercice 10*</u> Notons P, Q, R, S les points de contact du cercle inscrit dans $ABCD$ avec les côtés respectifs $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$. On remarque $AP = AS$ et trois relations analogues. On obtient $AB + CD = AP + PB + CR + RD = AS + QB + CQ + SD = AD + BC$. Soit X le point de contact du cercle inscrit dans ABC avec $[AC]$ et soit Y le point de contact du cercle inscrit dans CDA avec $[AC]$. On sait que $2AX = AB + AC - BC$ et $2AY = AD + AC - CD$. Avec $AB + CD = AD + BC$, on a $AB - BC = AD - CD$, puis $AX = AY$ et enfin $X = Y$.



<u>*Solution de l'exercice 11*</u> On procède par récurrence sur n. Si $n=0$, le résultat est vrai. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On suppose que le résultat est établi pour $n-1$. Numérotons les points $P_1,\dots,P_n$ dans le sens trigonométrique, de sorte que $P_2,\dots,P_{2n}$ sont dans le secteur P_1OP_{2n+1}. Soit R tel que $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP_2}+\cdots+\overrightarrow{OP_{2n}}$. et S tel que $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_{2n+1}}$.

D'après l'hypothèse de récurrence, on a $OR\geqslant 1$. D'autre part, S appartient à la bissectrice de P_1OP_{2n+1}, car $OP_1=OP_{2n+1}$. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{OR}$ et $\overrightarrow{OS}$ forment un angle aigu. Dans ces conditions, on a

$$\|\overrightarrow{OP_1}+\cdots+\overrightarrow{OP_{2n+1}}\|=\|\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OS}\|\geqslant\|OR\|\geqslant 1.$$

La première inégalité peut se voir géométriquement, mais il est encore plus rapide d'écrire $\|\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OS}\|^2=OR^2+2\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OS}+OS^2\geqslant OR^2$.

<u>*Solution de l'exercice 12*</u> Soient $X=(A_2A_4)\cap(A_1A_3)$ et $Y=(A_3A_5)\cap(A_1A_4)$. D'après le théorème de Ceva, nous avons

$$\frac{A_3B_1}{A_4B_1}=\frac{A_3X}{A_1X}\cdot\frac{A_1Y}{A_4Y}=\frac{\mathcal{A}(A_2A_3A_4)}{\mathcal{A}(A_1A_2A_4)}\cdot\frac{\mathcal{A}(A_5A_1A_3)}{\mathcal{A}(A_3A_4A_5)}.$$

Si l'on multiplie de façon cyclique les fractions $\frac{\mathcal{A}(A_2A_3A_4)}{\mathcal{A}(A_3A_4A_5)}$ et $\frac{\mathcal{A}(A_5A_1A_3)}{\mathcal{A}(A_1A_2A_4)}$, alors on obtient chaque fois 1.

<u>*Solution de l'exercice 13*</u> Le lieu cherché n'est pas un poisson mais la réunion de deux arcs de cercle qui ont le même centre O que K. En effet, d'après l'exercice 5, p.62, $K\cap K'=Q$ est un point fixe, où K' est le cercle circonscrit à PIJ. Soient M et N les milieux des arcs CA et CB respectivement. La similitude directe de centre Q qui envoie K sur K' et O sur X envoie notamment M sur I et N sur J. Par conséquent, les triangles QMI, QNJ et QOX sont semblables et

$$\frac{OX}{QO}=\frac{MJ}{QM}=\frac{NJ}{QN}.$$

Mais Q,O,M et N sont fixés, et $MI=MA=MC$ et $NJ=NB=NC$ sont également fixés. Par conséquent, OX est fixé.

Si les segments $[AB]$ et $[CD]$ ne s'intersectent pas, alors $C=Q$ et X est sur le cercle circonscrit de ABC.

<u>*Solution de l'exercice 14*</u> D'après la loi des sinus, l'identité

$$\frac{AB}{AC}\cdot\frac{AC}{AB'}\cdot\frac{AB'}{AC'}\cdot\frac{AC'}{AB}=1$$

implique

$$\frac{\sin 60^\circ}{\sin 60^\circ}\cdot\frac{\sin(60^\circ+\beta)}{\sin(60^\circ-\alpha)}\cdot\frac{\sin\widehat{AC'B'}}{\sin\widehat{AB'C'}}\cdot\frac{\sin(60^\circ-\alpha)}{\sin(60^\circ+\gamma)}=1,$$

i.e.

$$\frac{\sin\widehat{AC'B'}}{\sin\widehat{AB'C'}}=\frac{\sin(60^\circ+\gamma)}{\sin(60^\circ+\beta)}.$$

Comme $\widehat{AC'B'}+\widehat{AB'C'}=180^\circ-\alpha=(60^\circ+\beta)+(60^\circ+\gamma)$, on a $\widehat{AC'B'}=60^\circ+\gamma$ et $\widehat{AB'C'}=60^\circ+\beta$. De même, $\widehat{CB'A'}=60^\circ+\beta$, de sorte que

$$\begin{aligned}\widehat{A'B'C'} &= \widehat{AB'C'}+\widehat{CB'A'}-\widehat{AB'C}\\ &= 60^\circ+\beta+60^\circ+\beta-(180^\circ-\alpha-2\beta-\gamma)\\ &= 120^\circ+2\beta-(120^\circ-\beta)\\ &= 3\beta.\end{aligned}$$

<u>*Solution de l'exercice 15*</u> Si n est impair, on peut allumer toutes les lampes en touchant toutes celles dans une ligne (avec n opérations). Si n est pair, on peut allumer toutes les lampes en les touchant toutes (avec n^2 opérations). On va montrer qu'il s'agit là du nombre minimal.

Si on a moins de n opérations, il est clair qu'il y a au moins une ligne et une colonne dans lesquelles aucune lampe n'a été touchée. La lampe à l'intersection de cette ligne et cette colonne ne peut pas être allumée. Il est donc clair que n est le nombre minimal si n est impair.

Soit maintenant n pair. On remarque d'abord que l'ordre des opérations est sans importance, et qu'il faut un nombre impair d'opérations impliquant chaque lampe. En particulier, il n'est jamais utile de toucher la même lampe deux fois.

Ceci nous amène à considérer la fonction f associe à un ensemble A la configuration obtenue après avoir touché toutes les lampes de A (et en partant de la configuration initiales où toutes les lampes sont éteintes). La fonction f est surjective parce que d'une part chaque configuration comptant une seule lampe allumée peut être atteinte en touchant toutes les lampes dans la même ligne et dans la même colonne et que d'autre part, on allume un ensemble des lampes arbitraire si on repète cette operation pour chaque lampe dans cet ensemble (on elimine les « double-touches » éventuelles). Une fonction surjective entre les mêmes ensembles finis est forcement injective. Il y a donc une unique configuration des lampes touchées sans répétition qui allume toutes les lampes et on a deja trouvé cette configuration.

La réponse et donc n opérations si n est impair et n^2 opérations si n et pair.

<u>*Solution de l'exercice 16*</u> Comme le numérateur et le dénominateur sont des nombres entiers strictement positifs, le quotient noté x l'est aussi.
Cas 1 : $x = 1$. On a $a^2 + 8a + 2 = a^2 + 5a + 5$, donc $3a = 3$ ou $a = 1$.
Cas 2 : $x \geqslant 2$. On a $a^2 + 8a + 2 \geqslant 2(a^2 + 5a + 5)$, donc $a^2 + 2a + 8 \leqslant 0$, ce qui est absurde.

On trouve donc la seule solution $a = 1$.

<u>*Solution de l'exercice 17*</u> *Cas 1 :* $x \geqslant 4$. On remarque d'abord que 4 divise $x!$ dans ce cas. On trouve donc un nombre entier de la forme $4k + 3$ à gauche. Or, il est bien connu que les carrés ont toujours des restes 0 ou 1 modulo 4. (Soit $n = 2m$ et $n^2 = 4m^2$ avec reste 0, soit $n = 2m + 1$ et $n^2 = 4m^2 + 4m + 1$ avec reste 1.) Il y a donc aucune solution dans ce cas.
Cas 2 : $x < 4$. Pour $x = 1, 2, 3$ on trouve $x! + 3 = 4, 5, 9$, ce qui donne les deux solutions $(x, y) = (1, 2)$ et $(x, y) = (3, 3)$.

<u>*Solution de l'exercice 18*</u> On raisonne par récurrence forte sur n. Pour $n = 1$, c'est évident. Supposons le résultat vrai pour tous les entiers strictement inférieurs à n, et montrons-le pour n. Si n est pair, $\frac{n}{2}$ relève de l'hypothèse de récurrence. Ainsi, il s'écrit comme somme de a_i avec les conditions de l'énoncé. Il est alors clair que n s'écrit comme la somme des $2a_i$ et que ces derniers vérifient encore les conditions demandées.

Si maintenant n est impair. Si n est une puissance de 3, il n'y a rien à faire. Sinon, on introduit k le plus grand entier tel que $3^k \leqslant n$, et on pose $m = \frac{n-3^k}{2}$. C'est un entier strictement inférieur à n : il relève donc de l'hypothèse de récurrence, et s'écrit $m = a_1 + \cdots + a_r$ où les a_i appartiennent à A et sont tels que a_i ne divise pas a_j si $i \neq j$. Clairement $n = 3^k + 2a_1 + \ldots + 2a_r$ et aucun des $2a_i$ ne divise 3^k. ...galement, il est impossible que 3^k divise l'un des $2a_i$, car sinon, il diviserait aussi a_i et on aurait $n \geqslant 3^k + 2a_i \geqslant 3^{k+1}$, ce qui n'est pas vrai par hypothèse. On en déduit l'hérédité de la récurrence.

<u>*Solution de l'exercice 19*</u> Disposons les lampes sur le sommet d'un n-gone régulier dont le centre est 0. Il est facile de voir que la somme des vecteurs d'un n/d-gone régulier avec $n/d > 1$ donne toujours $\vec{0}$. La somme des vecteurs des lampes allumées reste donc invariante.

Au début, la somme est non nulle, alors qu'on souhaite qu'elle le soit à la fin. La manipulation n'est donc pas possible.

Solution de l'exercice 20 On remarque que l'aire $3n$ doit être paire pour admettre un pavage de dominos. On appelle donc a_n le nombre des pavages d'un rectangle de dimensions $3 \times 2n$.
Cas 1. La première colonne contient la partie gauche des trois dominos horizontaux, il reste a_{n-1} possibilités pour le reste.
Cas 2. La première colonne contient un domino vertical (il y a deux possibilités). Pour continuer le pavage, on est contraint d'ajouter k dominos horizontaux sur chacune des deux lignes correspondant au domino vertical avant de terminer par un domino vertical. Sur la dernière ligne, il y a alors nécessairement $k+1$ dominos horizontaux. Dans cette configuration, il reste a_{n-k} façons de terminer le pavage. Au final, on trouve pour ce deuxième cas un total de $2(a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \cdots + a_1 + a_0)$.

En regroupant tout, on obtient $a_0 = 1$ et la relation de récurrnce

$$a_n = 3a_{n-1} + 2(a_{n-2} + +a_{n-3} + \cdots + a_1 + a_0),\ n \geqslant 1.$$

Pour $n \geqslant 2$, on écrit

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + 2a_{n-2} \\ a_n &= 4a_{n-1} - a_{n-2} \end{aligned}$$

Cette récurrence linéaire a l'équation caracteristique $t^2 = 4t - 1$ dont les racines sont $t = 2 \pm \sqrt{3}$. On trouve donc $a_n = A(2+\sqrt{3})^n + B(2-\sqrt{3})^n$. On détermine A et B avec les « conditions initiales », ce qui conduit au final à l'expression

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}((\sqrt{3}+1)(2+\sqrt{3})^{n+1} + (\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})^{n+1}).$$

Solution de l'exercice 21 La seule configuration qui termine le jeu est lorsque chaque fille a exactement une carte.

Si n est pair, nous allons montrer que cette configuration n'est pas atteignable et le jeu ne termine donc jamais. Nous numérotons les filles $0, 1, \ldots, n-1$ dans l'ordre en commençant avec la fille qui a toutes les cartes au début. À chaque carte nous assignons comme poids le numero de la fille correspondante et à chaque configuration nous attribuons la somme des poids. Le poids de la configuration de depart est 0 et le poids de la configuration souhaitée est $0+1+2+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$. Si 2^k est la plus grande puissance de 2 qui divise n, on remarque que cette fraction est égale à 2^{k-1} modulo 2^k, ce qui est different de 0. Mais, par ailleurs, on vérifie tout de suite que les opérations de jeu ne changent pas le reste modulo 2^k, ce qui conclut le cas n pair.

Si $n = 2k+1$ est impair, nous allons montrer que le jeu termine toujours. Il est plus simple de renuméroter les filles de $-k$ à k (en convenant que c'est la fille 0 qui a les cartes initialement). Nous allons montrer qu'il n'y a jamais une carte qui passe entre les filles portant les numéros k et $-k$. Supposons le contraire et considérons la première fois où l'une des filles k ou $-k$ a deux cartes. On peut supposer, sans perte de généralité, que c'est la fille k. À ce moment, il n'y a aucune carte qui est passée entre k et $-k$. Le poids de la configuration, tel que défini dans l'étude du cas n pair, n'a donc pas encore changé à ce moment, et il est nul.

Considérons la première carte échangée entre un couple donné de deux filles voisines et notons sur cette carte les numéros des deux filles impliquées dans l'échange. On voit facilement qu'on peut supposer que la carte reste toujours avec ces deux filles-ci, parce qu'à chaque échange, il y a toujours le choix entre deux cartes. Puisque la fille k a déjà deux cartes, tous les couples de voisines $(0,1), (1,2), \ldots, (k-1,k)$ ont deja passé une carte, et comme nous venons de le dire, on peut supposer que celle-ci reste entre elles. On a donc k cartes correspondantes à ces couples en plus d'une $(k+1)$-ème carte qui est la deuxième possédée par la fille k.

Le poids minimal correspondant à ces $k+1$ cartes est $2k + (k-2) + (k-3) + \cdots + 1 + 0$. Dans la région négative par contre, il y a au plus k cartes et il n'est pas possible que la fille $-k$ ait deux cartes. Soit $-m$ le plus petit numéro tel que la fille ainsi numérotée a une carte. Il y a alors forcément une carte qui correspond à chaque couple $(0,-1), (-1,-2), (-2,-3), \ldots, (-(m-1), -m)$, et la position minimale pour les autres $k-m$ cartes est $-m$. La somme minimale (avec valeur absolue maximale) de ces cartes vaut donc

$$-(1+2+3+\ldots m) - (k-m)m \geqslant -(1+2+3+\cdots+k).$$

Comme $1+2+\cdots+k$ est strictement plus petit que la somme maximale $1+2+\cdots+(k-2)+k+k$ des valeurs positives, la somme des valeurs ne peut atteindre 0, et la condition de l'invariant donne une contradiction.

On a donc bien démontré qu'aucune carte ne passe entre les filles k et $-k$. Mais s'il y avait une nombre infini d'opérations, chaque fille devrait faire un nombre infini d'échanges. En effet, dans le cas contraire, il y aurait deux filles voisines dont une reçoive un nombre infini de cartes, ce qui n'est pas possible. Le jeu se termine donc toujours pour les nombres impairs et ne se termine jamais pour les nombres pairs.

I. Les problèmes du jour

Les problèmes du jour étaient proposés le soir après le repas, pour chercher et s'amuser ensemble entre deux parties de volley ou de cartes !

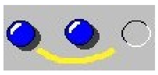
1 Remplissage de verres

On considère un damier rectangulaire sur lequel on a disposé sur chaque case un verre contenant une certaine quantité d'eau. Ni la taille du damier, ni les quantités d'eau ne sont pour l'instant fixées : on entend par là que le problème qui va suivre est posé pour des damiers de n'importe quelle taille, et pour des remplissages arbitraires des verres. Étant donné une telle configuration, on s'autorise à prendre l'un des verres et à verser tout ou partie de son contenu dans le verre immédiatement en-dessous (s'il existe) ou immédiatement à droite (s'il existe).

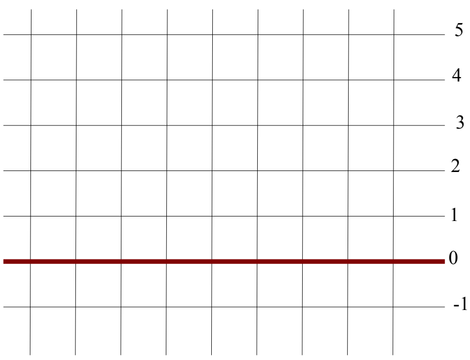
Déterminer les positions initiales pour lesquelles il est possible, après un certain nombre de transvasements licites, de parvenir à une configuration dans laquelle tous les verres sont également remplis.

2 Les pions sauteurs

On a le droit de sauter par dessus un pion en le supprimant (comme au Solitaire) :



Combien de pions faut-il mettre sur les lignes $-1, 0, etc...$ pour pouvoir monter jusqu'aux lignes : 1 ? 2 ? 3 ? 4 ? 5 ? etc ...



3 Record des permutations

Soit $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ sur lui-même. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On dit que l'entier $j \in \{1, \ldots, n\}$ est un *record* de σ si pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant j-1$, on a $\sigma(i) < \sigma(j)$. On note $\operatorname{rec}(\sigma)$ le nombre de records de σ. Soit finalement P_n le polynôme :

$$P_n(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} x^{\operatorname{rec}(\sigma)}.$$

Trouver tous les $x \in \mathbb{R}$ tels que $P_n(x) = 0$.

4 Les solutions

4.1 Remplissage de verres

Appelons *diagramme de Young* un ensemble D de cases du damier possédant la propriété suivante : si une case c est dans D, alors il en est de même de la case située immédiatement à droite (si elle existe) et de celle située immédiatement en dessous (si elle existe). Dans la suite, si D est un diagramme de Young, nous noterons $V(D)$ le volume total d'eau contenu dans D et $S(D)$ la surface de D, c'est-à-dire le nombre de cases qu'il y a dans D.

Soit ℓ la quantité moyenne d'eau contenue dans un verre : c'est aussi la quantité finale que l'on souhaite mettre dans chaque verre. Comme il est clair que les déplacements autorisés ne permettent à l'eau que de rentrer dans un diagramme de Young, on a la condition nécessaire suivante :

(C) : Pour tout diagramme de Young D, on a $V(D) \leqslant \ell S(D)$.

Il nous reste à montrer que cette condition est suffisante. Pour les besoins de la démonstration, nous commençons par étendre le problème aux damiers pas seulement rectangulaires, mais plus généralement en forme de diagramme de Young. Nous procédons à présent par récurrence sur le nombre de cases du damier. S'il y a une case, il n'y a rien à démontrer.

Donnons-nous maintenant un damier en forme de diagramme de Young de surface $S+1$. On appelle *coin* une case du damier qui n'admet aucun voisin à gauche, ni en dessous. Il est clair qu'un coin existe toujours : on peut par exemple prendre la case la plus à gauche de la première ligne. Soient c un coin, et v le volume d'eau qu'il y a sur c.

Appelons c_x (resp. c_y) la case située immédiatement à droite (resp. en dessous) de c, si elle existe. On cherche deux nombres positifs ou nuls x et y tels que si l'on verse, depuis c, une quantité d'eau égale à x dans c_x et une quantité d'eau égale à y dans c_y :

– il reste exactement une quantité d'eau égale à ℓ dans c et

– après transvasement, le damier auquel on a retiré la case c vérifie la condition **(C)**.

Si V' désigne les nouveaux volumes d'eau (*i.e.* après transvasement), ces conditions se traduisent mathématiquement par :

$$\begin{array}{rcl} x+y & = & v-\ell \\ V'(D) & \leqslant & \ell S(D) \end{array}$$

la dernière inégalité devant être vérifiée pour tout diagramme de Young D inclus dans le damier privé de la case c. À noter qu'étant donné qu'on laisse un volume d'eau égal à ℓ dans c, la moyenne dans le petit damier (celui auquel on a enlevé la case c) n'est pas modifiée : c'est la raison pour laquelle on retrouve bien ℓ dans la deuxième condition.

Examinons de plus près cette deuxième condition. Il y a en fait quatre cas. Si D ne contient ni c_x ni c_y, alors $V'(D) = V(D)$ et, par hypothèse de récurrence, l'inégalité est bien satisfaite. Si D

contient c_x et c_y, l'inégalité se réécrit sous la forme $V'(D) \leqslant \ell S(D) + \ell - v + x + y$. Ainsi elle sera automatiquement vérifiée si on arrive à satisfaire $x + y = v - \ell$. Il n'y a donc pas à se préoccuper de ce cas. Si maintenant D contient c_x mais pas c_y, l'inégalité devient $x \leqslant \ell S(D) - V(D)$, ce qui donne une condition supplémentaire sur x. De même, si D contient c_y mais pas c_x, on obtient $y \leqslant \ell S(D) - V(D)$.

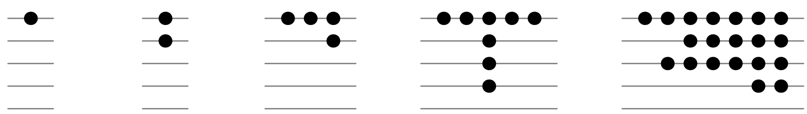
Parmi tous les diagrammes de Young D contenant c_x mais pas c_y (resp. c_y mais pas c_x), notons D_x (resp. D_y) celui pour lequel la quantité $S(D) - V(D)$ est maximale. Les conditions sur x et y se réécrivent alors

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & v - \ell \\ x & \leqslant & \ell S(D_x) - V(D_x) \\ y & \leqslant & \ell S(D_y) - V(D_y) \end{array}$$

Pour conclure il suffit donc de montrer d'une part que $v \geqslant \ell$ et d'autre part que $\ell S(D_x) - V(D_x) + \ell S(D_y) - V(D_y) \geqslant v - \ell$. La première inégalité s'obtient en instanciant la condition **(C)** au damier privé de la case c. Pour la seconde, on introduit les ensembles de cases $D_x \cap D_y$ et $D = D_x \cup D_y \cup \{c\}$. Clairement $S(D_x) + S(D_y) = S(D_x \cap D_y) + S(D) - 1$ et $V(D_x) + V(D_y) = V(D_x \cap D_y) + V(D) - 1$. L'inégalité à prouver se réécrit alors $\ell S(D_x \cap D_y) + \ell S(D) - V(D_x \cap D_y) - V(D) \geqslant 0$, ce qui résulte encore de **(C)** dès que l'on remarque que $D_x \cap D_y$ et D sont des diagrammes de Young.

4.2 Les pions sauteurs

Notons n la hauteur à atteindre. Voici des configurations qui fonctionnent (à vous de trouver comment !) pour $n \leqslant 4$ (ce sont celles avec le nombre de pions minimal, mais nous n'allons pas le prouver) :



$n = 0$ $n = 1$ $n = 2$ $n = 3$ $n = 4$

Pour $n \geqslant 5$, nous allons montrer que ce n'est pas possible. Bien entendu, il suffit de le faire pour $n = 5$. Raisonnons par l'absurde et supposons, sans perte de généralité, que l'on puisse atteindre le point de coordonnées $(0, 5)$. Attribuons un poids à chaque point à coordonnées entières : précisément au point de coordonnées (x, y) nous attribuons le poids $\alpha^{5-y+|x|}$ où α est la racine positive de l'équation $\alpha^2 = 1 - \alpha$.

Nous associons également un poids à une configuration de pions dans le plan, simplement en faisant la somme des poids associés aux positions de chacun des pions. On vérifie sans mal qu'un mouvement autorisé ne peut que diminuer le poids de la configuration. Or, la position à laquelle on souhaite arriver contient un pion dans la case de coordonnées $(0, 5)$ et a donc un poids supérieur ou égal à 1. Mais par ailleurs, le poids de la configuration initiale est manifestement strictement majoré par

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{0} \alpha^{5-y+|x|} = \alpha^5 \Big(\sum_{x=-\infty}^{\infty} \alpha^{|x|} \Big) \Big(\sum_{y=0}^{\infty} \alpha^y \Big) = \frac{\alpha^5 (1+\alpha)}{(1-\alpha)^2} = 1$$

la dernière égalité s'obtenant en se rappelant que $\alpha^2 = 1 - \alpha$. On déduit de tout cela que le mouvement est impossible.

4.3 Record des permutations

Première solution. Nous allons montrer par récurrence sur n que $P_n(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$. Ainsi, les racines de P_n seront $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Pour $n = 1$, il n'y a qu'une permutation qui est l'identité. L'entier 1 en est un record, d'oô $\mathrm{rec}(\mathrm{id}) = 1$. Le polynôme P_1 est donc bien $x \mapsto x$ comme voulu. Supposons maintenant que P_n soit de la forme annoncée. On veut prouver que $P_{n+1}(x) = (x+n)P_n(x)$. Pour cela, il suffit de montrer la relation de récurrence (c'est en fait équivalent) :

$$c_{n+1,k} = c_{n,k-1} + nc_{n,k}$$

où par définition $c_{n,k}$ désigne le nombre de permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ayant k records.

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$. Notons j l'entier tel que $\sigma(j) = 1$. Soit $\sigma' \in \mathfrak{S}_n$ la permutation définie par :

$$\begin{array}{rcll} \sigma'(i) & = & \sigma(i) - 1 & \text{si } i < j \\ \sigma'(i) & = & \sigma(i+1) - 1 & \text{sinon} \end{array}$$

Il est facile de se convaincre que l'application $\mathfrak{S}_{n+1} \to \{1, \ldots, n+1\} \times \mathfrak{S}_n$, $\sigma \mapsto (i, \sigma')$ est une bijection.

De plus, si $i = 1$, on vérifie immédiatement que 1 est un record de σ et que $i \in \{1, \ldots, n\}$ est un record de σ' si, et seulement si $i+1$ est un record de σ. On en déduit que $\mathrm{rec}(\sigma) = \mathrm{rec}(\sigma')+1$. Si au contraire $i \neq 1$, on a $\mathrm{rec}(\sigma) = \mathrm{rec}(\sigma')$. De tout cela, il suit facilement la relation de récurrence $c_{n+1,k} = c_{n,k-1} + nc_{n,k}$ puis, comme on l'a déjà dit, la formule attendue pour P_{n+1}.

Deuxième solution. On considère l'application :

$$\begin{array}{rcl} r : \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \{0\} \times \{0,1\} \times \{0,1,2\} \times \cdots \times \{0, \ldots, n-1\} \\ \sigma & \mapsto & (r_1(\sigma), r_2(\sigma), \ldots, r_n(\sigma)) \end{array}$$

oô $r_i(\sigma)$ est le nombre d'entiers $j \leqslant i$ tels que $\sigma(j) > \sigma(i)$. Remarquons que la donnée de $r(\sigma)$ détermine uniquement σ, autrement dit que r est une bijection. En effet, la connaissance de $r_n(\sigma)$ permet de retrouver la valeur de $\sigma(n)$. Forts de cela, on retrouve ensuite de même $\sigma(n-1)$ en utilisant $r_{n-1}(\sigma)$. Et ainsi de suite.

Notons également que, par définition, i est un record de σ si, et seulement si $r_i(\sigma) = 0$. On en déduit que le polynôme P_n est égal à :

$$P_n(x) = \sum_{r_1=0}^{0} \sum_{r_2=0}^{1} \sum_{r_3=0}^{2} \cdots \sum_{r_n=0}^{n-1} x^{f(r_1)+f(r_2)+\cdots+f(r_n)}$$

oô f est la fonction qui associe 1 et 0 et 0 à tous les autres nombres. La somme précédente peut se réécrire comme un produit comme suit :

$$P_n(x) = \left(\sum_{r_1=0}^{0} x^f(r_1) \right) \left(\sum_{r_2=0}^{1} x^f(r_2) \right) \left(\sum_{r_3=0}^{2} x^f(r_3) \right) \cdots \left(\sum_{r_n=0}^{n-1} x^f(r_n) \right)$$

c'est-à-dire $P_n(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$.

J. Les OIM

1 Sujets des OIM 2009

Problème 1

Soit n un entier strictement positif et a_1, ... , a_k avec $k \geq 2$, des entiers strictement positifs distincts appartenant à l'ensemble $\{1 , \cdots ,n\}$ tels que n divise $a_i(a_{i+1} - 1)$ pour i=1, ... , $k - 1$.

Montrer que n ne divise pas $a_k(a_1 - 1)$.

Problème 2

Soit ABC un triangle et O le centre de son cercle circonscrit.
Les points P et Q sont des points intérieurs aux côtés CA et AB respectivement.
Soit K, L et M les milieux respectifs des segments BP, CQ et PQ.
Γ est le cercle passant par K, L et M.
On suppose que la droite (PQ) est tangente au cercle Γ.

Montrer que $OP = OQ$.

Problème 3

Soit s_1, s_2, s_3, ... une suite strictement croissante d'entiers strictement positifs telle que les sous-suites

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \qquad \text{et} \qquad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

soient deux progressions arithmétiques.

Montrer que la suite s_1 , s_2, s_3, ... est aussi une progression arithmétique.

Problème 4

Soit ABC un triangle tel que $AB = AC$.
Les bissectrices de $\widehat{CAB}$ et $\widehat{ABC}$ rencontrent respectivement les côtés BC et CA en D et E.
Soit K le centre du cercle inscrit dans le triangle ADC. On suppose que $\widehat{BEK} = 45°$.

Trouver toutes les valeurs possibles de $\widehat{CAB}$.

Problème 5

Déterminer toutes les fonctions f de l'ensemble des entiers strictement positifs dans l'ensemble des entiers strictement positifs telles que, pour tous entiers strictement positifs a et b, il existe un triangle non aplati dont les longueurs des côtés sont

$$a, \quad f(b) \quad \text{et} \quad f(b + f(a) - 1)$$

Problème 6

Soit a_1, a_2, ... a_n des entiers strictement positifs distincts et soit M un ensemble de $n - 1$ entiers strictement positifs ne contenant pas $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.
Une sauterelle doit faire des sauts le long de l'axe réel; partant du point O, elle doit effectuer n sauts vers la droite de longueurs a_1, a_2, ... a_n dans l'ordre de son choix.

Montrer que la sauterelle peut choisir l'ordre de ses sauts de façon à ne passer par aucun point de M

2 Sujets des OIM 2008

Problème 1
Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus, et soit H son orthocentre.
Le cercle passant par H et dont le centre est le milieu de [BC] coupe la droite (BC) en A_1 et A_2.
De même, le cercle passant par H et dont le centre est le milieu de [CA] coupe la droite (CA) en B_1 et B_2, et le cercle passant par H et dont le centre est le milieu de [AB] coupe la droite (AB) en C_1 et C_2.

Montrer que A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 sont cocycliques.

Problème 2
(a) Montrer que $\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1$
pour tous nombres réels x, y, z, différents de 1 et vérifiant $xyz=1$.

(b) Montrer qu'il existe une infinité de triplets de nombres rationnels x, y, z, différents de 1 et vérifiant $xyz=1$, pour lesquels l'inégalité ci-dessus est une égalité.

Problème 3
Montrer qu'il existe une infinité d'entiers strictement positifs n tels que n^2+1 possède un diviseur premier strictement supérieur à $2n+\sqrt{2n}$.

Problème 4
Trouver toutes les fonctions f de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$ telles que $\frac{f(w)^2+f(x)^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$
pour tous nombres réels strictement positifs w, x, y, z, vérifiant $wx=yz$.

Problème 5
Soient n et k des entiers strictement positifs tels que $k\geq n$ et $k-n$ est pair.
On suppose données $2n$ lampes numérotées de 1 à $2n$; chacune peut être allumée ou éteinte.
Au début, toutes les lampes sont éteintes.
Une opération consiste à allumer une lampe éteinte ou bien à éteindre une lampe allumée.
On considère des séquences constituées d'opérations successives.
Soit N le nombre de séquences constituées de k opérations et aboutissant à l'état où les lampes de 1 à n sont allumées et les lampes de $n+1$ à $2n$ sont éteintes.
Soit M le nombre de séquences constituées de k opérations et aboutissant à l'état où les lampes de 1 à n sont allumées et les lampes de $n+1$ à $2n$ sont éteintes, mais où les lampes de $n+1$ à $2n$ n'ont jamais été allumées.
Déterminer le rapport $\frac{N}{M}$.

Problème 6
Soit ABCD un quadrilatère convexe tel que BA $\neq$ BC.
Les cercles inscrits dans les triangles ABC et ADC sont notés respectivement ω_1 et ω_2.
On suppose qu'il existe un cercle ω qui est tangent à la demi-droite [BA) au-delà de A, tangent à la demi-droite [BC) au-delà de C, et qui est aussi tangent aux droites (AD) et (CD).

Montrer que les tangentes communes extérieures à ω_1 et à ω_2 se coupent en un point de ω.

K. Le coin des élèves

Un petit aperçu sur l'ambiance du côté de la salle commune.

Le soleil, présent presque toute la semaine,
a permis à tous d'aller travailler ou se détendre dehors.

Les parties de cartes à n'en plus finir.
Les voix de certains, surexcités par le jeu, traversaient les murs...

Voyez les attendre le résultat de la fameuse chasse au trésor :
attentifs et intrigués...

Mais quel est donc ce « prix » décerné aux gagnants ?

Luc ⇔ Thomas (lequel ? on a du mal à les distinguer ces jumeaux !)
explique à Aurélien la technique du Rubik's Cube.

La joyeuse bande de Matheux-Matheuses, fière de leur banderole des 50e OIM.

La fine équipe accro du mac, du pc et des cafés !