STAGE OLYMPIQUE DE GRÉSILLON 2010

Du 19 au 26 août 2010

Avant-propos

Le stage de Grésillon a été organisé par l'association Animath.

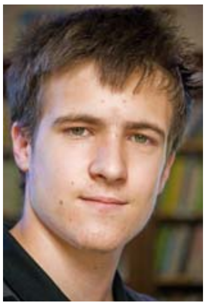
Son objet a été de rassembler les lauréats des diverses compétitions et de les faire travailler sur des exercices en vue de la formation de l'équipe qui représentera la France à l'Olympiade Internationale de Mathématiques à Amsterdam en juillet 2011. Cette année une attention particulière a été apportée au recrutement de collégiens brillants en vue de les préparer aux Olympiades Internationales pendant plusieurs années.

Nous tenons à remercier le chateau de Grésillon pour son excellent accueil.


Pierre Bertin


Igor Kortchemski


Bodo Lass


Emmanuel Lecouturier


François Lo Jacomo


Louis Nebout


Marc Sage


Ilia Smilga


Antoine Taveneaux


Léon le Frelon


Gaspard le Lézard


Barnabé le Scarabé

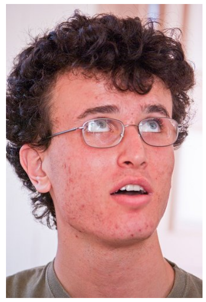

Anouk le Bouc

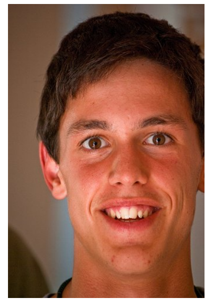

Jacouille la Grenouille

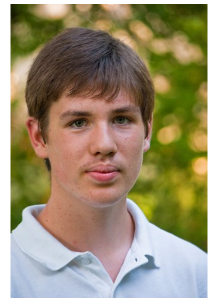

Monique la Tique

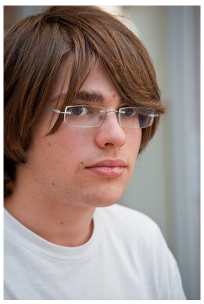
Michel Aflak-Kattar

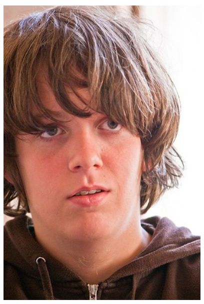

Michel Beaughon


Andrea Bianchi

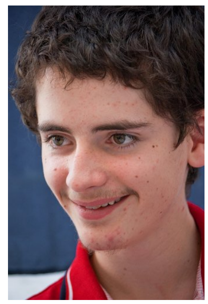

Federico Borghese

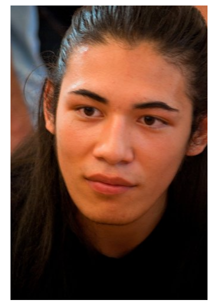

Sébastien Chevaleyre


Marc Chevalier


Gabriel Cochet


Guillaume Conchon-Kerjan

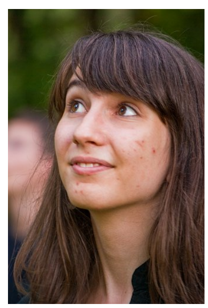

Marc De Visme

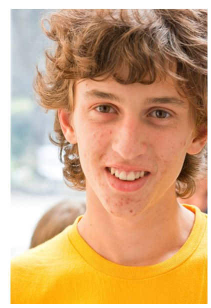

Léonard Dekens


Jérémy Denechaud


Briac Desmarchelier

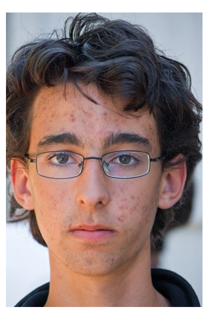

Jonathan Dong


Sarah Fachada-Dury


Maxime Faron

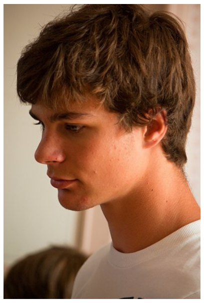

Lucas Flammant


Léonard Fleutot

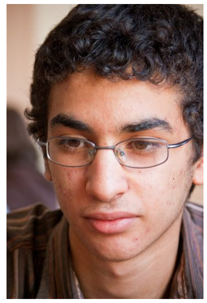

Aymeric Fromherz

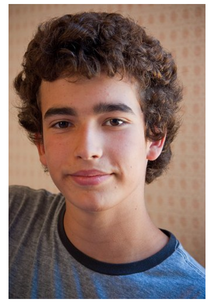

Diane Gallois-Wong

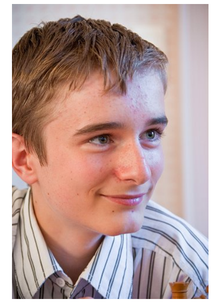

Louise Gassot


Grégoire Genest


Walid Ghanem

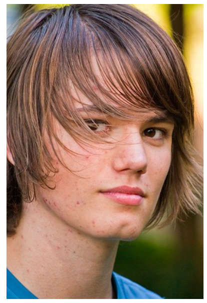

Rugdy Joabar

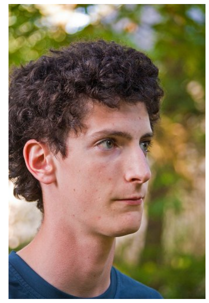

Jean Kieffer

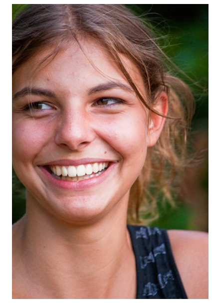

Max Langhof


Matthieu Lequesne


Matthias Löning

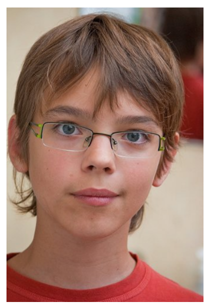

Baptiste Louf

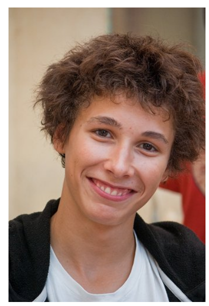

Antoine Michon

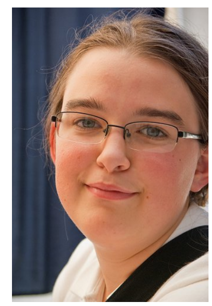

Roxane Morel


Vincent Mouly

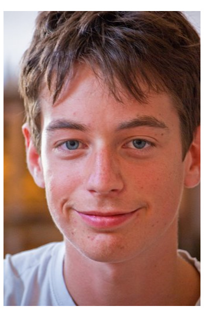

Séginus Mowlavi

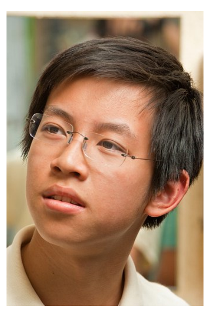

Arthur Nebout

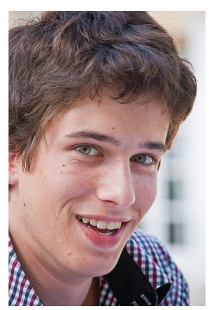

François Neel

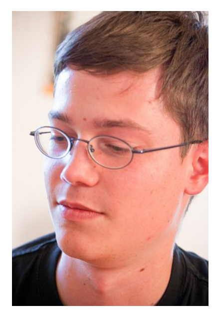

Auriane Perrin


Nicolas Pinson


Mathieu Piquerez


Victor Quach


Wojciech Sitarz


Alexander Thomas


Estelle Varloot


Gaëtan Vignoud

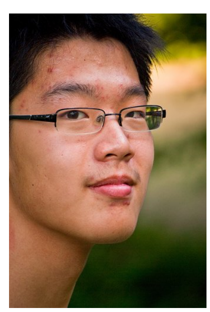

Wenda Zhou

Table des matières

II Déroulement du stage **9**

III Premier jour **11**
1 Énoncé des évaluations . . . 11
2 Solution des évaluations . . . 12
3 Exercices supplémentaires du premier jour . . . 15
1 Énoncés . . . 15
2 Solutions . . . 15

IV Groupe des Débutants **17**
1 Cours . . . 17
1 Exercices vus en cours de Stratégies de Base . . . 17
2 Exercices vus en cours d'arithmétique . . . 20
2 TD . . . 22
1 Premier TD de Stratégies de Base . . . 22
2 Deuxième TD de Stratégies de Base . . . 32
3 TD de Géométrie . . . 34
4 TD d'Arithmétique . . . 40
3 Exercices du jour . . . 45
1 Énoncés . . . 45
2 Solutions . . . 46
4 Tests . . . 49
1 Test de Stratégies de Base (3h) . . . 49
2 Test de Géométrie (3h) . . . 50
3 Test d'Arithmétique (3h) . . . 53

V Groupe des Avancés **55**
1 Cours . . . 55
1 Polynômes . . . 55
2 Inégalités . . . 72
3 Corrections . . . 78
2 TD . . . 82
1 Combinatoire . . . 82
2 Arithmétique, première partie . . . 91
3 Arithmétique, deuxième partie . . . 96
4 Inégalités . . . 98

5 Géométrie 99
6 Équations fonctionnelles 105
3 Exercices du jour 108
1 Énoncés 108
2 Solutions 109
4 Tests 112
1 Test de Combinatoire et Polynômes (3h) 112
2 Test d'arithmétique et d'inégalités (3h) 114
3 Test de Géométrie (4h) 117

VI Conférence : Les polytopes réguliers en dimension quatre, par Ilia Smilga 123

VII Activités ludiques 135
1 Énigmes du jour 135
1 Énoncés 135
2 Solutions 136
2 Chasse au trésor 138
1 Règles de la chasse au trésor 138
2 Énoncés 139
3 Solutions 143

VIII Citations mémorables 151

IX Annexe : test de sélection au stage de Grésillon 2010 153

II. Déroulement du stage

La journée du 19 août a été consacrée à l'accueil des élèves. Après leur installation au château, nous avons procédé à une première évaluation des élèves afin de juger essentiellement de leurs connaissances des objets mathématiques manipulés habituellement dans des problèmes d'olympiades. Cette évaluation avait la forme d'un oral, avec une préparation d'environ 30 minutes. Pendant le reste de la journée, les élèves déjà arrivés au château ont pu essayer de résoudre des exercices classés par niveau ou simplement commencer à sympathiser avec les autres stagiaires. Ce stage regroupait des élèves d'âge et de niveaux assez différents. C'est pourquoi, à l'issue de l'évaluation de ce premier jour nous avons fixé deux groupes de niveau (débutants et avancés) pour la suite du stage. La répartition en groupes a été effectuée en fonction des connaissances des élèves, afin de proposer un des cours sur des thèmes classiques aux débutants et des cours plus pointus aux avancés, qui ont déjà acquis les notions basiques des mathématiques d'Olympiades. Un programme détaillé du stage se trouve ci-après :

		Débutants	Avancés
Jeudi	journée	Arrivée, accueil des élèves et première évaluation	
Vendredi	9h-12h	Cours de Stratégie de Base	Cours de Combinatoire
	14h-17h	TD de Stratégie de Base	Cours sur les Polynômes
	21h -22h	Présentation des OIM	
Samedi	9h-12h	TND de Stratégie de Base	TD de Combinatoire
	14h-17h	Test	
	17h30-18h30	Correction du Test	
Dimanche	9h-12h	Cours de Géométrie	Cours d'Arithmétique
	14h-17h	TD de Géométrie	Cours d'Inégalité
	21h-22h	Conférence sur les Polytopes réguliers	
Lundi	9h-12h	TD de Géométrie	TD d'Arithmétique et d'Inégalités
	14h-17h	Test	
	17h30-18h30	Correction du Test	
Mardi	9h-12h	Cours d'Arithmétique	Cours de Géométrie
	14h-19h	Chasse au Trésor	
	21h-22h	Conférence autour des Médailles Fields	
Mercredi	9h-12h	TD d'Arithmétique	TND de Géométrie
	14h-18h	Test	
	18h-19h	Correction du Test	

Le groupe des Débutants a étudié les stratégies de base de résolution d'exercices puis la géométrie (des rappels des principales connaissances de base des programmes de collège et de lycée) et enfin l'arithmétique. Pour le groupe des Avancés, la partie « cours » a été moins présente, et nous avons essayé de mettre l'accent sur la résolution d'exercices ; les thématiques des séances de travails étaient : la combinatoire, l'arithmétique, les inégalités, les polynômes et la géométrie.

Les séances d'exercices, appelés TD (travaux dirigés) étaient des séances « classiques », pendant lesquelles les élèves réfléchissaient avec l'aide du professeur sur un certain nombre de problèmes. Les solutions étaient présentées au fur et à mesure par l'encadrant ou bien par un élève ayant trouvé la solution.

En plus des cours et de ces séances d'exercices, les élèves ont eu à plancher sur trois tests en temps limité. Chaque test portait sur une partie de ce que les élèves ont étudié lors du stage. Ces tests comptaient entre 4 et 5 exercices et les élèves disposaient de 3 ou 4 heures pour aller le plus loin possible. Chaque groupe de niveau avait un test spécifique en fonction de ce qu'ils avaient étudié les deux derniers jours. À l'issue de ces tests, une correction d'une heure était proposée aux élèves pour souligner les difficultés et les points importants des exercices sur lesquels ils avaient planché.

Tous les jours, deux exercices par niveau et une énigme mathématique ont été proposés aux élèves pendant leur temps libre. Une petite récompense gourmande était prévue pour les premières personnes à résoudre ces exercices.

Une chasse au trésor mathématique a été organisée pendant le stage pour permettre aux élèves de travailler en groupe et de se détendre un peu en extérieur (et de profiter du domaine du château de Grésillon). Le jeu consistait a résoudre des énigmes et des exercices (qui menaient vers l'énigme suivante) pour aller de proche en proche jusqu'à l'énigme finale.

En dehors du travail sur les mathématiques, 3 conférences ont été organisées. François a présenté le compétition des Olympiades Internationales aux élèves, Igor a parlé de la Médaille Fields (dont le dernier crue est arrivé le premier jour de notre stage) ainsi que des travaux de Stas Smirnov, et enfin Ilia nous a parlé des polytopes convexes réguliers en dimension 4.

Quelques liens utiles pour poursuivre le travail réalisé pendant ce stage :
- Le site d'Animath : `www.animath.fr`
- Le site MathLinks : `www.mathlinks.ro`
- Le site du château de Grésillon : `www.gresillon.org`

III. Premier jour

1 Énoncé des évaluations

Exercice 1 Combien y a-t'il de 0 à la fin de 10! ? Et à la fin de 2008! ? (où $n! = 1 \times 2 \times ... \times n$)

Exercice 2 Trouver un polynôme P (non nul) à coefficients entiers tel que $P(\sqrt{2008}+\sqrt{2009}) = 0$.

Exercice 3 On a 99 fiches, sur chaque fiche est écrit un nombre compris entre 1 et 99. Si on prend n'importe quelles fiches et que l'on additionne les nombres qui s'y trouvent le résultat n'est pas un multiple de 100. Montrer que sur toutes les fiches il est écrit le même nombre.

Exercice 4 Si $x^6 \in \mathbb{Q}$ et $x^7 \in \mathbb{Q}$ montrer que $x \in \mathbb{Q}$. Pouvez vous généraliser ?

Exercice 5 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que :

$$f(n) + f\left(f(n)\right) + f\left(f\left(f(n)\right)\right) = 3n.$$

Exercice 6 Trouver toutes les solution entières de l'équation :

$$x^2 + y^2 = 3z^2.$$

Exercice 7 Un graphe complet de n sommets est par définition un graphe qui contient toutes les arrêtes possibles.

Dans un graphe complet de 6 sommets on colorie les arrêtes soit en jaune soit en rouge. Montrer qu'il est toujours possible de trouver un triangle rouge ou un triangle jaune.

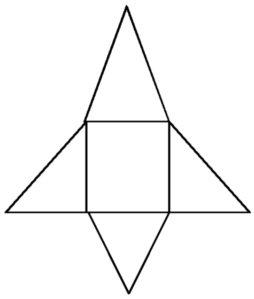
Exercice 8 Soient $x_1, x_2, ..., x_n$ des nombres réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{x_1}{x_n} + \frac{x_2}{x_{n-1}} + ... + \frac{x_n}{x_1} \geq n.$$

Exercice 9 Combien y a t'il de diviseurs de 68^{2008} ?

Exercice 10 E est un ensemble qui contient n éléments. Combien existe-t-il de couples (A, B) de deux ensembles tel que $A \subset B \subset E$?

Exercice 11 Quelle est le volume de la pyramide dont voici le patron, si la base est un carré de coté 1 ?



Exercice 12 Soit $\mathcal{C}$ un demi-cercle de diamètre $[AB]$. Soit C un point du segment $[AB]$ et soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les demi-cercles de diamètres respectifs $[AC]$ et $[BC]$, situés du même côté de (AB) que $\mathcal{C}$. Soit M le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la perpendiculaire (AB) passant par C. Soient N et P les intersections respectives de (AM) avec $\mathcal{C}_1$ et (BM) avec $\mathcal{C}_2$.

1. Montrer que la zone situé entre le demi-cercle $\mathcal{C}$ et les demi-cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ a la même aire qu'un disque de diamètre $[CM]$.
2. Montrer que la droite (NP) est tangente $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

2 Solution des évaluations

Solution de l'exercice 1

On note $v_p(n!)$ l'exposant de la plus grande puissance de p divisant $n!$, où p est premier. Ici, il le nombre de 0 à la fin de $n!$ est $min(v_5(n!), v_2(n!))$ (un 0 résultant de la multiplication d'un facteur 2 et d'un facteur 5). Or il est clair qu'il y a plus de facteurs 2 dans $n!$ que de facteurs 5 donc le nombre de 0 à la fin de $n!$ est $v_5(n!)$. Par la formule de Legendre,

$$v_p(n!) = \sum_{i=1}^{+\infty} [\frac{n}{p^i}].$$

Pour $n = 2010$, on obtient $v_5(2010!) = [\frac{2010}{5}] + [\frac{2010}{25}] + [\frac{2010}{125}] + [\frac{2010}{625}] = 402 + 80 + 16 + 3 = 501$.

Solution de l'exercice 2

On pose $x = \sqrt{2008}+\sqrt{2009}$. On a : $x^2 = 2008+2009+2\sqrt{2008 \times 2009}$. Donc $4\times 2008\times 2009 = (x^2 - 2008 - 2009)^2$. D'où $x^4 - 8034x^2 + 1 = 0$.

Solution de l'exercice 3

On remplace plus généralement 99 par n. On note c_1, c_2, ..., c_n les numéros des cartes et $s_i = c_1 + ... + c_i$. Comme il y a n résidus non nul modulo $n+1$ et qu'il y a n termes s_1, s_2, ..., s_n, les s_i ont tous une congruence distincte (et non nulle par hypothèse) modulo $n+1$. Donc $c_2 \equiv s_i[n+1]$ pour un i. On doit avoir $i < 2$ car sinon on trouverait une somme de numéros de cartes divisible par $n+1$. Donc $c_2 \equiv c_1[n+1]$ donc $c_2 = c_1$ (les c_i étant dans $\{1, ..., m\}$). En appliquant ce raisonnement à une rotation cyclique des c_i on obtient donc qu'ils sont tous égaux.

Solution de l'exercice 4

On a $x = \frac{x^7}{x^6} \in \mathbb{Q}$. Plus généralement, si m et n sont premiers entre eux et si x^m et x^n sont rationnels, alors x est rationnel. En effet par le théorème de Bezout, $\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $mu + nv = 1$. Donc $x = (x^m)^u.(x^n)^v \in \mathbb{Q}$.

Solution de l'exercice 5

On remarque que l'identité est une solution. Montrons que c'est la seule.

Premièrement, f est injective : $f(a) = f(b) \implies f(f(a)) = f(f(b)) \implies f(f(f(a))) = f(f(f(b)))$. Donc $3a = 3b$ donc $a = b$.

Pour $n = 0$, comme $f(k) \geq 0$ on obtient $f(0) = 0$. Montrons par récurrence sur forte sur n que $f(n) = n$. En effet si c'est vrai jusqu'au rang $n \geq 0$, comme f est injective, $f(k) \geq n+1$ si $k \geq n+1$. Donc $f(n+1) \geq n+1$ donc $f(f(n+1)) \geq n+1$ donc $f(f(f(n+1))) \geq n+1$. D'où $f(n+1) = 3(n+1) - f(f(n+1)) - f(f(f(n+1))) \leq n+1$. Donc $f(n+1) = n+1$. D'où le résultat.

Solution de l'exercice 6

Il y a deux méthodes, les deux reposant sur le principe de descente infinie. La première méthode consiste à remarquer que modulo 4, comme un carré est congru à 0 ou 1, on a 4 divise x^2, y^2 et z^2 donc (x,y,z) solution $\implies (\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2})$ solution. Par le principe de descente infinie on en déduit aisément que $(x,y,z) = (0,0,0)$ est la seule solution.

La deuxième méthode consiste à remarquer que modulo 3, un carré étant congru à 0 ou 1, 3 divise x et y donc $x = 3x'$ et $y = 3y'$ donc $3(x'^2 + y'^2) = z^2$ donc $z = 3z'$ donc $x'^2 + y'^2 = 3z'^2$ donc $(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z}{3})$ et on conclut de même que précédemment.

Solution de l'exercice 7

On considère un sommet X. Il a 5 arêtes. Il y a donc au moins 3 arêtes d'une même couleur. Sans perte de généralité, on suppose q'il existe au moins 3 arêtes rouges. On considère A, B et C les 3 sommets liés à X par ces 3 arêtes. Si une des arêtes AB, BC ou AC est rouge, on a un triangle monochrome, sinon les 3 arêtes AB, BC et AC ont même couleur (jaune) donc on a aussi un triangle monochrome.

Solution de l'exercice 8

Première version : On a, pour tous réels strictement positifs x et y :

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 \geq 0,$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} &= \frac{x^2+y^2}{xy} \\ &\geq \frac{2xy}{xy} \\ &= 2. \end{aligned}$$

On groupe les termes deux par deux (sauf, si n est impair, le terme du milieu qui reste tout seul) :

$$\frac{x_1}{x_n} + \frac{x_2}{x_{n-1}} + \ldots + \frac{x_n}{x_1} = \left(\frac{x_1}{x_n} + \frac{x_n}{x_1}\right) + \left(\frac{x_2}{x_{n-1}} + \frac{x_{n-1}}{x_2}\right) + \ldots$$

Chaque paire de termes est donc supérieure ou égale à 2, et le terme du milieu, s'il existe, vaut 1. Donc la somme est supérieure ou égale à n.

Deuxième version :

On applique l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\frac{1}{n}\left(\frac{x_1}{x_n}+\frac{x_2}{x_{n-1}}+\ldots+\frac{x_n}{x_1}\right) \geq \sqrt[n]{\frac{x_1}{x_n}\frac{x_2}{x_{n-1}}\cdots\frac{x_n}{x_1}}=1$$

<u>*Solution de l'exercice 9*</u>

On a $68 = 2^2 \cdot 17$, d'où $68^{2008} = 2^{4016} \cdot 17^{2008}$. Tous les nombres de la forme $2^n \cdot 17^m$, avec $0 \leq n \leq 4016$ et $0 \leq m \leq 2008$, sont donc des diviseurs distincts de 68^{2008}, et réciproquement, tous ses diviseurs ont cette forme. Il y a 4017 valeurs possibles pour n et 2009 valeurs possibles pour m, d'où un total de $4017 \cdot 2009 = 8070153$ diviseurs.

<u>*Solution de l'exercice 10*</u>

Version bourrine :

On choisit d'abord un ensemble A de k éléments dans E. Il y a $\binom{n}{k}$ possibilités pour A. Puis B de 2^{n-k} façons. En effet pour construire B on complète A avec un sous ensemble de $E \setminus A$ qui a $n-k$ éléments. D'où le nombre de couples cherché est $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k} = (2+1)^n = 3^n$ par la formule du binôme de Newton.

Version astucieuse :

Pour définir un tel couple, il suffit de déterminer, pour chaque élément de E, s'il appartient aux deux ensembles, à A mais pas à B, ou à aucun des deux. Il y a donc 3 possibilités pour chaque élément, donc 3^n possibilités au total. (Si on voulait rédiger vraiment proprement, on devrait exhiber une bijection entre l'ensemble de tels couples et l'ensemble des applications de E dans $\{0,1,2\}$).

<u>*Solution de l'exercice 11*</u>

On appelle $ABCD$ le carré qui forme la base de la pyramide, et O son sommet, de sorte que la face ABO soit celle qui correspond au triangle équilatéral. Le côté AO est alors perpendiculaire à AD, donc il se trouve dans le plan perpendiculaire à AD et passant par A. De même, le côté BO se trouve dans le plan perpendiculaire à BC et passant par B. Il n'est pas difficile de voir qu'il s'agit du même plan dans les deux cas, donc la face ABO est perpendiculaire à la base. Donc la hauteur de la pyramide coïncide avec la hauteur de ABO ; or la hauteur d'un triangle équilatéral de côté 1 vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Comme l'aire de la base vaut 1, le volume de la pyramide est donc

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

<u>*Solution de l'exercice 12*</u>

1. L'aire de la zone est $\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}(AB^2 - AC^2 - CB^2)$. Or $AB = AC + CB$ donc l'aire de la zone est $\frac{\pi}{4}AC \cdot CB$. Or $AC \cdot CB = MC^2$. En effet AMC et MCB étant semblables, $\frac{AC}{MC} = \frac{MC}{CB}$.
2. On sait que le triangle AMB est rectangle, et que donc $\widehat{ABM} = \frac{\pi}{2} - \widehat{MAC} = \widehat{AMC}$. D'autre part, l'angle $\widehat{ANC}$ est inscrit dans $\mathcal{C}_1$, et s'appuie sur son diamètre, donc il est droit, et donc $\widehat{MNC}$ aussi. De même, $\widehat{MPC}$ est droit. On en déduit que les points M, N, C et P sont cocycliques, d'où $\widehat{NMC} = \widehat{NPC}$. Finalement, on obtient $\widehat{CBP} = \widehat{CPN}$. Par

le théorème de l'angle inscrit (dégénéré), on obtient que NP est tangent à $\mathcal{C}_2$ en P, et de même pour $\mathcal{C}_1$ et N.

3 Exercices supplémentaires du premier jour

1 Énoncés

Exercice 1 Sur un échiquier (8x8) on grise 31 cases. Montrer qu'on peut y trouver trois cases adjacentes non grisées qui forment un « coin » (ou une « lettre L »).

Exercice 2 Soit un triangle ABC tel que l'angle $\widehat{BAC}$ soit égal à $6O$, et la médiane issue de B ait la même longueur que la hauteur issue de C. Montrer que le triangle est équilatéral.

Exercice 3 On dispose de trois verres identiques, dont un plein et deux vides. À chaque coup, on a le droit de choisir deux verres et de répartir équitablement l'eau entre les deux. Peut-on, après un nombre fini de coups, répartir équitablement l'eau entre les trois verres ?

Exercice 4 Soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite telle que :
(i) $u_0 = 5$
(ii) $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$
Montrer que $u_{1000} > 45$.

2 Solutions

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Divisons l'échiquier 8x8 en 16 petits carrés 2x2. Il y a 33 cases non grisées sur l'échiquier, donc par le principe des tiroirs, il existe un petit carré 2x2 avec trois cases non grisées. Ces trois cases forment le "coin" souhaité.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Notons CH la hauteur issue de C et BM la médiane issue de B. Le triangle AHC est rectangle en H et l'angle $\widehat{A}$ vaut 60°. Donc la longueur AH vaut $AC\sin(60°) = AC/2$. Et $AC/2 = AM$ puisque BM est une médiane. Comparons les deux triangles AMB et AHC : $AH = AM$ comme on vient de le voir, $BM = CH$ par hypothèse et l'angle $\widehat{A}$ est le même. Normalement, ce n'est pas suffisant pour montrer que les triangles sont égaux, il y a deux cas à considérer, mais c'est un peu casse-pieds. Supposons qu'on l'a fait. Maintenant on sait que les troisièmes côtés sont égaux : $AB = AC$. Dans le triangle ABC on a donc deux côtés égaux et un angle de 60°, donc un triangle équilatéral.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>
C'est impossible. Avant de chercher à le démontrer, commencons par les quelques premières étapes.
Au début il y a un verre plein et deux verres vides, représentons les par le triplet $(1, 0, 0)$. La première étape consiste a répartir le verre plein avec un verre vide, ce qui donne un verre vide et deux verres demi-pleins : $(1/2, 1/2, 0)$. À l'étape suivante, on a $(1/2, 1/4, 1/4)$. De ces premiers exemples, on peut intuiter le résultat suivant : si on écrit le triplet $(p_1/q_1, p_2/q_2, p_3/q_3)$ sous forme

de fraction irréductible, alors q_1, q_2 et q_3 sont des puissances de 2. Par récurrence : c'est vrai pour $(1, 0, 0)$, et si on répartit deux verres :

$$\frac{\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}}{2} = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{2 q_1 q_2}$$

et si q_1 et q_2 sont des puissances de 2, alors $2q_1q_2$ aussi. On ne peut donc jamais arriver à l'état où tout est réparti équitablement $(1/3, 1/3, 1/3)$.

Solution de l'exercice 4

En élevant au carré, $u_{n+1}^2 > u_n^2 + 2$ donc $u_n^2 > 2n + 25$ et donc $u_{1000} > \sqrt{2 \times 1000 + 25} = 45$ D'où le résultat.

IV. Groupe des Débutants

1 Cours

1 Exercices vus en cours de Stratégies de Base

Énoncés

Exercice 1 1 - Montrer que quel que soit n, parmi $(n+1)$ entiers quelconques $a_0, a_1 ... a_n$, on peut en trouver deux a_i et a_j tels que $a_i - a_j$ soit divisible par n.

2 - Montrer que pour tout n, il existe un multiple de n d'au plus n chiffres, tous égaux à 0 ou 1.

Exercice 2 On place 500 points sur une table de $2m \times 1m$. Montrer qu'on peut en trouver trois formant un triangle d'aire inférieure à $50cm^2$.

Exercice 3 On place 51 points au hasard sur un carré de côté 1. Montrer qu'on peut en trouver au moins 3 à l'intérieur d'un cercle de rayon $\frac{1}{7}$ (ce cercle peut déborder les cotés du carré).

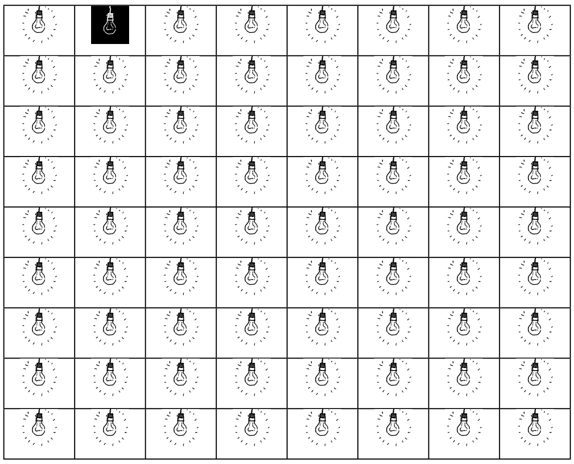
Exercice 4 On place 6 points à l'intérieur d'un rectangle de dimension 4×3. Montrer qu'on peut en trouver deux dont la distance est inférieure ou égale à $\sqrt{5}$.

Exercice 5 Montrer par récurrence que pour tout entier $n > 0$, $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$. En déduire que cette somme est toujours strictement inférieure à 2. Montrer par une méthode analogue que $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + ... + \frac{1}{n^3} < \frac{5}{4}$.

Exercice 6 a et b étant des réels strictement positifs, $a \neq 1$, on considère la suite définie par récurrence par : $u_0 = u$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = a^n u + b\frac{a^n - 1}{a-1}$.

Exercice 7 Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on peut trouver un multiple de 2^n de n chiffres tous égaux à 1 ou 2.

Exercice 8 On considère un tableau carré de 8 lignes sur 8 colonnes, avec dans chaque case une lampe et à l'extrémité de chaque ligne et de chaque colonne, un interrupteur (voir figure). L'interrupteur change l'état de toutes les lampes de la ligne ou de la colonne : celles qui sont allumées s'éteignent et les autres s'allument. Au début, une seule lampe est éteinte. Peut-on par un nombre fini d'actions éteindre toutes les lampes ?



Exercice 9 On écrit sur le tableau les entiers de 1 à 2010. A chaque étape, on en efface deux et on écrit à la place leur différence. Le nombre d'entiers diminue donc de 1. Le dernier entier obtenu à la deux mille neuvième étape peut-il être nul ?

Exercice 10 6 arbres se trouvent aux 6 sommets d'un hexagone régulier. Sur chaque arbre se pose un oiseau. Toutes les minutes, deux oiseaux simultanément vont de leur arbre à l'un des deux arbres voisins. Peut-on avoir, après un certain nombre de minutes, tous les oiseaux regroupés sur un même arbre ?

Solutions

Solution de l'exercice 1 1 - On classe les nombres dans les n classes modulo n : $\{kn\}, \{kn+1\}...\{kn+(n-1)\}$. Au moins une classe contient au moins deux entiers, donc leur différence est divisible par n.

2 - On utilise ce premier résultat avec la suite : $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 11, a_3 = 111$ etc... : a_i est l'entier formé de i chiffres tous égaux à 1. Deux d'entre eux ont ne différence multiple de n, et cette différence a au plus n chiffres tous égaux à 0 ou 1.

Solution de l'exercice 2 Pour appliquer le principe des tiroirs, donc trouver trois points dans le même tiroir, il faut diviser notre rectangle en moins de $\frac{500}{2} = 250$ tiroirs, par exemple, 200 carrés de $10cm \times 10cm$. De fait, il y aura un carré de $100cm^2$ qui contiendra 3 points, mais cela prouve-t-il que l'aire du triangle en question est inférieure à $50cm^2$? Il faut compléter la preuve par un raisonnement géométrique. Un triangle intérieur à un rectangle a pour aire au maximum la moitié de l'aire du rectangle. On peut découper le rectangle en trois rectangles contenant chacun un morceau du triangle, de sorte qu'il soit évident que l'aire de chaque morceau de triangle est au plus égale à l'aire du rectangle qui le contient. Donc si l'on trouve 3 points intérieurs à un carré d'aire $100cm^2$, l'aire du triangle qu'ils forment est bien inférieure à $50cm^2$.

Solution de l'exercice 3 Pour appliquer le principe des tiroirs, il faut moins de $\frac{51}{2}$ tiroirs, soit au plus 25. Couvrir un carré avec 25 cercles est moins facile que le couvrir avec 25 carrés, de côté $\frac{1}{5}$. Mais la diagonale d'un tel carré mesure $\frac{\sqrt{2}}{5} < \frac{2}{7}$, de sorte que chacun de ces carrés est inclus dans un cercle de rayon $\frac{1}{7}$. Les trois points qui se trouvent à l'intérieur d'un même carré se trouvent a fortiori à l'intérieur d'un même cercle.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Si l'on plaçait 7 points, le problème serait facile, il suffirait de diviser le rectangle en six rectangles 2×1. Mais on n'a que 6 points, il faut donc trouver un autre découpage astucieux. La figure nous montre quel découpage choisir. A l'intérieur d'un de ces six polygones, il y a deux points au moins, et leur distance est nécessairement inférieure à la plus grande diagonale du polygone, donc à $\sqrt{5}$.

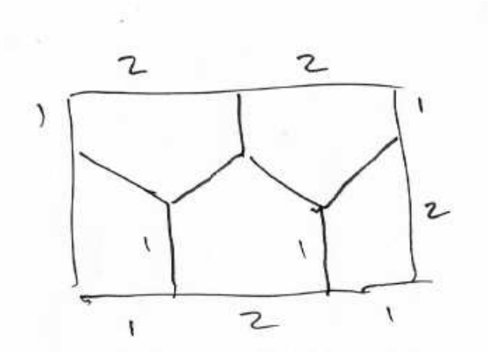


FIG. 1 – Exercice 4

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Pour $n = 1$, la relation est manifestement vérifiée ; $1 \leq 2 - \frac{1}{1}$. Or si elle est vérifiée pour n, elle l'est encore pour $n+1$, car au membre de gauche on ajoute $\frac{1}{(n+1)^2}$ alors que le membre de droite augmente de $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ qui est manifestement plus grand que $\frac{1}{(n+1)^2}$. Or pour tout n, $2 - \frac{1}{n} < 2$.

Concernant la somme des inverses des cubes, il faut passer par une formule analogue : si, pour une constante k, $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + ... + \frac{1}{n^3} \leq k - \frac{1}{2n(n+1)}$, alors cette relation reste vraie au rang $n+1$ car $\frac{1}{(n+1)^3} < \frac{1}{2n(n+1)} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. La constante k dépend de l'initialisation de la récurrence. Si l'on démarre la récurrence en $n = 1$, il faut poser $k = \frac{5}{4}$ pour que la relation soit vraie en 1. Mais on peut aussi initialiser la récurrence en $n = 2$, ce qui permet de prendre une meilleure constante $k = \frac{29}{24}$. Et pour tout $n \geq 3$, $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + ... + \frac{1}{n^3} < \frac{65}{54} - \frac{1}{2n(n+1)}$ (ce qui n'est pas vrai pour $n = 1$ ni $n = 2$). En revanche, $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + ... + \frac{1}{n^3} < \frac{65}{54}$ est vrai pour tout n.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> Cela se démontre une fois de plus par récurrence, si ce n'est que l'initialisation est immédiate : comme $a^0 = 1$ pour tout a strictement positif, il est clair que la relation est vérifiée pour $n = 0$. Il reste à faire le calcul prouvant que si la relation est vraie au rang n, elle l'est encore au rang $n+1$, donc que $a\left(a^n u + b\frac{a^n-1}{a-1}\right) + b = a^{n+1}u + b\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$, ce qui est immédiat car $a\left(\frac{a^n-1}{a-1}\right) + 1 = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> On teste les petites valeurs de n : $2, 12, 112, 2112, 22112$ répondent à la question pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Ceci démontre l'initialisation de la récurrence, mais ceci suggère également comment construire chaque nombre à partir du précédent : il suffit d'ajouter 1 ou 2 à gauche du nombre précédent. L'hypothèse de récurrence sera donc que a_n est un entier de n chiffres tous égaux à 1 ou 2, et que a_n est divisible par 2^n. On définira : $a_{n+1} = 10^n + a_n$ ou $a_{n+1} = 2 \times 10^n + a_n$: ces deux entiers ont $n+1$ chiffres tous égaux à 1 ou 2. Reste à prouver que l'un d'eux est multiple de 2^n. Posons : $a_n = 2^n \times k$. $10^n = 2^n \times 5^n$. Si k est impair, $k + 5^n$ est pair, donc $10^n + a_n$ est divisible par 2^{n+1}. Si k est pair, c'est $k + (2 \times 5^n)$ qui est pair, donc $2 \times 10^n + a_n$

qui est divisible par 2^{n+1}. Comme l'un de ces deux nombres répond nécessairement au problème, même si l'on ne peut pas prédire lequel, cela démontre par récurrence que le résultat est vrai pour tout n.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> Non. En effet, en actionnant l'interrupteur on ne change pas la parité du nombre de lampes éteintes. Si sur la ligne ou la colonne il y a k lampes éteintes, il y en aura $8-k$ après action sur l'interrupteur : k et $8-k$ sont soit tous deux pairs, soit tous deux impairs. Or au départ, il y a un nombre impair de lampes éteintes. Il y en aura donc toujours un nombre impair, quelles que soient les manipulations d'interrupteurs, et il n'y aura jamais 64 lampes éteintes.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> C'est encore un argument de parité qui permet de conclure. Comme la différence de deux entiers a même parité que leur somme, la somme de tous les entiers sur le tableau conserve la même parité à chaque étape. Or au départ elle vaut : $1+2+...+2010 = \frac{2010\times 2011}{2}$ qui est impair. Cette somme restera donc toujours impaire, et le dernier nombre obtenu sera un nombre impair, ce ne peut pas etre 0.

<u>*Solution de l'exercice 10*</u> Si la réponse était "oui", il faudrait décrire une suite de déplacements aboutissant à la solution. Si la réponse est "non", on fait appel à un invariant. Considérons un triangle équilatéral formé de trois arbres non voisins. Ce triangle contient au départ 3 oiseaux. Si tous les oiseaux sont sur le même arbre, le triangle contiendra 0 ou 6 oiseaux. Or il est facile de voir que chaque déplacement laisse invariante la parité du nombre d'oiseaux perchés sur le triangle : comme chaque arbre du triangle a ses voisins hors du triangle et inversement, soit les deux oiseaux qui s'envolent étaient sur le triangle et le nombre d'oiseaux sur le triangle diminue de 2. Soit aucun n'était sur le triangle et le nombre augmente de 2. Soit l'un était sur le triangle et l'autre hors du triangle, auquel cas le nombre d'oiseaux reste inchangé. Dans tous les cas, le nombre d'oiseaux sur le triangle restera impair et ne vaudra jamais 0 ni 6.

2 Exercices vus en cours d'arithmétique

Énoncés

Exercice 1 Pour quelles valeurs de a et b, entiers ≥ 2, $ab-1$ est-il divisible par le produit $(a-1)(b-1)$?

Exercice 2 Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4n+3$.

Exercice 3 Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ on peut trouver n entiers consécutifs dont aucun n'est premier.

Exercice 4 Déterminer le PGCD de tous les $a^13 - a$ pour tous les entiers $a \geq 2$.

Solutions

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Quelles valeurs entières peut prendre $q = \frac{ab-1}{(a-1)(b-1)}$? D'une part, $ab-1 > (a-1)(b-1) = ab-a-b+1$ car $a+b > 2$, donc $q > 1$. D'autre part, $\frac{ab-1}{(a-1)(b-1)} < \left(\frac{a}{a-1}\right) \cdot \left(\frac{b}{b-1}\right) \leq 4$

car pour tout entier $a \geq 2$, $\frac{a}{a-1} = 1 + \frac{1}{a-1} \leq 2$. Or dans l'intervalle $1 < q < 4$ il n'existe que deux entiers possibles : 2 et 3.

La valeur 2 est atteinte lorsque $ab-1 = 2(a-1)(b-1)$ soit $ab-2a-2b+3 = 0$, soit $a = \frac{2b-3}{b-2}$. Pour que $\frac{2b-3}{b-2}$ soit entier, il faut que $2b-3$ soit divisible par $b-2$, donc que $2b-3-2(b-2) = 1$ soit lui aussi divisible par $b-2$. Comme 1 n'a pour diviseurs que 1 et -1, et que $b-2 = -1$ n'a pas de solution ≥ 2, la seule valeur possible, pour $q = 2$, est $b = 3$, donc $a = 3$.

La valeur 3 est atteinte, elle, lorsque $ab-1 = 3(a-1)(b-1)$, soit $a = \frac{3b-4}{2b-3}$. Si $2b-3$ divise $3b-4$, il divise également $1 = 2(3b-4) - 3(2b-3)$, et la seule solution est $b = 2$, donc $a = 2$.

Les deux seuls couples solutions sont donc $(2,2)$ et $(3,3)$.

Solution de l'exercice 2 Ce problème généralise la démonstration de l'existence d'une infinité de nombres premiers. Mais une telle démonstration ne peut se faire que pour les nombres premiers de la forme $4n+3$ ou $6n+5$. Pour ceux de la forme $4n+1$ ou $8n+1$ par exemple, il existe une autre démonstration abordable. Mais le résultat plus général, que pour tous u et v premiers entre eux, il existe une infinité de nombres premiers de la forme $un+v$, nécessite des outils beaucoup plus puissants. Et on ne sait pas s'il existe une infinité de nombres premiers de la forme n^2+1, même si c'est hautement vraisemblable.

Pour le présent problème, nombres premiers de la forme $4n+3$, c'est-à-dire congrus à 3 modulo 4 (cet exercice a été posé juste avant d'introduire les congruences, pour montrer combien cette notion de congruence simplifie la rédaction), il suffit de remarquer que le produit de deux nombres congrus à 1 modulo 4 est obligatoirement congru à 1 modulo 4, si bien qu'un nombre congru à 3 modulo 4 a obligatoirement au moins un facteur premier $p \equiv 3(mod 4)$. Dès lors, raisonnons par l'absurde : s'il existait un nombre fini de nombres premiers congrus à 1 modulo 4, $p_1, p_2, ...p_k$, considérons le produit de tous ces nombres : $P = p_1 \times p_2 \times p_3 \times ... \times p_k$. Soit $P \equiv 1(mod 4)$ auquel cas $P+2 \equiv 3(mod 4)$, soit $P \equiv 3(mod 4)$ auquel cas $P+4 \equiv 3(mod 4)$. Dans tous les cas, $P+2$ ou $P+4$ admet un facteur premier $p \equiv 3(mod 4)$. Mais celui-ci ne peut pas être l'un des p_i, car ceux-ci divisent tous P, et pour qu'ils divisent $P+2$ ou $P+4$ il faudrait qu'ils divisent 2 ou 4. Donc quelle que soit la famille finie de nombres premiers congrus à 3 modulo 4, il existe au moins un nombre premier $\equiv 3(mod 4)$ qui n'appartient pas à la famille, ce qui prouve qu'il existe une infinité de tels nombres.

Solution de l'exercice 3 Il existe au moins deux démonstrations simples. L'une d'elles consiste à construire explicitement cette famille de n entiers consécutifs. Considérons les nombres $(n+1)!+k$ pour $k = 2, 3, ...(n+1)$. Rappelons que $(n+1)! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times (n+1)$ est divisible par tous les k compris entre 2 et $(n+1)$. Donc pour toutes ces valeurs, $(n+1)!+k$ est divisible par k, et n'est donc pas premier.

Mais on peut aussi utiliser le théorème chinois. Considérons n nombres premiers distincts ; $p_1, p_2, ...p_n$. Le théorème chinois permet de dire qu'il existe un entier $A > p_1 \times p_2 \times ... \times p_n$ tel que :

$$A \equiv -1(mod p_1)$$

$$A \equiv -2(mod p_2)$$

$$...$$

$$A \equiv -n(mod p_n)$$

Il est clair que $A+k$ est divisible par p_k, et $A+k > p_k$, donc $A+k$ est non premier, ceci pour tout k compris entre 1 et n, ce qui achève la démonstration.

Solution de l'exercice 4 Ce PGCD, diviseur commun de tous les a^13-a, divise en particulier ; $2^13-2=8190=2\times 3^2\times 5\times 7\times 13$.

Le théorème de Fermat permet d'affirmer que tous les a^13-a sont divisibles par 13. Sont-ils aussi divisibles par 7 ? Oui, car si $a\equiv 0(mod7)$, a^13-a est manifestement divisible par 7, sinon, le théorème de Fermat nous dit que $a^6\equiv 1(mod7)$, donc $a^{2\times 6}\equiv 1(mod7)$, d'où $a^13\equiv a(mod7)$. De même, ils sont tous divisibles par 5 car si a n'est pas multiple de 5, $a^{3\times 4}\equiv 1(mod5)$, et par 3 ainsi que par 2 pour la même raison. Mais sont-ils tous divisibles par $3^2=9$? Non ! car pour $a=3$, par exemple, $a^13\equiv 0(mod9)$ alors que $a\not\equiv O(mod9)$, donc a^13-a n'est pas divisible par 9. Le PGCD de tous les a^13-a est donc $2\times 3\times 5\times 7\times 13=2730$.

2 TD

1 Premier TD de Stratégies de Base

Rappels de logique.

Beaucoup d'énoncés mathématique commencent par "quels que soient les nombres..." ou "il y a un point tel que...". On peut les écrire de manière très synthétique à l'aide de *quantificateurs* : ce sont des symboles qui permettent de *quantifier* sur les variables. Ils sont tous deux construits en reversant le dessin d'une lettre.

Le quantificateur $\forall$ vient de la lettre A (abbréviation de l'allemand *Alle* qui signifie "tout") et se lit "*quel que soit*" ou "*pour tout*". Par exemple, l'énoncé

$$\forall d\in\mathbb{R},\ d^2\geq 0$$

se lit littéralement "*pour tout réel d, d^2 est positif*", ce qui se traduit plus clairement en "*le carré de tout réel est positif*".

Noter que, dans la dernière traduction, le d ci-dessus n'apparaît plus ; on dit que c'est une *variable muette*, elle n'existe que comme "étiquette" très provisoire que l'on met sur un objet. Ainsi, l'assertion ($\forall\Xi\in\mathbb{R},\ \Xi^2\geq 0$) énonce tout autant la positivité du carré d'un réel quelconque, et l'on peut remplacer le d ou le Ξ par n'importe quel symbole (une enclume ou un schtroumph à lunettes si vous voulez).

Le quantificateur *universel* (c'est comme cela que l'on nomme $\forall$) peut ainsi servir pour écrire une infinité d'énoncés en un seul. Par exemple, si l'on veut écrire

$$2\leq 3^2\quad et\quad 3\leq 4^2\quad et\quad 4\leq 5^2\quad et\quad \cdots$$

de manière synthétique, on pourra écrire

$$\forall g\geq 2 \text{ entier},\ g\leq (g+1)^2.$$

Mais on peut aussi l'écrire sous la forme

$$\forall t\geq 3 \text{ entier},\ t-1\leq t^2\ ;$$

pour s'en convaincre, expliciter l'infinté d'inégalités ainsi codées. On pourrait également traduire ces dernières en

$$\forall g\geq -18 \text{ entier},\ g+20\leq (g+21)^2.$$

Point méthode : pour montrer un énoncé de la forme $\forall x \in E, P(x)$, on commence par **fixer** un élément dans E (appelez-le comme vous souhaitez, mettons e) puis on essaie de montrer la proposition $P(e)$ pour **le** e que l'on s'est donné (et pas un autre). Cela n'a l'air de rien, mais c'est important pour savoir à tout instant de qui on parle au juste. Si l'on s'égare et oublie ce que désigne e par la suite, on n'aura qu'à remonter jusqu'à tomber sur la ligne le définissant. Simple, indispensable.

Le quanticateur $\exists$, appelé quantificateur *existentiel*, vient de la lettre E (pour *Exister*) et se lit "*il existe*" ou "*il y a*" ou "*on peut trouver*". Par exemple, la proposition

$$\forall g \in \mathbb{R},\ \exists G \in \mathbb{R},\ G > g$$

se lit littéralement : "*pour tout réel g, il y a un réel G tel que $G > g$*". Autrement dit, on peut toujours trouver un réel strictement plus grand qu'un réel donné.

On notera le sens différent des virgules après un $\forall$ ou un $\exists$. Après un $\forall$, il s'agit d'une virgule comme en français ; après un $\exists$, elle signifie "tel que"

Comme pour les énoncés avec du $\forall$, les variables que l'on introduit avec un $\exists$ sont muettes : on peut les remplacer par n'importe quel autre symbole qui nous convient. De même, on peut changer l'ensemble auquel la variable muette appartient, à condition de changer toutes les occurences de cette dernière. Par exemple, les énoncés suivants sont équivalents :

$$\begin{aligned} \exists m \geq 3 \text{ entier}, &\qquad (m-7)^2 \geq 90, \\ \exists U \geq -4 \text{ entier}, &\qquad U^2 \geq 90, \\ \exists \kappa \geq 42 \text{ entier}, &\qquad (\kappa - 46)^2 \geq 90. \end{aligned}$$

On commence par récurrer

Les solutions qui suivent peuvent paraître longues car l'on s'est efforcé de tout bien préciser (intuition comme rédaction) pour ne laisser aucun coin d'ombre. Il va de soi qu'avec de la pratique on peut rédiger de manière bien plus concise.

On s'est efforcé au début de jongler avec le plus de symboles possibles pour désigner les variables muettes, afin que le lecteur s'y habitue (et manipule l'alphabet grec). Vers la fin, on reprend des notations moins exotiques pour alléger l'effort de lecture.

- Inégalités de Bernoulli-

On considère un réel a supérieur ou égal à -1 et n un entier naturel. On affirme que l'une des deux quantités $(1+a)^n$ ou $1+na$ est toujours supérieure ou égale à l'autre. Déterminer laquelle et prouver l'inégalité en question.

Soit k un entier ≥ 1 et $a_1, ..., a_k$ des nombres réels compris entre 0 et 1. Comme précédemment, on demande de comparer les quantités $(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_k)$ et $1-(a_1+a_2+\cdots+a_k)$.

Solution proposée pour la première question.

Le réel $a \geq -1$ est fixé pour toute la suite de la question.

Pour intuiter le sens d'une éventuelle inégalité, on expérimente les petites valeurs. Pour $n = 0$, on obtient d'un côté $(1+a)^0 = 1$ et de l'autre $1 + 0a = 1$, donc on ne peut pas trancher (il y a égalité). Pour $n = 1$, la puissance vaut $(1+a)^1$, soit la somme $1 + 1 \cdot a$, ce qui est encore insuffisant. Pour $n = 2$, le carré vaut $(1+a)^2 = 1 + 2a + a^2$ qui est plus grand que $1 + 2a$ puisque $a^2 \geq 0$. Ainsi, on nous allons montrer l'énoncé

$$\forall s \in \mathbb{N},\ (1+a)^s \geq 1 + sa.$$

Notons pour abréger W_γ l'assertition $(1+a)^\gamma \geq 1 + \gamma a$ pour tout entier naturel γ. On va montrer la proposition W_k par récurrence sur l'entier naturel k.

Nous avons déjà montré W_0, W_1 et W_2 lors de la phase "intuition". L'initialisation est donc déjà faite.

Donnons-nous à présent un entier $\omega \geq 0$ vérifiant W_ω et montrons l'énoncé $W_{\omega+1}$. D'après W_ω, on peut écrire $(1+a)^\omega \geq 1 + \omega a$. Pour "passer" à $W_{\omega+1}$, il serait judicieux de faire apparaître les quantités qui y apparaissent, à savoir $(1+a)^{\omega+1}$ ou $1 + (\omega+1)\,a$. Par exemple, en multipliant l'inégalité W_ω par $1+a$ on fait apparaître $(1+a)^{\omega+1}$:

$$\begin{array}{rcl} (1+a)^\omega & \geq & (1+\omega a) \\ (1+a)^\omega (1+a) & \geq & (1+\omega a)(1+a) \\ (1+a)^{\omega+1} & \geq & 1 + \omega a + a + \omega a^2 \end{array}$$

(le sens de l'inégalité est bien préservé car on multiplie par un réel positif $1+a$: il ne faut pas oublier d'invoquer l'hypothèse $a \geq -1$). Ensuite, le terme ωa^2 est positif car a^2 l'est et car ω a été choisi ≥ 0. Par conséquent, le membre de droite de l'inégalité ci-dessus est plus grand que $1 + \omega a + a$, d'où l'on conclut $(1+a)^{\omega+1} \geq 1 + (\omega+1)\,a$, c'est-à-dire $W_{\omega+1}$.

L'entier ω ayant été choisi arbitrairement dans $\mathbb{N}$, nous avons montré la proposition « $\forall h \in \mathbb{N},\ W_h \implies W_{h+1}$ », ce qui traduit exactement l'hérédité.

Le principe de récurrence permet de conclure à la vérité de l'assertion « $\forall v \in \mathbb{N},\ W_v$ », ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. Il est important de ne pas se focaliser sur une notation (au hasard n pour un entier) ou une forme de rédaction (pour l'hérédité, "il faut toujours passer de f à $f+1$" (mais qui est donc f, au juste ?)). Pour qu'une récurrence fonctionne, il faut un entier pour initialiser, mettons 18, puis il faut une infinité d'implications. Si P_y est l'assertion à montrer (sur y) et que l'on connaît P_{18}, alors il nous faut montrer les implications

$$P_{18} \implies P_{19} \quad \text{et} \quad P_{19} \implies P_{20} \quad \text{et} \quad P_{20} \implies P_{21}...,$$

ce qui peut se résumer en $[\forall u \geq 18,\ P_u \implies P_{u+1}]$, mais également en $[\forall g \geq 0,\ P_{g+18} \implies P_{g+19}]$, ou encore en $[\forall \lambda \geq 42,\ P_{\lambda-24} \implies P_{\kappa-23}]$. L'essentiel est que la première implication soit $P_{18} \implies P_{19}$, puisque notre initialiation est P_{18}.

Solution proposée pour la seconde question.

Pour intuiter le sens d'une éventuelle égalité, on peut remarquer qu'en prenant tous les a_i égaux (mettons à un réel r dans $[0,1]$), on chercher à comparer les quantités $(1-r)^k$ et $1 - kr$, ce qui fait l'objet de la question précédente (le réel $-r$ est bien ≥ -1 puisque r est dans $[0,1]$). Ainsi, en appelant (pour abréger) Γ_q la proposition (pour q entier ≥ 1)

$$\forall z_1, ..., z_q \in [0,1]\,,\ (1-z_1)\cdots(1-z_q) \geq 1-(z_1+\cdots+z_q)\,,$$

on va montrer $\forall h \geq 1,\ \Gamma_h$ par récurrence sur h.

Pour initialiser, on explicite Γ_1 : il dit exactement $\forall z \in [0,1]\,,\ (1-z) \geq 1-(z)$, ce qui est tautologique (une égalité est toujours une inégalité).

Ensuite, on se donne un entier $x \geq 1$ vérifiant Γ_x et on montre Γ_{x+1}. C'est un énoncé avec un $\forall$, donc on commence par se fixer $x+1$ réels dans $[0,1]$, mettons $\varphi_0, \varphi_1, ...\varphi_x$. Pour pouvoir utiliser Γ_x, il nous faut x réels dans $[0,1]$: on a le choix! Appliquons par exemple Γ_x aux réels $\varphi_1, ..., \varphi_x$:

$$(1-\varphi_1)\cdots(1-\varphi_x) \geq 1-(\varphi_1+\cdots+\varphi_x)\,.$$

En multipliant par $1-\varphi_0$ (qui est positif puisque $\varphi_0 \in [0,1]$, ce qui ne change pas le sens de l'inégalité), on fait apparaître la quantité de gauche de l'inégalté souhaitée. On obtient (on note par commodité S la somme $\varphi_1+\cdots+\varphi_x$)

$$(1-\varphi_0)(1-\varphi_1)\cdots(1-\varphi_x) \geq (1-\varphi_0)(1-S) = 1-(\varphi_0+S)+S\varphi_0.$$

La quantité $S\varphi_0$ étant positive puisque tous les φ_i le sont, le membre de droite ci-dessus est plus grand que $1-(\varphi_0-S)$, ce qui permet d'obtenir l'inégalité

$$(1-\varphi_0)\cdots(1-\varphi_x) \geq 1-(\varphi_0+\cdots+\varphi_x)\,.$$

Les réels $\varphi_0, ..., \varphi_x$ ayant été fixés arbitrairement dans $[0,1]$, on a montré Γ_{x+1}. Enfin, l'entier x ayant été choisi quelconque dans $\mathbb{N}^*$, on a montré l'hérédité

$$\forall Y \geq 1 \textit{ entier},\ (\Gamma_Y \implies \Gamma_{Y+1})\,.$$

Remarques.

Contrairement à la première question, nous avons inclus dans l'énoncé à montrer une quantification sur les variables car leur nombre dépendait de n. Si l'on avait voulu s'en passer, il aurait fallu fixer dès le début une infinité de réels $a_1, a_2, a_3, a_4, ...$. Cela n'est cependant pas toujours possible : il faut donc bien faire attention à énoncer précisément l'hypothèse que l'on montre par récurrence.

Cette inégalité généralise la précédente pour une variable dans $[-1,0]$ (prendre toutes les variables égales).

- Inégalité de Jensen -

Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *convexe* si, pour tous réels positifs λ et μ de somme 1 ainsi que pour tous réels u et v, l'inégalité $f(\lambda u+\mu v) \leq \lambda f(u)+\mu f(v)$ est valide.

On fixe un entier $n \geq 1$ et une fonction convexe f. Étant donnés n réels positifs $\lambda_1, ..., \lambda_n$ de somme 1 et n réels $t_1, ..., t_n$ quelconques, établir l'inégalité dite de convexité*(ou* de Jensen*) :*

$$f(\lambda_1 t_1+\lambda_2 t_2+\cdots+\lambda_n t_n) \leq \lambda_1 f(t_1)+\lambda_2 f(t_2)+\cdots+\lambda_n f(t_n)\,.$$

Solution proposée.

Pour faciliter la rédaction, on introduira une notation pour désigner les somme avec des $\cdots$. On utilisera la lettre grecque Σ, équivalent de notre S majuscule, pour **S**omme. Par exemple, on notera

$$1^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2,$$

ce qui se lit "*somme de k égal à 1 à n de(s) k^2*". La varable k est bien sûr muette, on pourra écrire la somme précédente comme $\sum_{u=1}^{n} u^2$. De même, on pourra noter

$$a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3 = \sum_{h=1}^{n} a_h^3$$

quel que soit le sens des a_h.

Fixons f convexe et notons P_n la proposition pour tout entier $n \geq 1$

$$\forall \lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0 \text{ de somme } 1,\ \forall a_1, ..., a_n \in \mathbb{R},\ f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(a_i).$$

Nous allons montrer P_n par récurrence sur n.

Pour expliciter P_1, on observe que le seul réel positif de somme 1 est 1. Ainsi, la partie "$\forall \lambda_1 \geq 0$ de somme 1" disparaît et l'on remplace toutes les occurences de λ_1 par 1. L'énoncé P_1 devient donc $\forall a \in \mathbb{R},\ f(1 \cdot a) \leq 1 \cdot f(a)$, ce qui est tautologique.

On remarquera que P_2 équivaut exactement à la convexité de f, qui est supposée vraie.

Supposons à présent P_n pour un entier $n \geq 2$ et montrons P_{n+1}. Comme c'est un énoncé universel, on commence par se donner $n+1$ réels $t_0, ..., t_n \geq 0$ de somme 1 et $n+1$ réels $x_0, ..., x_n$. Pour utiliser P_n, il nous faut une variable de moins ; nous allons fusionner deux variables en écrivant subtilement $\lambda a + \mu b = (\lambda + \mu) \frac{\lambda a + \mu b}{\lambda + \mu}$ où l'on a posé $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$. Ainsi, la somme $\sum_{i=0}^{n} t_i x_i$ devient $\lambda a + \mu b + \sum_{i=2}^{n} t_i x_i$, ou encore $(\lambda + \mu) \frac{\lambda a + \mu b}{\lambda + \mu} + \sum_{i=2}^{n} t_i x_i$. On applique alors P_n aux n réels positifs $\lambda + \mu, t_2, t_3, ..., t_n$ de somme 1 (vérifier !) et aux n réels $\frac{\lambda a + \mu b}{\lambda + \mu}, x_2, ..., x_n$. On obtient

$$f\left((\lambda + \mu) \frac{\lambda a + \mu b}{\lambda + \mu} + \sum_{i=2}^{n} t_i x_i\right) \leq (\lambda + \mu) f\left(\frac{\lambda a + \mu b}{\lambda + \mu}\right) + \sum_{i=2}^{n} t_i f(x_i).$$

Pour obtenir à droite la somme voulue, à savoir $\sum_{i=0}^{n} t_i f(x_i)$, il reste à utiliser l'hypothèse de convexité (P_2 en sorte) aux réels positifs $\frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ et $\frac{\mu}{\lambda + \mu}$ de somme 1 et aux réels a et b :

$$f\left(\frac{\lambda a + \mu b}{\lambda + \mu}\right) = f\left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} a + \frac{\mu}{\lambda + \mu} b\right) \leq \frac{\lambda}{\lambda + \mu} f(a) + \frac{\mu}{\lambda + \mu} f(b),$$

d'où en multipliant par $\lambda + \mu$ l'inégalité $(\lambda + \mu) f\left(\frac{\lambda a + \mu b}{\lambda + \mu}\right) \leq t_0 f(x_0) + t_1 f(x_1)$. On conclut en additionnant avec l'inégalité obtenue ci-dessus par P_n.

Finalement, on a montré l'implication $P_n \implies P_{n+1}$ pour tout entier $n \geq 1$, ce qui conclut la preuve de l'hérédité.

Nous proposons une autre preuve de l'inégalité de Jensen, qui met en jeu un principe de récurrence différent. Pour montrer une proposition P_n pour tout entier $n \geq 0$, on l'initialise en des entiers arbitrairement grands (par exemple les carrés, les puissances de 2...), puis on montre une hérédité "à l'envers", à savoir $P_n \implies P_{n-1}$. Ce principe de récurrence est parfois appelé "*principe de Cauchy*".

Commençons par l'hérédité à l'envers. On se donne un entier $n \geq 1$ vérifiant P_{n+1}. Montrons P_n. On se donne $\lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0$ de somme 1 et $a_1, ..., a_n$ réels. Pour appliquer P_{n+1}, on rajoute une variable en considérant un réel quelconque a avec un poids nul :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right) = f\left(0a + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right) \underset{P_{n+1}}{\overset{\text{on utilise}}{\leq}} 0f(a) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(a_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(a_i), \ \textit{CQFD.}$$

Montrons à présent P_k pour k une puissance de 2. Pour cela, on montre P_{2^n} par récurrence sur $n \geq 1$. Comme tout à l'heure, P_2 équivaut à la convexité de f. Supposons $P_{k=2^n}$ pour un entier $n \geq 1$ et montrons $P_{2^{n+1}}$. On se donne 2^{n+1} réels positifs $\lambda_1, ..., \lambda_k, \mu_1, ..., \mu_k$ de somme 1 et 2^{n+1} réels $a_1, ..., a_k, b_1, ..., b_k$. Les notations ont été choisies pour créer deux paquets où l'on pourra appliquer P_k :

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^{k} \mu_i b_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \mu_i) \frac{\lambda_i a_i + \mu_i b_i}{\lambda_i + \mu_i}\right) \\
&\underset{P_k}{\overset{\text{on utilise}}{\leq}} \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \mu_i) f\left(\frac{\lambda_i a_i + \mu_i b_i}{\lambda_i + \mu_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \mu_i) f\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} a_i + \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} b_i\right) \\
&\underset{P_2}{\overset{\text{on utilise}}{\leq}} \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \mu_i) \left[\frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} f(a_i) + \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} f(b_i)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(a_i) + \mu_i f(b_i), \ \textit{CQFD.}
\end{aligned}$$

- Inégalités entre moyennes géométriques, arithmétiques et quadratiques -

Étant donnés k réels $\sigma_1, ..., \sigma_k$, leur *moyenne arithmétique* est définie par $\frac{\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_k}{k}$, leur *moyenne quadratique* par $\sqrt{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_k^2}{k}}$ et leur moyenne géométrique par $\sqrt[k]{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k}$.

Montrer que la moyenne arithmétique est toujours plus petite que celle quadratique.
Établir l'infériorité de la moyenne géométrique par rapport à celle arithmétique.

Solution proposée pour l'inégalité arithmético-quadratique.

Pour tout entier $n \geq 1$, appelons Q_n la proposition

$$\forall a_1, ..., a_n \geq 0, \ \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \leq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{n}},$$

qui s'écrit aussi (en élevant au carré et en répartissant les n afin de tuer les fractions et les racines) :

$$Q_n : \forall a_1, ..., a_n \geq 0, \ \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

L'énoncé Q_1 équivaut à $\forall a \geq 0, \ (a)^2 \leq 1\,(a^2)$, ce qui est trivial.

Supposons à présent Q_n pour un entier $n \geq 1$. On se donne $a_0, ..., a_n \geq 0$. Pour passer de Q_n à Q_{n+1}, on va "passer" de $n\sum_{i=1}^n a_i^2$ à $(n+1)\sum_{i=0}^n a_i^2$ en ajoutant/multipliant ce qu'il faut.

Appliquant Q_n aux réels $a_1, ..., a_n \geq 0$, il vient $\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 \leq n\sum_{i=1}^n a_i^2$. Multipliant par $\frac{n+1}{n}$, il vient $(n+1)\sum_{i=1}^n a_i^2 \geq \frac{n+1}{n}\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2$. Puis on rajoute $(n+1)\,a_0^2$, ce qui donne

$$(n+1)\sum_{i=0}^n a_i^2 \geq (n+1)\,a_0^2 + \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2.$$

Nous avons à gauche un membre de l'inégalité souhaitée. Pour conclure, il suffit de montrer que le membre de droite est $\geq \left(\sum_{i=0}^n a_i\right)^2$. Notons pour simplifier $a := a_0$ et $S := \sum_{i=1}^n a_i$. Avec ces notations, on aimerait bien montrer

$$(n+1)\,a^2 + \left(1+\frac{1}{n}\right)S^2 \overset{?}{\geq} (a+S)^2,$$

ce qui équivaut successivement à

$$\begin{aligned}
na^2 + a^2 + S^2 + \frac{S^2}{n} &\overset{?}{\geq} a^2 + 2aS + S^2 \\
\underset{a^2+S^2}{\overset{\text{simplifier}}{\iff}} \ na^2 + \frac{S^2}{n} &\overset{?}{\geq} 2aS \\
\underset{\text{par } n}{\overset{\text{multiplier}}{\iff}} \ n^2a^2 - 2anS + S^2 &\overset{?}{\geq} 0 \\
\iff (na-S)^2 &\overset{?}{\geq} 0, \text{ ce qui est vrai.}
\end{aligned}$$

On peut donc conclure par récurrence.

Solution proposée pour l'inégalité géométrico-arithmétique.

Comme on note les **s**ommes avec un $\sum$, on notera les **p**roduits avec un $\prod$ (lettre grecque analogue de notre P majuscule). Ainsi, on souhaite montrer pour tout entier $n \geq 1$ l'assertion

$$G_n : \forall a_1, ..., a_n \geq 0, \ \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}.$$

On propose deux solutions : une récurrence de Cauchy, puis une récurrence directe.

Récurrence de Cauchy.

Déjà, G_2 équivaut à $\forall a, b \geq 0,\ \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, autrement dit à $\forall a, b \geq 0,\ \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$, ce qui est trivial.

Supposons ensuite G_n pour un $n \geq 1$. On prend $2n$ réels positifs $a_1, ..., a_n, a_1', ..., a_n'$. Alors on écrit

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n a_i'}{2n} &= \frac{\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n a_i'}{n}}{2} \\
&\underset{G_n}{\overset{\text{on utilise}}{\geq}} \frac{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} + \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i'}}{2} \\
&\underset{G_2}{\overset{\text{on utilise}}{\geq}} \sqrt{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} . \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i'}} \\
&= \sqrt[2n]{\prod_{i=1}^n a_i a_i'}, \text{ ce qui montre } G_{2n}.
\end{aligned}$$

Ensuite si n est quelconque et si k est tel que $2^k > n$, on pose

$$a := \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}, \qquad g := \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}, \qquad a_{n+1} := \cdots = a_{2^k} := a, \qquad A := \frac{\sum_{i=1}^{2^k} a_i}{2^k}, \qquad G := \sqrt[2^k]{\prod_{i=1}^{2^k} a_i}.$$

Ainsi, la moyenne arithmétique de $a_1, ..., a_{2^k}$ vaut $\frac{na+\left(2^k-n\right)a}{2^k} = a$, donc vaut la même que celle de $a_1, ..., a_n$. Par ailleurs, on peut écrit $G^{2^k} = g^n a^{2^k-n}$. Ainsi, en utilisant G_{2^k} , on obtient

$$a^{2^k} = A^{2^k} \geq G^{2^k} = g^n a^{2^k-n}, \text{ d'où } a^n \geq g^n, \textit{ i. e. } a \geq g, \text{ ce qui conclut.}$$

Récurrence directe.

On sait déjà que G_2 est vraie.

On se donne $n \geq 0$ vérifiant G_n et on considère $a_0, ..., a_n$ des réels ≥ 0. Quitte à renuméroter les a_i, on peut supposer que a_0 est le plus grand d'entre eux. On note alors A la moyenne arithmétique de tous les a_i, G celle géométrique, puis a celle arithmétique des a_i sauf a_0 et g celle géométrique.

Ayant supposé a_n maximum, on a $a = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_n}{n} = \frac{na_n}{n} = a_n$, donc on peut écrire $a_0 = (1+\varepsilon)\, a$ pour un $\varepsilon \geq 0$. On peut alors écrire

$$G^{n+1} = a_0 g^n \underset{G_n}{\overset{\text{on utilise}}{\leq}} a_0 a^n = (1+\varepsilon)\, a^{n+1}.$$

Pour conclure, il suffit de montrer $(1+\varepsilon)\, a^{n+1} \leq A^{n+1}$. Pour cela, on écrit

$$A = \frac{1}{n+1} a_0 + \frac{n}{n+1} a = \frac{1+\varepsilon}{n+1} a + \frac{n}{n+1} a = \left(1 + \frac{\varepsilon}{n+1}\right) a,$$

d'où en élevant à la puissance $n+1$ et en appliquant l'inégalité de Bernoulli

$$A^{n+1} = \left(1 + \frac{\varepsilon}{n+1}\right)^{n+1} a^{n+1} \geq (1+\varepsilon)\, a^{n+1}, \ \textit{CQFD.}$$

- Digestif -

On se donne un réel γ non nul. Montrer que, pour tout entier n, le nombre $\gamma^n + \frac{1}{\gamma^n}$ est un polynôme en $\gamma + \frac{1}{\gamma}$ à coefficients entiers.

Solution proposée.

On raisonne par récurrence *forte* sur $n \geq 1$.

Le cas $n = 1$ est trivial : $\gamma^1 + \frac{1}{\gamma^1}$ vaut $\gamma + \frac{1}{\gamma}$, dont le polynôme X convient.

Donnons-nous à présent un entier $n \geq 2$ et supposons le résultat vrai pour $n-1$ et n. En cherchant à exprimer $\gamma^{n+1} + \frac{1}{\gamma^{n+1}}$ à l'aide des précédents, on calcule le produit $\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right)\left(\gamma^n + \frac{1}{\gamma^n}\right) = \gamma^{n+1} + \frac{1}{\gamma^{n+1}} + \gamma^{n-1} + \frac{1}{\gamma^{n-1}}$. En isolant le terme de rang $n+1$ et en écrivant ceux aux rangs n et $n-1$ comme des polynômes entiers A et B, on obtient

$$\gamma^{n+1} + \frac{1}{\gamma^{n+1}} = \left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right) A\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right) - B\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right) = [XA - B]\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right).$$

Le polynôme $XA - B$ est bien à coefficients entiers (car A et B le sont), ce qui conclut.

Chercher le bon invariant

1. *On se donne un grand carré de longueur n entière quadrillé par n^2 cases carrées (toutes identiques). On retire deux cases situées dans deux coins opposés. Peut-on paver le carré ainsi "mangé" à l'aide de dominos tous formés de deux cases contigües ?*
2. *Même question avec un carré dont on retire un seul coin et avec des "triminos" formés de trois cases alignées.*
3. *2010 arbres sont disposés en cercle. Sur chacun de ces arbres siège un corbeaux. Toutes les demi-heures, deux corbeaux se déplacent chacun sur un arbre voisin du leur. On demande le temps minimal pour que tous les corbeaux se retrouvent sur un même arbre.*
4. *Au stage de Grésillon, l'ambiance est tellement géniale chez les GO (= gentils organisateurs) que chacun d'entre eux n'a pas plus que trois ennemis (parmi les autres). Montrer que l'on peut séparer l'équipe des GO en deux groupes de sorte que chacun GO ait au plus un ennemi dans son groupe.*
5. *On considère une permutation $d_1, ..., d_n$ des entiers de 1 à un entier naturel n impair. Montrer que le produit $(d_1 - 1)(d_2 - 2)\cdots(d_n - n)$ est pair.*

Solution proposée.

1. Appelons n la largeur du carré.

   Si n est impair, le carré mangé comporte un nombre impair de cases, donc il n'est pas possible de le pavé avec des dominos comportant chacun deux cases.

   Si n est pair, on colorie le carré comme un damier. Les coins retirés ayant même couleurs, le nombre de cases noires est différent de celui des bases blanches. Puisqu'un domino recouvre exactement une case noire et une case blanche, le pavage est impossible.

2. Appelons n^2 le nombre de cases.

   Si n est de la forme $3k$, le carré mangé n'a pas pour nombre de cases un multiple de trois (le nombre de cases d'un trimino), donc le pavage est impossible.

   Si n est de la forme $3k+1$, le nombre de cases vaut $(3k+1)^2 - 1 = 9k^2 + 6k$. Un pavage est alors possible : on forme un carré $(3k)^2$ à l'aide de carrés 3×3, puis on complète la ligne et la colonne manquante avec des triminos alignés.

   Si n est de la forme $3k+2$, on colorie avec trois couleurs de la manière suivantes ; chaque diagonale parallèle à la grande diagonale ne contenant pas le coin mangé est coloriée de la même couleur. Si la grande diagonale est rouge, on met les deux autres couleurs (disons jaune et bleu) sur les diagonales qui sont juste adjacentes, puis on avance de manière cyclique. Ainsi, chaque diagonale bleue est en correspondance avec une diagonale jaune en prenant le symétrique par rapport à la grande diagonale, à l'exception du coin opposé à celui mangé. Le nombre de cases bleues diffère donc de celui des cases jaunes ; un triminos utilsant chaque couleur une fois exactement, on en déduit l'impossibilité d'un pavage.

3. Colorions un arbre sur deux en suivant le cercle en blanc, les autres en noir. Alors, à chaque étape, la parité du nombre de corbeaux sur les arbres blancs est conservée (tout comme celle pour les arbres noirs). Or, cette parité vaut au début $\frac{2010}{2} = 1005 = 1$ et vaut, dans le cas d'un arbre contenant tous les corbeaux, 0 ou $2010 = 0$. On peut donc attendre longtemps avant de voir tous les corbeaux sur un même arbre.

4. Répartissons arbitrairement les GO en deux groupes. Si l'un deux a au moins deux ennemis dans son groupe, il en a deux ou trois, donc en le changeant de groupe il n'en a plus que zéro ou un. On répète l'opération, ce qui s'arrête un jour puisque le nombre de relations d'ennemité diminue strictement à chaque étape.

5. Supposons (par l'absurde) le produit impair. Tous ses facteurs sont alors impairs, donc la somme de ces facteurs (qui comporte un nombre n impair de termes) est impair. Or, cette somme vaut $\sum_{i=1}^{n}(d_i - i) = \sum_{i=1}^{n} d_i - \sum_{i=1}^{n} i = 0$ car les d_i sont une permutation des i, ce qui est une contradiction. (Autre idée : l'imparité des $d_i - i$ implique la parité de tous les d_{2i+1} ; or, puisque n est impair, il y a strictement plus de d_i impairs que pairs, contradiction.)

Pour finir, on range ses chaussettes dans les tiroirs (et sa chambre à Grésillon)

1. *Parmi les neufs GO, montrer que deux d'entre eux (au moins) sont nés le même jour de la semaine.*

2. *Soient $r_1, r_2, \ldots, r_{2010}$ des entiers naturels. Montrer qu'il y a une partie d'entre eux dont la somme est multiple de* 2010.

3. *On se donne* $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_{10}$ *des nombres (deux à deux distincts) compris entre* 0 *et* 100. *Montrer qu'il y a deux indices* i *et* j *tels que* $0 \leq i < j \leq 10$ *et* $0 \leq \sqrt{\beta_i} - \sqrt{\beta_j} \leq 1$.
4. *On considère onze entiers* $\nu_1, ..., \nu_{11}$. *Montrer qu'il y a onze entiers* $\theta_1, ..., \theta_{11}$ *valant chacun* -1 *ou* 0 *ou* 1 *tels que* $\theta_1\nu_1 + \theta_2\nu_2 + \cdots + \theta_{11}\nu_{11}$ *est multiple de 2010.*
5. *Soient* $t_0, t_1, ..., t_{12}$ *des nombres réels. Montrer que l'on peut en trouver deux, mettons* t_i *et* t_j, *tels que* $|t_i - t_j| \leq \left(2 - \sqrt{3}\right)|1 + t_it_j|$.

Solution proposée.

1. Il y a sept jours dans la semaine, ce qui est strictement plus petit que le nombre de GO. Le principe des tiroirs conclut.
2. On regarde les sommes $r_1 + \cdots + r_k$ pour k variant de 1 à 2010. Si aucune n'est multiple de 2010, il n'y a que 2009 restes possibles (modulo 2010) pour chacune de ces 2010 sommes. Par le principe des tiroirs, deux ont même reste, disons $\sum_{i=1}^{p} r_i$ et $\sum_{i=1}^{q} r_i$ avec $p < q$, donc la différence $\sum_{i>p}^{q}$ est multiple de 2010, ce qui conclut.
3. Les onze nombres $\sqrt{\beta_0}, ..., \sqrt{\beta_{10}}$ sont répartis dans les dix tiroirs $[0,1]$, $[1,2]$, ..., $[9,10]$, donc deux nombres sont dans le même tiroir, *CQFD.*
4. Considérons les 2^11 sommes composées d'éléments de $\{\nu_1, \nu_2, ..., \nu_{11}\}$. On regarde ces sommes modulo 10. Comment $2^11 > 2010$, par le principe des tiroirs deux sommes ont la même congruence modulo 2010 d'où le résultat.
5. Le plus dur est de reconnaître dans le quotient $\frac{t_i - t_j}{1 + t_it_j}$ la formule d'addition des tangentes $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$. (On avait quand même préparé le terrain en nommant nos réels avec la lettre t.) On pose donc $t_i = \tan \theta_i$ pour tout i où les angles θ_i sont compris entre -90 et 90. On veut alors des indices i et j tels que $|\tan(\theta_i - \theta_j)| < 2 - \sqrt{3}$. Puisque nous avons 13 angles dans un intervalle de longueur 180, en divisant ce dernier en douze tiroirs de longueur 15, on voit que deux angles sont à distance moindre de 15, disons $|\theta_i - \theta_j| < 15$. En prenant la tangente, il vient $|\tan(\theta_i - \theta_j)| \leq \tan 15$. Il reste à prier pour que cette dernière (appelons-la τ) vaille $2 - \sqrt{3}$, ce qui conclura. Or, nous connaissons $\tan 30 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et la formule d'addition des tangentes donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}} &= \tan 30 = \tan(2 \cdot 15) = \frac{2\tau}{1 - \tau^2}, \text{ d'où } 1 - \tau^2 = 2\sqrt{3}\tau, \text{ çad} \\ \left(\tau + \sqrt{3}\right)^2 &= 3 + 1, \text{ ou encore } \tau = \pm 2 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

La solution négative étant à rejeter, on a terminé.

2 Deuxième TD de Stratégies de Base

Énoncés

Exercice 1 Deux joueurs A et B ont un nombre illimité de pièces de monnaies identiques, de rayon r. A et B placent alternativement des pièces dans un grand cercle de rayon R, et les pièces ne doivent pas se recouvrir (leur bord peut se toucher). Celui qui ne peut plus jouer a perdu. A commence à jouer. Qui a une stratégie gagnante ?

Exercice 2 Montrer que pour tout entier $p \geq 3$ il existe des entiers naturels n_1, ... n_p tels que $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + ... + \frac{1}{n_p} = 1$.

Exercice 3 On dispose de 2010 vecteurs dans le plan. Deux joueurs prennent alternativement un vecteur jusqu'à ce qu'il n'en reste plus. Le perdant est celui dont la somme des vecteurs est la plus courte. Est ce que le premier joueur a une stratégie gagnante ?

Exercice 4 On dispose de n cartes et chacune est numérotée avec un des entier de 1 à n. Monter que si la somme des valeurs d'aucun sous-ensemble des cartes n'est un multiple de $n+1$, alors chaque carte possède le même numéro.

Exercice 5 On considère a_1, ... ,a_{2010} 2010 entiers distincts dans $\{1, ..., 2010\}$ et d_1, ... , d_{2010} des entiers tels que : $d_i = |a_i - i|$ (d_i est la distance de a_i à i). Est-il possible que les d_i soient deux à deux distincts ?

Exercice 6

On considère $n+1$ entiers distincts dans $\{1, ..., 2n\}$. Montrer que parmi ces $n+1$ entiers au moins 2 sont premiers entre eux et qu'au moins 1 divise l'autre.

Exercice 7 On considère n nombres valant 1 ou -1 sur un tableau. On en prend deux et on les remplace par 1 si ils sont égaux et -1 sinon. On réitère cette opération jusqu'à ce qu'il ne reste qu'un seul nombre sur le tableau. Le résultat est-il indépendant des opérations effectuées ?

Solutions

Solution de l'exercice 1 Le joueur 1 gagne si $R \geq r$: en effet il commence à jouer au centre puis il joue symétrique au joueur 2 par rapport au centre O du cercle.

Solution de l'exercice 2 (Principe de récurrence) On procède par récurrence sur p en remplaçant un n-uplet $(n_1, ..., n_p)$ au rang p par $(2n_1, ..., 2n_p, 2)$ au rang $p+1$.

Solution de l'exercice 3 (Principe de l'extremum) On pose $\overrightarrow{i}$ la somme de tous les vecteurs et on prend une base orthonormée avec $\overrightarrow{i}$ pour les abscisses (orientées comme $\overrightarrow{i}$). Alors le premier joueur gagne forcément en utilisant la stratégie suivante : il prend à chaque tour le vecteur de plus grande abscisse. Notez que l'ordonnée ne comptant pas puisque qu'en définitive la somme des ordonnées des vecteurs du premier joueur est la somme des ordonnées des vecteurs du 2ème joueur).

Solution de l'exercice 4 (Principe des tiroirs) On note $s_i = c_1 + ... + c_i$. Comme il y a n résidus non nul modulo $n+1$ et qu'il y a n termes s_1, s_2, ..., s_n, les s_i ont tous une congruence distincte (et non nulle par hypothèse) modulo $n+1$. Donc $c_2 \equiv s_i[n+1]$ pour un i. On doit avoir $i < 2$ car sinon on trouverait une somme de numéros de cartes divisible par $n+1$. Donc $c_2 \equiv c_1[n+1]$ donc $c_2 = c_1$ (les c_i étant dans $\{1, ..., m\}$). En appliquant ce raisonnement à une rotation cyclique des c_i on obtient donc qu'ils sont tous égaux.

Solution de l'exercice 5 (Invariant) On suppose par l'absurde que les d_i sont distincts. Ils prennent donc les valeurs $\{0, 1, 2, ..., 2009\}$. On considère la somme des d_i modulo 2 : elle vaut $(1 + 2 +$

... + 2010) − (1 + 2 + ... + 2010) = 0, ce qui est impossible car $1 + 2 + ... + 2009 = 1005 \times 2009$ est impair.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> (Principe des tiroirs) Par le principe des tiroirs il existe deux nombres consécutifs donc premiers entre eux.

On écrit nos $n+1$ nombres sous la forme $a_i = 2^{b_i} \times m_i$ avec m impair. Il y a n nombres impairs dans $\{1, 2, ..., 2n\}$ donc parle principe des tiroirs il existe $i \neq j$ tel que $m_i = m_j$. Alors a_i divise a_j ou a_j divise a_i.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> (Invariant) Oui le résultat est indépendant des opérations effectuées : on considère le produit de tous les nombres du tableau qui est invariant.

3 TD de Géométrie

Énoncés

Exercice 1 Soient (D_1), (D_2) et (D_3) trois droites parallèles. Construire un triangle équilatéral $A_1A_2A_3$ tel que A_1 soit sur (D_1), A_2 sur (D_2) et A_3 sur (D_3).

Exercice 2 Sur les côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ d'un triangle on construit des triangles équilatéraux ABP, BCM et CAN extérieur à ABC. Les droites (AM) et (BN) se coupent en F.

1 - montrer que $AM = FA + FB + FC$

2 - montrer que les trois droites (AM), (BN) et (CP) sont concourantes.

Exercice 3

Le cercle inscrit dans un triangle ABC est tangent en D, E et F respectivement aux côtés BC, CA, AB. Montrer que les droites (AD), (BE) et (CF) sont concourantes.

Exercice 4

Soit ABC un triangle, I le centre de son cercle inscrit. La bissectrice (AI) recoupe le cercle circonscrit en P. Montrer que $PB = PC = PI$.

Exercice 5

1 - Montrer que le symétrique de l'orthocentre H d'un triangle ABC par rapport au côté BC appartient au cercle circonscrit à ABC.

2 - Montrer que le symétrique de l'orthocentre H d'un triangle ABC par rapport au milieu A' de $[BC]$ appartient lui aussi au cercle circonscrit à ABC.

Exercice 6

Soit ABC un triangle, M, N et P trois points situés respectivement sur $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles ANP, BPM et CMN passent par un point commun T.

Exercice 7

Soit $ABCD$ un parallélogramme, P un point intérieur au parallélogramme vérifiant $\widehat{APB} + \widehat{CPD} = 180°$.

Montrer que $\widehat{ABP} = \widehat{ADP}$.

Exercice 8

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle de centre O. Soit P le point d'intersection de (AC) et (BD). Les cercles circonscrits aux triangles ABP et CDP se recoupent en Q. Si O, P, Q sont distincts, prouver que (OQ) est perpendiculaire à (PQ).

Solutions

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Choisissons A_1 arbitrairement sur (D_1). La rotation de centre A_1 et d'angle 60 envoie A_2 en A_3. Donc A_3 appartient à l'image de la droite (D_2) par cette rotation de centre A_1 et d'angle 60. Mais A_3 appartient aussi, par hypothèse, à (D_3) : c'est donc l'intersection des deux droites, qui existe nécessairement car ces droites font un angle de 60.

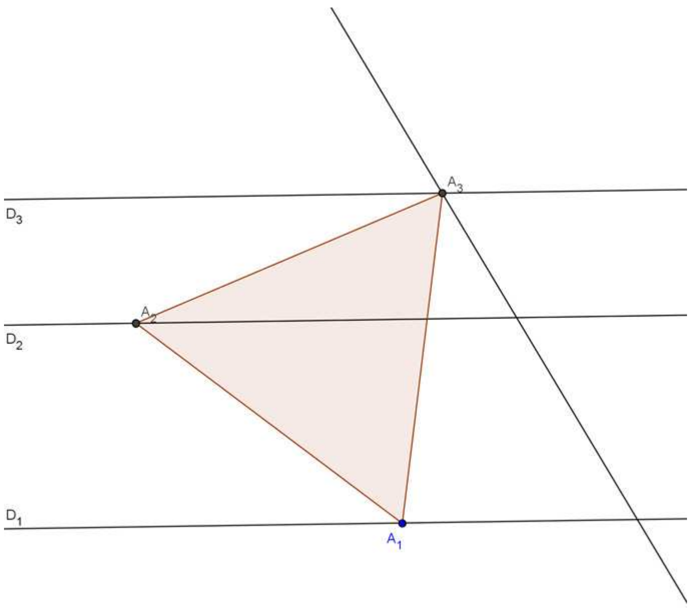


FIG. 2 – Exercice 1

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>

1 - La rotation de 60 et de centre C qui envoie M en B envoie également A en N, donc le segment $[AM]$ sur le segment $[BN]$. Non seulement les deux segments ont même longueur, mais ils forment un angle de 60. L'angle $\widehat{MFB}$ étant égal à $\widehat{MCB}$, les quatre points M, F, C et B sont cocycliques. Donc les angles $\widehat{FCM}$ et $\widehat{FBM}$ sont supplémentaires. Considérons maintenant la rotation de 60 et de centre M, qui envoie B en C, et appelons G l'image de F. Le triangle MBF est transformé en MCG, ces deux triangles sont donc isométriques, en particulier : $FB = CG$ et l'angle $\widehat{MCG} = \widehat{MBF}$. Il en résulte que les angles $\widehat{MCG}$ et $\widehat{MCF}$ sont supplémentaires, donc

que les points F, C et G sont alignés : $FG = FC + CG = FC + FB$. Mais le triangle MFG est équilatéral, donc $FG = FM$, d'où $FM = FC + FB$, donc $AM = FA + FB + FC$.

2 - Comme F est sur le cercle circonscrit à BCM, $\widehat{MFC} = \widehat{MBC} = 60 = \widehat{BFM}$, donc $\widehat{CFN}$ vaut lui aussi 60. Or la rotation de centre A et de 60 qui envoie N en C envoie B en P, donc BN sur CP. Il en résulte que (CP) fait elle aussi un angle de 60 avec (BN), tout comme (CF) : ces deux droites ont même direction et un point commun C, elles sont donc confondues, et F appartient à CP.

On remarque que non seulement $AM = BN = CP = FA + FB + FC$, mais pour tout autre point P, en s'inspirant de la méthode ci-dessus, $PA + PB + PC > AM$. F est donc le point pour lequel la somme $FA + FB + FC$ est minimale, on l'appelle "point de Fermat" du triangle. C'est également le point qui voit les trois côtés sous le même angle 120. Mais il faut supposer que les trois angles du triangle sont inférieurs à 120 pour que F soit intérieur au triangle, sinon le résultat n'est plus vrai tel qu'il est énoncé dans cet exercice.

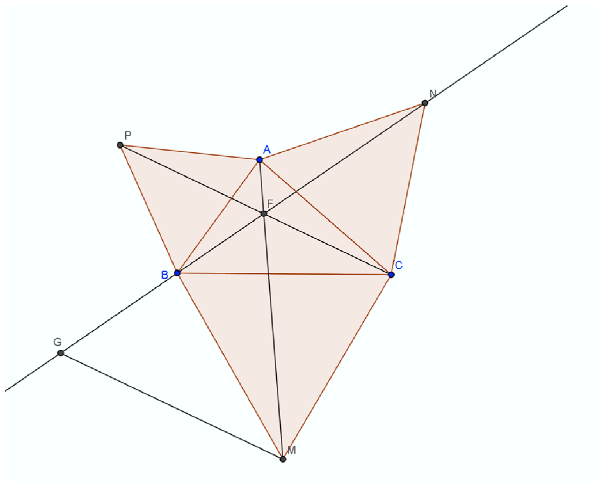


FIG. 3 – Exercice 2

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Par symétrie, les deux tangentes AE et AF issues de A au cercle inscrit sont de même longueur. Il suffit donc d'appliquer le théorème de Céva : en valeur absolue, il est clair que $\frac{FB}{FA} \cdot \frac{DC}{DB} \cdot \frac{EA}{EC} = 1$, car $AE = AF$, $BF = BD$, $CD = CE$. En mesure algébrique, chacun de ces rapports est négatif car F est entre A et B, D entre B et C et E entre C et A.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> C'est un problème classique de "chasse aux angles" : en calculant tous les angles de la figure, on verra apparaître des triangles isocèles qui permettront de conclure. Appelons α l'angle $\widehat{PAC}$. En tant qu'angle inscrit, il est égal à $\widehat{PBC}$, mais comme P est sur la bissectrice, il est aussi égal à $\widehat{PAB}$ donc à $\widehat{PCB}$. Le triangle PCB est donc isocèle : $PC = PB$, la bissectrice (AI) de l'angle $\widehat{BAC}$ angle passe par le milieu P de l'arc opposé BC. Maintenant, si l'on appelle β et γ les angles $\widehat{CBI}$ et $\widehat{BCI}$, $\widehat{ABC} = 2\beta$ et $\widehat{BCA} = 2\gamma$, donc $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = \pi$. Or $\widehat{BPI} = 2\gamma$, $\widehat{PBI} = \alpha + \beta$, il en résulte que $\widehat{BIP} = \alpha + \beta = \widehat{PBI}$, donc que le triangle BPI est isocèle ; $PB = PI$. On montrerait de même que $\widehat{CIP} = \alpha + \gamma = \widehat{PCI}$, donc $PI = PC$ ce qui résultait déjà des calculs précédents.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Deux méthodes pour ce résultat classique.

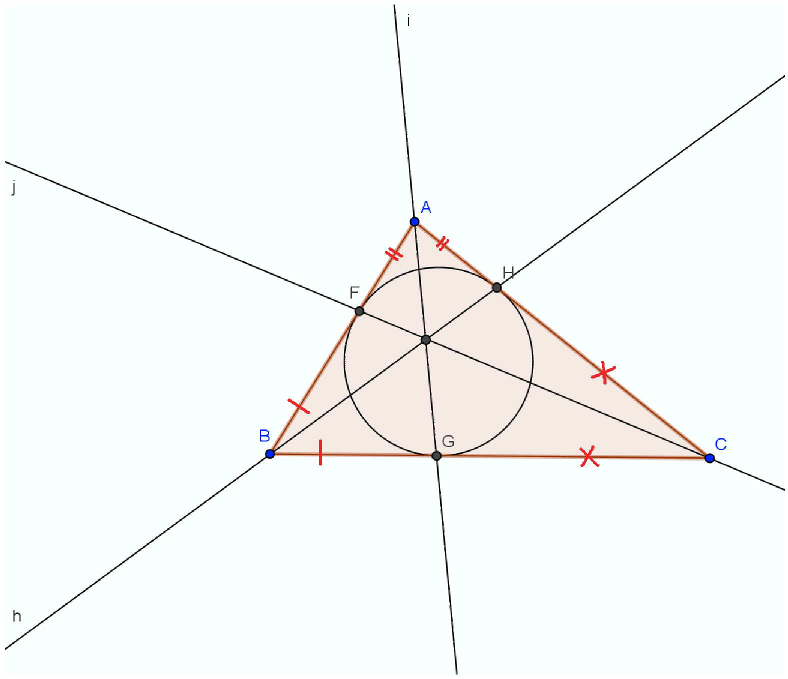


FIG. 4 – Exercice 3

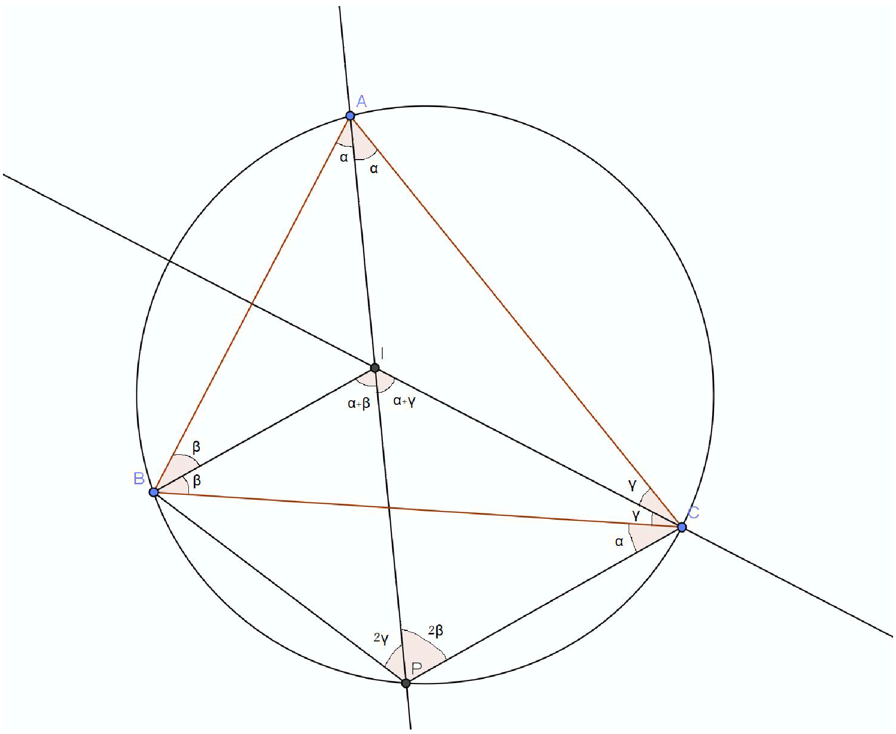


FIG. 5 – Exercice 4

Tout d'abord, le symétrique H'_A de H par rapport à BC vérifie : $\widehat{H'_ACB} = \widehat{BCH}$. Dans le triangle rectangle BCH_C (en appelant H_A, H_B et H_C les pieds des hauteurs issues de A, B et

C respectivement), cet angle vaut $\frac{\pi}{2} - \widehat{ABC}$, qui lui-même est égal, dans le triangle rectangle ABH_A, à $\widehat{H'_A AB}$. Cette égalité d'angles suffit à prouver que H'_A, A, B et C sont cocycliques.

On peut aussi remarquer que le cercle d'Euler du triangle ABC passe par les milieux de HA, HB, HC. Donc l'homothétie de centre H et de rapport 2 transforme ces milieux en A, B et C respectivement, donc le cercle d'Euler en le cercle circonscrit à ABC. Par cette homothétie, le pied H_A de la hauteur, qui appartient lui aussi au cercle d'Euler, est envoyé en H'_A, qui appartient donc au cercle circonscrit. De même, en réponse à la deuxième question, le milieu A' de BC, lui aussi sur le cercle d'Euler, est envoyé en un point du cercle circonscrit. Donc le symétrique de H par rapport à A', qui est précisément ce point, appartient au cercle circonscrit.

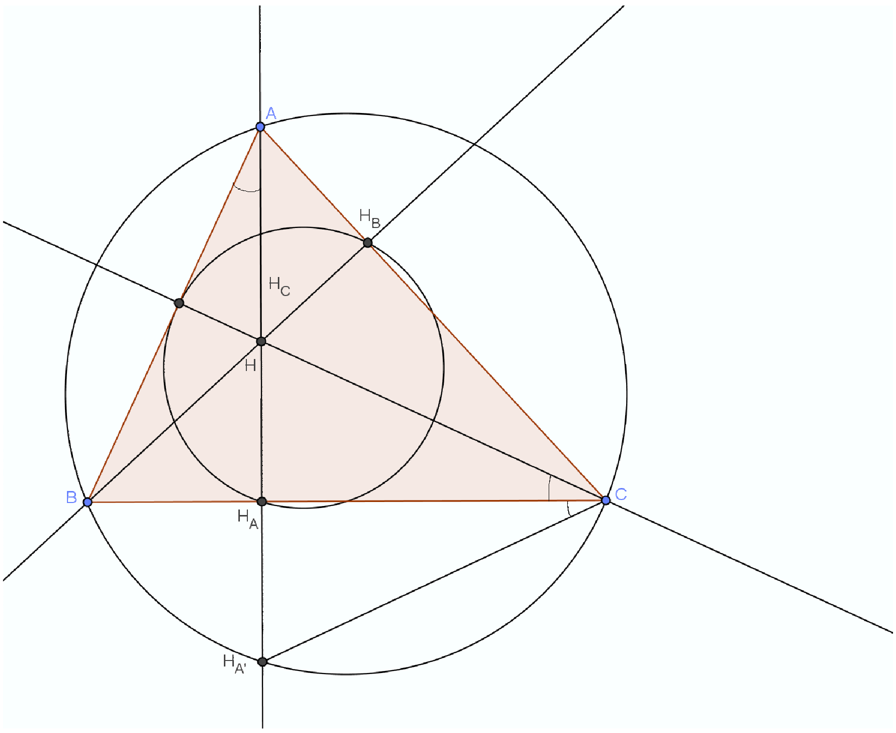


FIG. 6 – Exercice 5

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> Ce résultat est connu sous le nom de "Théorème de Miquel". Il suffit de considérer l'intersection de deux des cercles, et de prouver qu'elle appartient au troisième cercle. Appelons donc T l'intersection des cercles circonscrits à ANP et BPM. On pourrait remarquer que P est obligatoirement intérieur au triangle MNP vu que les triangles ANP, BPM et CMN sont intérieurs à leurs cercles circonscrits, mais pour traiter cela rigoureusement sans avoir à justifier cela, il suffit d'utiliser les angles de droites (angles dont il faut faire tourner la première droite pour l'amener sur la seconde). Le fait que les quatre points A, N, T, P soient cocycliques équivaut à l'égalité d'angles de droites : $(AN, AP) = (TN, TP)$. De même $(BP, BM) = (TP, TM)$. Comme (AP) et (BP) sont la même droite, la somme : $(AN, AP)+(BP, BM) = (AN, BM) = (CN, CM)$ vu que (AN) et (CN) sont la même droite, tout comme (BM) et (CM). Dans le membre de droite, $(TN, TP) + (TP, TM) = (TN, TM)$. Donc $(CN, CM) = (TN, TM)$, ce qui prouve bien que C, N, M et T sont cocycliques.

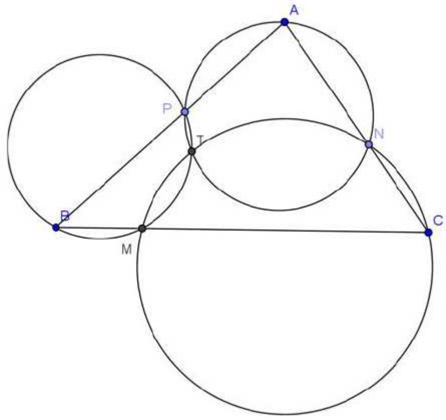


FIG. 7 – Exercice 6

Solution de l'exercice 7 Pour pouvoir utiliser le fait que les angles sont supplémentaires, il faudrait les placer de part et d'autre d'une même corde. Pour ce faire, considérons la translation qui envoie A en D, donc B en C, et appelons Q l'image de P. Le fait que $\widehat{CPD}$ et $\widehat{CQD}$ soient supplémentaires entraîne que C, P, D et Q sont cocycliques. Cela fournit d'autres égalités d'angles inscrits, par exemple : $\widehat{DCQ} = \widehat{DPQ}$. Mais le triangle DCQ étant translaté du triangle PBA, $\widehat{ABP} = \widehat{DCQ}$. Et comme (PQ) est parallèle à (AD), les angles $\widehat{DPQ}$ et $\widehat{ADP}$ sont eux aussi égaux, ce qui achève la démonstration.

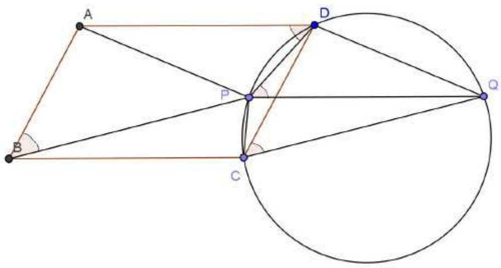


FIG. 8 – Exercice 7

Solution de l'exercice 8 Une fois de plus, on va à la chasse aux angles. $\widehat{AQD} = \widehat{AQP} + \widehat{PQD} = \widehat{ABP} + \widehat{PCD} = 2.\widehat{ABP} = \widehat{AOD}$ car l'angle au centre est le double de l'angle inscrit. On en déduit que A, O, Q et D sont cocycliques, ce qui entraîne $\widehat{OQA} = \widehat{ODA}$. Donc $\widehat{OQP} = \widehat{OQA} + \widehat{AQP} = \widehat{ODA} + \widehat{ABP} = \widehat{ODA} + \frac{1}{2}\widehat{AOD} = \frac{\pi}{2}$ car le triangle AOD est isocèle en O, d'où la conclusion.

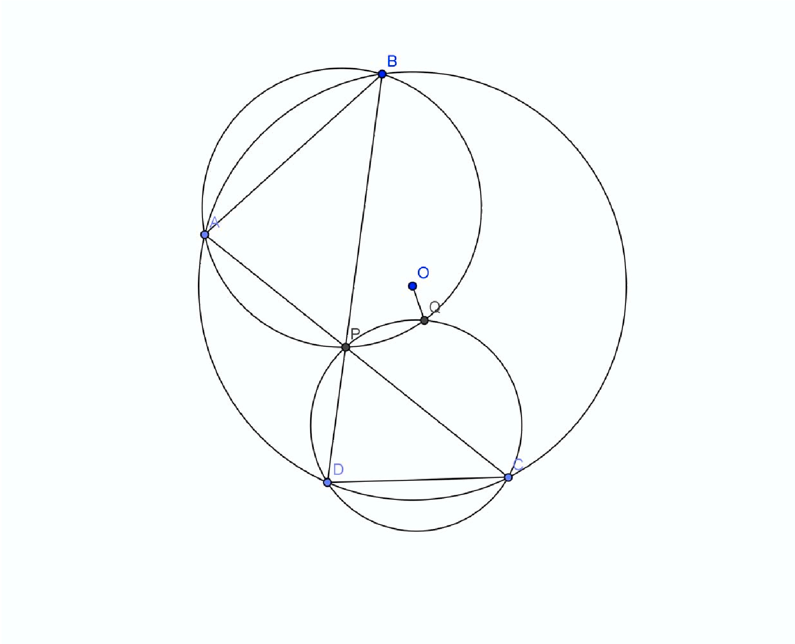


FIG. 9 – Exercice 8

4 TD d'Arithmétique

Énoncés

Exercice 1 Montrez qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $6n+5$.

Exercice 2 Trouvez le $PGCD$ de tous les nombres de la forme $n^{13}-n$.

Exercice 3 Montrez que la fraction $\frac{39n+4}{26n+3}$ est toujours irréductible.

Exercice 4 (Théorème de Wilson)
Montrer que $(p-1)! \equiv (-1)$ modulo p si et seulement si p est premier.

Exercice 5 La légende parle de la forêt magique de Grésillon, dans laquelle les arbres sont situées sur tous les points à coordonnées entières du plan. On dit qu'un arbre de coordonnées (p, q) est visible si p et q sont premiers entre eux. Montrer que pour tout entier n, il existe un carré de côté n qui ne contient que des arbres invisibles.

Exercice 6 Trouver $n > m \geq 1$ qui vérifient que les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de 42^n sont les mêmes que ceux de 42^m, et tels que la somme $m+n$ soit minimale.

Exercice 7 Montrez que pour tout entier n, la suite $2, 2^2, 2^{2^2}, \ldots$ est constante à partir d'un certain rang modulo n.

Exercice 8
On concidère la suite u_n suivante : $u_0 = 2010^{2010}$, et $u_{n+1} = u_n + 7$ si u_n est impair et $\frac{u_n}{2}$ s'il est pair. Quel est le plus petit entier que cette suite atteindra ?

Exercice 9

Trouvez tous les entiers n tels que $2^n + 3$ est un carré parfait. Même question avec $2^n + 1$.

Exercice 10

Trouvez tous les couples d'entiers (x, y) tels que

$$x^4 - 2y^2 = 1$$

Exercice 11

On note $[x]$ la partie entière de x, c'est à dire le plus petit entier inférieur ou égal à x, et on choisit n un entier, montrez que

$$\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right] = \left[\sqrt{4n+2}\right]$$

Exercice 12

Montrez que pour tout $n \geq 1$, le nombre

$$A_n = \prod_{k=0}^{n-1} (2^n - 2^k)$$

est divisible par $n!$.

Exercice 13

Montrez que pour tout premier p et tout entier k strictement compris entre 0 et p, $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$ est divisible par p.

Exercice 14

Calculez la somme infinie suivante :

$$\left[\frac{x+1}{2}\right] + \left[\frac{x+2}{4}\right] + \left[\frac{x+4}{8}\right] + \left[\frac{x+8}{16}\right] + \dots$$

Question intermédiaire : montrez que $[2x] = [x] + [x + 1/2]$.

Solutions

Solution de l'exercice 1 L'idée est qu'à part 2 et 3 tous les nombres premiers sont congrus à soit 1 soit 5 modulo 6. Donc tout nombre congru à 5 mod 6 a au moins un diviseur premier congru à 5 mod 6. Supposons qu'il y a un nombre fini de premiers de la forme $6n + 5$: $p_1, p_2, \dots, p_k$. Considérons alors

$$N = p_1 p_2 \dots p_k \quad \text{et} \quad M = 6N - 1$$

On vérifie facilement que M est congru à 5 mod 6, il a donc un facteur premier parmi les p_i. Ce nombre p_i divise M et N, donc il divise $(6N - M) = 1$. Contradiction !

Solution de l'exercice 2 Nous allons chercher tous les premiers qui divisent $n^{13} - n$ pour tout n, c-à-d $p|(n^{12} - 1)$ pout tout n premier avec p. Le petit théorème de Fermat dit que $p|(n^{p-1} - 1)$, donc si $(p-1)|12$, alors $p|(n^{12}-1)$ pour tout n premier avec p. On a au moins $p = 2, 3, 5, 7$ et 13. Maintenant montrons que p^2 ne divise pas $n^{13}-n$ pour tout n avec un cas particulier : p^2 divise p^{13} mais pas p donc p^2 ne divise pas $p^{13}-p$. La dernière étape est de montrer qu'il n'y a pas d'autre facteur premier. La solution idéale serait de montrer la réciproque du théorème de Fermat, mais ici il suffit d'observer que $2^{13}-2 = 8190 = 2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 13$. Le plus grand diviseur commun est donc $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 13 = 2730$.

Solution de l'exercice 3 Si un entier k divise $39n+4$ et $26n+3$, alors il divise aussi $3(26n+3) - 2(39n+4) = 1$, donc $k = 1$.

Solution de l'exercice 4 Tout d'abord, si p n'est pas premier alors il a un diviseur $d \in \{2, \ldots, p-1\}$, donc d divise $(p-1)!$. Cette factorielle ne peut donc pas être congrue à (-1) mod p.

À présent prenons p premier. Soit $1 \leq k \leq p-1$, la famille $\{0, k, 2k, \ldots, (p-1)k\}$ est une famille complète de résidus modulo p, donc il existe un (unique) entier $1 \leq m \leq p-1$ tel que $km \equiv 1$ mod p. On va donc ranger les $p-1$ entiers en couples (k, m) tels que $km \equiv 1[p]$. Il fau vérifier que l'on a pas des couples (k, k) : si $k^2 \equiv 1[p]$ cela signifie que $p|k^2-1 = (k+1)(k-1)$ donc soit $p|k-1$, soit $p|k+1$, les seuls entiers problématiques sont donc 1 et $p-1$, tous les autres peuvent se placer en couples, on en conclut que $2\cdot 3 \ldots (p-2) \equiv 1[p]$. Et on a bien $(p-1)! \equiv -1[p]$.

Solution de l'exercice 5 Soit (N,M) le coin inférieur gauche d'un tel carré. La condition "tous les arbres sont invisibles" revient à "pour tous $1 \leq i, j \leq n$, $PGCD(N+i, M+j) \neq 1$". Prenons n^2 nombres premiers $p_{i,j}$ et débrouillons nous pour que pour tous i, j, $p_{i,j}$ divise $PGCD(N+i, M+j)$. Cela signifie que pour tout i_0 fixé, $N + i_o$ est divisible par $\prod_{j=1}^{n} p_{i_0,j}$. Il faut donc trouver N tel que pour tout i, $N \equiv -i \left[\prod_{j=1}^{n} p_{i,j}\right]$. Le théorème chinois assure qu'un tel N existe. On trouve de la même facon un M tel que $M \equiv -j\ [\prod_{i=1}^{n} p_{i,j}]$. Et voila !

Solution de l'exercice 6 L'énoncé se traduit par $42^n \equiv 42^m[100]$, ou encore $100|42^m(42^{n-m}-1)$. Comme $100 = 4\times 25$, la preuve est en deux étapes : chercher les n, m tels que $4|42^m(42^{n-m}-1)$ et la même chose avec 25.
Comme $n > m$, $(42^{n-m}-1)$ est impair, il faut donc que $4|42^m$, ie $m \geq 2$.
Comme 42^m est premier avec 25, il faut que $25|(42^{n-m}-1)$. Le petit théorème de Fermat généralise indique que c'est bon si $(n-m) = \phi(25) = 20$, mais il faut vérifier qu'il n'y a pas de meilleure solution : il faut essayer tous les diviseurs de 20

$$\begin{aligned}
42^2 &\equiv (-8)^2 \equiv 64 \equiv (-11)[25] \\
42^4 &\equiv (-11)^2 \equiv 121 \equiv (-4)[25] \\
42^5 &\equiv (-4)\times(-8) \equiv 32 \equiv 7[25] \\
42^{10} &\equiv 7^2 \equiv 49 \equiv (-1)[25]
\end{aligned}$$

Donc la meilleure solution est $m = 2$, $n = 22$ et $m + n = 24$.

Solution de l'exercice 7 On note u_i le i-ème terme de la suite. On peut vérifier la formule de recurrence $i \geq 1$, $u_{i+1} = 2^{u_j}$. On va prouver la propriété par recurrence. Elle est evidente pour 1. Prenons un n quelconque et écrivons le sous la forme $2^k m$ avec m impair. Il est évident que la suite u_i est stationnaire à 0 mod 2^k. Il reste à montrer qu'elle est aussi stationnaire mod m. Par l'hypothèse de recurrence, il existe i_0 tels que pour tout $j \geq i_0$, $u_j \equiv u_{i_0}[\phi(m)]$, et Fermat généralisé montre qu'alors $u_{j+1} = 2^{p_j} \equiv 2^{u_{i_0}}[m]$, c-à-d que la suite est stationnaire à partir de $(i_0 + 1) \bmod m$.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> D'abord, il est évident que les u_n sont toujours strictement positif. Ensuite, regardons les minima possibles : si u_n est pair alors $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$ est strictement inférieur à u_n. Si u_n est impair et supérieur à 7, alors $u_{n+2} = \frac{u_n+7}{2}$ est strictement inférieur à u_n. Il reste à regarder 1, 3, 5 et 7.

- si $u_n = 7$, alors les termes suivants sont $14, 7, 14, 7, \ldots$ et la suite boucle
- si $u_n = 1$, alors les termes suivants sont $8, 4, 2, 1, 8, 4, \ldots$
- si $u_n = 3$, alors les termes suivants sont $10, 5, 12, 6, 3, 10, \ldots$, pareil pour $u_n = 5$

Il y a donc trois minima possibles : 1, 3 ou 7. On vérifie facilement que $7|u_{n+1}$ si et seulement si $7|u_n$. Et comme 2010^{2010} n'est pas divisible par 7, la suite ne passe jamais par 7. On essaie d'utiliser la même idée pour séparer les deux derniers cas : on sépare le reste des résidus modulo 7 : $A = \{1, 2, 4\}$ et $B = \{3, 5, 6\}$. Je vous laisse le loisir que $u_{n+1} \in A$ si et seulement si $u_n \in A$ mod 7, pareil pour B. Il reste de voir dans lequel des deux est 2010^{2010}. L'entier 2010 est divisible par 6, donc par petit Fermat $2010^{2010} \equiv 1[7]$, et la valeur minimum de la suite est 1.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> Un carré n'est jamais congru à 3 mod 4, donc $2^n + 3$ ne peut pas être un carré si $n \geq 2$. Il faut vérifier les deux autres cas : $2^0 + 3 = 4$ ca marche, $2^1 + 3 = 5$ pas bon.

La deuxième question n'est pas aussi facile. On réécrit l'équation $2^n = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$, donc $(x + 1)$ et $(x - 1)$ sont tous les deux des puissances de 2. Les seules puissances de 2 de différence 2 sont 2 et 4, donc la seule solution est $n = 3$, $8 + 1 = 9$.

<u>*Solution de l'exercice 10*</u> L'équation s'écrit

$$2y^2 = x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

Comme le terme de gauche est pair, x est impair et le membre de droite est divisible par 8, et y est pair. On remplace x par $2x' + 1$ et y par $2y'$. L'équation devient

$$y'^2 = x'(x' + 1)(2x'^2 + 2x' + 1)$$

Il est facile de voir que ces trois termes sont deux à deux premiers entre eux (on fait une combinaison qui donne 1). Soit p un facteur premier impair de y', et k sa valuation. Donc $p^{2k}|x'(x' + 1)(2x'^2 + 2x' + 1)$, et comme tous ces termes sont premier entre eux, cela signifie que p^{2k} divise l'un des trois termes. Cela signifie que les trois termes sont des carrés parfait. Mais les seuls carrés de la forme x et $x + 1$ sont 0 et 1, donc la seule solution est $x = 1$ et $y = 0$.

<u>*Solution de l'exercice 11*</u> Raisonnons par l'absurde, supposons qu'il existe un entier k tel que

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < k \leq \sqrt{4n+2}.$$

En mettant ces inégalités au carré, on obtient

$$2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)} < k^2 \leq 4n + 2$$

Ensuite on utilise $n = \sqrt{n^2} \leq \sqrt{n(n+1)}$

$$2n + 1 + 2n < k^2 \leq 4n + 2$$

Comme k^2 est un entier, la seule solution est que $k^2 = 4n+2$. Mais il n'existe pas de carré congru à 2 mod 4, contradiction !

<u>*Solution de l'exercice 12*</u> Pour tout premier p on note $v_p(A_n)$ la valuation p-adique de A_n (c-à-d l'exposant de p dans sa décomposition en facteurs premiers). On veut montrer qu'elle est supérieure à celle de $n!$. Utilisons la formule de Legendre :

$$v_p(n!) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \left[\frac{n}{p^4}\right] + \dots$$

On remarque d'abord que $\left[\frac{n}{p^k}\right] \leq \frac{n}{p^k}$, donc

$$v_p(n!) \leq \frac{n}{p} + \frac{n}{p^2} + \frac{n}{p^3} \dots = \frac{n}{p-1}$$

Comparons avec $v_p(A_n)$. Débarassons nous du cas $p = 2$

$$A_n = \prod_{k=0}^{n-1}(2^n - 2^k) = \prod_{k=0}^{n-1} 2^k(2^{n-k} - 1)$$

donc $v_2(A_n) = \frac{n(n-1)}{2}$. Maintenant, pour p impair : $(2^{n-k} - 1)$ est un multiple de p à chaque fois que $(n-k)$ est un multiple de p, ce qui arrive $\left[\frac{n}{p-1}\right]$ fois. On a donc

$$v_p(n!) \leq \frac{n}{p-1} \quad \text{et} \quad \left[\frac{n}{p-1}\right] \leq v_p(A_n)$$

On a presque l'inégalité souhaitée, à une partie entière près, mais comme les valuations sont des entiers, on est bons !

<u>*Solution de l'exercice 13*</u>

$$p! = \binom{p}{k} \cdot k! \cdot (p-k)!$$

Le premier p divise $p!$, mais ni $k!$ ni $(p-k)!$ puisque $1 \leq k \leq p-1$. Donc p divise $\binom{p}{k}$.

<u>*Solution de l'exercice 14*</u> On commence par observer que cette somme est finie. En effet, si $2^k > x$ alors $x + 2^k < 2^{k+1}$ et finalement $\left[\frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right] = 0$. Passons maintenant à la question intermédiaire. On fait simplement une disjonction de cas : si $n \leq x < n+1/2$ alors $[2x] = 2n$ et $[x]+[x+1/2] = n+n$, et si $n + 1/2 \leq x < n + 1$ alors $[2x] = 2n + 1$ et $[x] + [x + 1] = n + (n + 1)$. Sur le terme de la suite, ca permet d'avoir

$$\left[\frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right] = \left[\frac{x}{2^{k+1}} + \frac{1}{2}\right] = \left[2\frac{x}{2^{k+1}}\right] - \left[\frac{x}{2^{k+1}}\right]$$

$$\left[\frac{x+1}{2}\right] + \left[\frac{x+2}{4}\right] + \dots = \left([x] - \left[\frac{x}{2}\right]\right) + \left(\left[\frac{x}{2}\right] - \left[\frac{x}{4}\right]\right) + \dots$$

et les termes son téléscopiques, à la fin il ne reste que $[x]$.

3 Exercices du jour

1 Énoncés

Jeudi 19 août

Exercice 1 Trouver tous les triplets d'entiers naturels n, p et q tels que $n^p + n^q = n^{2010}$.

Exercice 2 On dispose de perles de plusieurs couleurs, de telle sorte qu'il n'y ait pas plus de la moitié des perles de la même couleur. Montrer qu'on peut les enfiler sur un collier (fermé) sans jamais avoir deux perles consécutives de la même couleur.

Vendredi 20 août

Exercice 3 Un entier n est dit *abondant* si la somme de ses diviseurs est supérieure à $2n$. Par exemple, 12 est abondant puisque $1+2+3+4+6+12 = 28$. Montrer que pour tout entier a, il existe un multiple de a qui est abondant.

Exercice 4 La suite de Fibonacci est définie par récurrence de la manière suivante :

$$F_0 = F_1 = 1$$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

Montrer que tout entier $n \geq 1$ peut s'écrire comme la somme de termes de la suite de Fibonacci F_n d'indices non consecutifs. Par exemple :

$$31 = 21 + 8 + 2 = F_7 + F_5 + F_2$$

Samedi 21 août

Exercice 5 On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r si et seulement si $u_{n+1} = u_n + r$. Est-il possible de colorier les entiers naturels avec 2 couleurs tels que chaque suite arithmétique infinie est bi-color ?

Exercice 6 On prend un carré de 10×10 avec 9 cases allumées et les autres éteintes. On peut allumer une case si deux de ses cases voisines sont allumées. Peut-on allumer toutes les cases du carré ?

Dimanche 22 août

Exercice 7 Soient C un cercle, A et B deux points de ce cercle, et P le point du segment $[AB]$ tel que $AP = 2PB$. Soient D et E les intersections de la perpendiculaire à (AB) passant par P avec le cercle C. Montrer que le milieu H de $[AP]$ est l'orthocentre du triangle ADE.

Lundi 23 août

Exercice 8

À Grésillon il y a deux types de personnes, les animateurs qui disent toujours la vérité et les stagiaires qui mentent toujours. Tout le monde à Grésillon à prononcé les deux phrases suivantes :
- « Toutes mes connaissances se connaissent »
- « Parmi mes connaissances le nombre de stagiaires et supérieur ou égal au nombre des animateurs »

Montrer que à Grésillon, le nombre d'animateurs est supérieur ou égale au nombre de stagiaires.

Exercice 9 Trouver toutes les fonctions f telles que pour tout nombre réel x, y on ait :

$$f(x\lfloor y\rfloor) = \lfloor f(x)\rfloor f(y)$$

où $\lfloor x\rfloor$ désigne le plus grand entier n tel que $n \leq x$.

2 Solutions

Jeudi 19 août

Solution de l'exercice 1 Soit (n, p, q) un triplet qui vérifie l'équation. Déjà, on vérifie que n ne peut pas prendre les valeurs 0 et 1. On suppose donc $n \geq 2$. Nécessairement, p et q sont plus petits que 2009, et donc $n^p \leq \frac{n^{2010}}{2}$, pareil pour n^q, et l'équation n'est vérifiée que dans le cas d'égalité, donc quand $n = 2$, et $p = q = 2009$.

Solution de l'exercice 2 On appelle n le nombre total de perles, et k le plus grand nombre de perles de la même couleur qu'on puisse trouver ; par hypothèse, on a donc $k \leq \frac{n}{2}$. Commençons par enfiler toutes ces k perles sur le collier ; il reste donc k intervalles entre ces perles. On va répartir le reste des perles dans ces intervalles, couleur par couleur, en respectant deux conditions :
- on ne met jamais deux perles de la même couleur dans un même intervalle. C'est possible, car il y a k intervalles et au plus k perles de chaque couleur.
- on remplit chaque intervalle. C'est possible, car on a $n-k$ perles à répartir dans k intervalles, et on sait que $n-k \geq k$; et un moment de réflexion convaincra le lecteur que cette condition est compatible avec la première.

La deuxième condition assure que deux perles de la couleur majoritaire ne sont jamais consécutives. La première assure que deux perles d'une même couleur (autre que majoritaire) sont toujours séparés par au moins une perle de la couleur majoritaire, et donc ne sont pas consécutives non plus, ce qui conclut.

Vendredi 20 août

Solution de l'exercice 3 Soit a un entier, on considère $12a$. Parmi les diviseurs de $12a$ il y a a, $2a$, $3a$, $4a$, $6a$ et $12a$. La somme de ces seuls diviseurs fait déjà $28a$, donc $12a$ est abondant.

Solution de l'exercice 4 Démontrons le résultat par récurrence. 1 vérifie la condition. Soit n un entier, on suppose que la condition est vraie pour tous les entiers m strictement inférieurs à n.

On regarde le plus grand nombre de Fibonacci F_k qui soit inférieur à n : $F_k \leq n < F_{k+1}$. Soit $m = n - F_k$, d'après l'hypothèse de récurrence, m s'ecrit de la facon suivante :

$$m = F_{i_1} + F_{i_2} + \cdots + F_{i_l}$$

avec $i_1 < i_2 < \cdots < i_l$ et $i_{j+1} \geq i_j + 2$. On a alors evidemment :

$$n = m + F_k = F_{i_1} \cdots + F_{i_l} + F_k$$

Il reste encore a démontrer que i_l et k ne sont pas consécutifs. Par l'absurde, si $i_l \geq k-1$ alors $m \geq F_{k-1}$ et $n \geq F_{k-1} + F_k = F_{k+1}$. Mais on avait choisi k tel que $F_k \leq n < F_{k+1}$. Contradiction ! Ceci achève la preuve de la récurrence.

Samedi 21 août

Solution de l'exercice 5 On prend le coloriage suivant : on colorie un entier en rouge, puis les deux suivants en vert, puis les trois suivants en rouge, etc. Le lecteur se persuadera de la validité de la construction.

Solution de l'exercice 6 Il est impossible d'obtenir toutes les cases du carré. En effet, le périmètre du contour des cases allumées est décroissant. Or il est initialement inférieur ou égal à $4 \times 9 < 4 \times 10$ qui est le périmètre du grand carré. D'où le résultat

Dimanche 22 août

Solution de l'exercice 7 La droite (AP) est une hauteur évidente de ADE qui passe par H. Montrons que la droite (DH) est une autre hauteur de ADE. Soit D' l'intersection des droites (DH) et (AE). On a par le théorème de l'angle inscrit $\widehat{AED} = \widehat{ABD}$. De même $\widehat{PDB} = \widehat{D'AH}$. On a $\widehat{AHD'} = \widehat{DHB} = \widehat{DBH}$ car DHB est isocèle en D. Donc $\widehat{DHA} = \pi - \widehat{AHD'} - \widehat{D'AH} = \pi - \widehat{DBP} - \widehat{PDB} = \frac{\pi}{2}$ d'où le résultat.

Lundi 23 août

Solution de l'exercice 8 Supposons qu'il y a k élèves, que l'on note E_1, E_2 ... E_k. Nous allons montrer par récurrence un résultat légèrement plus fort. Il faut être précis pour énoncer l'hypothèse de récurrence. Nous allons prouver par récurrence que pour tout $i \leq k$, on peut associer à chacun des i premier élèves E_1, E_2 ... E_i des animateurs A_1, A_2 ... A_i, de telle sorte que pour tout $j \leq i$, E_j connaisse A_j, et que ces animateurs soient disjoints. Ce résultat pour $i = k$ permet immédiatement de conclure.

Initialisation : pour $i = 1$, la propriété veut juste dire que le premier élève, E_1, connaît au moins un animateur. C'est évident, car comme l'élève ment, il connaît strictement plus d'animateurs que d'élèves, et en particulier il connaît au moins un animateur.

Hérédité : supposons la propriété vraie au rang i, soient A_1, A_2 ... A_i, les animateurs construits par l'hypothèse de récurrence, nous allons construire A_{i+1}. Supposons par l'absurde que c'est impossible. Cela veut dire que tous les animateurs connus par E_{i+1} sont parmi A_1, A_2 ... A_i.

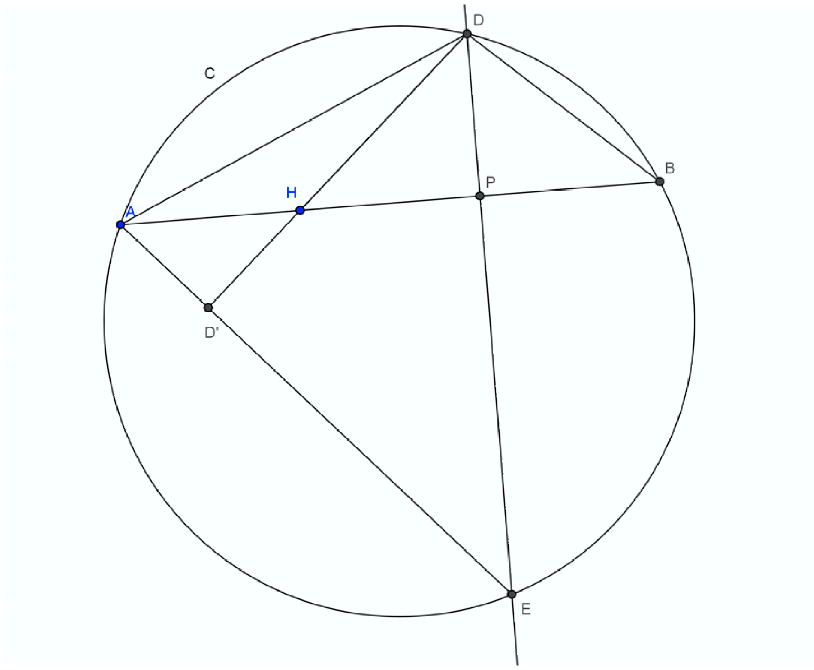


FIG. 10 – Exercice du dimanche 22 août

Mettons qu'il en connaisse n, quitte à renuméroter, on peut supposer qu'il connaisse A_1, A_2 ... A_n, et eux seuls. Alors, pour tout $m \leq n$, A_m connaît E_m et E_{i+1}. Comme A_m dit la vérité, E_m et E_{i+1} se connaissent. E_{i+1} connaît donc les n premiers élèves E_1, E_2 ... E_n, donc plus de n élèves, et il connaît exactement n animateurs. Contradiction avec le fait que E_{i+1} ment.

Solution de l'exercice 9 On a

$$f(x\lfloor y\rfloor) = f(x\lfloor\lfloor y\rfloor\rfloor) = \lfloor f(x)\rfloor f(\lfloor y\rfloor)$$

Donc on a $(f(\lfloor y\rfloor) - f(y))\lfloor f(x)\rfloor = 0$ pour tout x et y réels.

- Si $\lfloor f(x)\rfloor = 0$ pour tout x alors $f(y \times 1) = f(y)\lfloor f(1)\rfloor = 0$ pour tout y réels.
- Sinon il existe x_0 tel que $\lfloor f(x_0)\rfloor \neq 0$ donc pour tout y réel on a $f(\lfloor y\rfloor) = f(y)$. On a donc immédiatement $f(x) = f(\lfloor x\rfloor 1) = f(x)\lfloor f(1)\rfloor$ et donc $f(x)(1 - \lfloor f(1)\rfloor) = 0$. Pour $x = x_0$ on a $\lfloor f(1)\rfloor = 1$.
  - Si $\lfloor f(0)\rfloor = 0$ alors on a :

$$1 \leq f(x) \leq f\left(2.\frac{1}{2}\right) = f(2)\lfloor f\left(\frac{1}{2}\right)\rfloor = f(2)\lfloor f\left(\lfloor\frac{1}{2}\rfloor\right)\rfloor = f(2)\lfloor f(0)\rfloor = 0$$

    ce qui est impossible
  - Si $\lfloor f(0)\rfloor \neq 0$ avec l'équation fonctionnelle de départ on a donc $f(0) = f(x)\lfloor f(0)\rfloor$ pour tout x. Donc $f(x) = c$ avec c une constante et on a $\lfloor f(1)\rfloor = \lfloor c\rfloor = 1$

Réciproquement les fonction constantes $f = c$ avec $c \in [1, 2[$.

4 Tests

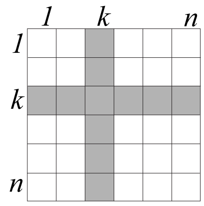
1 Test de Stratégies de Base (3h)

Énoncés

Exercice 1 Au Stage de Grésillon, 43 élèves sont réunis pour faire des maths jour et nuit. Certains d'entre eux sont amis, en sachant que si un élève A est ami avec l'élève B, alors B est ami avec A. Montrer qu'il existe deux élèves qui ont le même nombre d'amis.

Exercice 2 On considère un tableau carré de taille $n \times n$.

On veut remplir ce tableau avec les entiers 1 à $2n-1$ de sorte que pour tout entier k compris entre 1 et n, dans la croix formée par la réunion de la k-ième ligne et de la k-ième colonne (voir dessin ci-contre), il n'apparaisse pas deux fois le même nombre.



Prouver que ceci est possible lorsque n est une puissance de 2.

Exercice 3 Les nombres entiers $1, 2, \ldots, 7$ sont écrits au tableau. À chaque étape, on a le droit d'effacer deux nombres a et b au tableau et, à leur place, écrire $\frac{2a+b}{3}$ et $\frac{a+2b}{3}$.

1. Au bout d'un nombre fini d'étapes, peut-on obtenir un tableau sur lequel le nombre 3 apparaît 7 fois ?
2. Au bout d'un nombre fini d'étapes, peut-on obtenir un tableau sur lequel le nombre 4 apparaît 7 fois ?

Exercice 4 Les points du plan sont coloriés de telle sorte que chaque point soit rouge ou bleu.

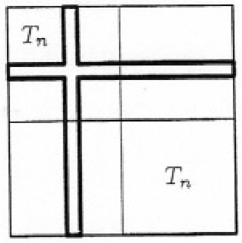
(i) Montrer que pour tout réel x il existe une couleur telle qu'on puisse trouver deux points de cette couleur distants de x.

(ii) Montrer qu'il existe une couleur telle que pour tout réel x on puisse trouver deux points de cette couleur distants de x.

Solutions

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Le nombre d'amis d'un élève est compris entre 0 et 42. Supposons par l'absurde que tous les élèves aient un nombre différent d'amis. Alors un élève a 0 amis, un autre en a 1, ..., un autre en a 42. Mais alors l'élève ayant 42 amis est ami avec tout le monde, et en particulier avec celui qui a 0 amis, contradiction.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 1$ c'est trivial : on met un 1 dans la seule case. On suppose donc que la propriété est vraie au rang n, et on considère un tableau $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ subdivisé en 4 tableaux de $2^n \times 2^n$. On place deux copies T_n en diagonale (cf figure 8). Il suffit de remplir les 2 autres tableaux avec des nombres de 2^{n+1} à $2^{n+2} - 1$ tels



que une ligne ou une colonne ne contiennent pas deux fois le même nombre. Mais c'est facile en suivant le schéma ci-dessous.

Solution de l'exercice 3 1. On remarque que $\frac{2a+b}{3}+\frac{a+2b}{3}=a+b$. La somme des nombres écrits sur le tableau est donc un invariant égal à $1+2+...+7=\frac{8\times 7}{2}=28$. Comme $28\neq 3\times 7=21$, il est impossible d'obtenir 7 nombres '3'.

2. Supposons qu'on obtienne 7 nombres '4'.Alors on obtient à une étape 5 nombres '4' et deux nombres distincts a et b tels que $\frac{a+2b}{3}=\frac{2a+b}{3}$ donc $a=b$. Impossible.

Solution de l'exercice 4 (i) On trace un triangle équilatéral de côté x. Par le principe des tiroirs 2 sommets ont même couleur, d'où le résultat.

(ii) On suppose par l'absurde qu'il existe x tels que deux points rouges ne sont jamais à distance x et y tel que deux points bleus ne sont jamais à distance y. Sans perte de généralité, quitte à échanger les couleurs, on peut supposer $x>y$. Considérons un point rouge A (si tout le plan est bleu, c'est trivial) et un triangle isocèle de sommet A dont les côtés sont x, x et y. Contradiction car les deux points du côté de longueur y ne peuvent être bleus tous les deux.

2 Test de Géométrie (3h)

Énoncés

Exercice 1 Soient $ABCD$ un quadrilatère convexe et Z un point à l'intérieur de celui-ci. On note α_1 l'angle $\widehat{ZAD}$, α_2 l'angle $\widehat{ZAB}$, β_1 l'angle $\widehat{ZBA}$, β_2 l'angle $\widehat{ZBC}$, γ_1 l'angle $\widehat{ZCB}$, γ_2 l'angle $\widehat{ZCD}$, δ_1 l'angle $\widehat{ZDC}$, δ_2 l'angle $\widehat{ZDA}$. Montrer l'égalité suivante :

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}\frac{\sin\delta_1}{\sin\delta_2}=1.$$

Exercice 2 Soit P un point intérieur au triangle ABC. Les droites (AP), (BP) et (CP) coupent respectivement (BC), (CA) et (AB) en A', B' et C'. Montrer que $\frac{PA'}{AA'}+\frac{PB'}{BB'}+\frac{PC'}{CC'}=1$.

Exercice 3 Soit ABC un triangle acutangle (ayant tous ses angles aigus), soient L et N les intersections de la bissectrice intérieure de l'angle en A avec (BC) et avec le cercle circonscrit à ABC respectivement. Soient K et M les projections orthogonales de L sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$. Montrer que l'aire du quadrilatère $AKNM$ est égale à celle du triangle ABC.

Exercice 4 Soit ABC un triangle et ω son cercle inscrit. On note A', B', C' les points de contact de ω avec respectivement les côtés $[BC], [AC], [AB]$. Soit Z un point à l'intérieur de ω. On note $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ les intersections de ω avec respectivement les segments $[AZ], [BZ], [CZ]$. Montrer que les trois droites $(\widehat{A}A')$, $(\widehat{B}B')$ et $(\widehat{C}C')$ sont concourantes.

Solutions

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> La méthode la plus simple est d'utiliser la loi des sinus dans les triangles ZAB, ZBC, ZCD et ZDA. En effet, dans ces triangles on a : $\frac{ZA}{ZB} = \frac{\sin\beta_1}{\sin\alpha_2}$, $\frac{ZB}{ZC} = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\beta_2}$, $\frac{ZC}{ZD} = \frac{\sin\delta_1}{\sin\gamma_2}$, $\frac{ZD}{ZA} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\delta_2}$, de sorte que le produit cherché vaut : $\frac{ZA}{ZB}\cdot\frac{ZB}{ZC}\cdot\frac{ZC}{ZD}\cdot\frac{ZD}{ZA}$, ce qui est manifestement égal à 1.

Mais on peut aussi raisonner en géométrie projective. Considérons la situation duale : les quatre points A, B, C et D deviennent quatre droites a, b, c, d. Les droites $m = AB$, $n = BC$, $p = CD$ et $q = DA$ deviennent quatre points : a et b se coupent en M, b et c en N, c et d en P et d et a en Q. On ajoute une cinquième droite z, duale de Z, qui coupe a, b, c, d en A', B', C' et D' respectivement. Par dualité, on appellera a', b', c' et d' les droites ZA, ZB, ZC et ZD. Au rapport des sinus : $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = r_{qma'}$ correspond le rapport $r_{QMA'} = \frac{Q-A'}{M-A'}$, et la relation à démontrer équivaut à : $r_{QMA'}.r_{MNB'}.r_{NPC'}.r_{PQD'} = 1$. Ce produit de rapports est invariant par projection, et si l'on projette la droite z à l'infini, donc les points A', B', C' et D' à l'infini, chacun des rapports est égal à 1, de sorte que leur produit est égal à 1, ce qui suffit à démontrer le résultat annoncé ainsi que son dual dans tous les cas.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> D'après le théorème de Thalès, si l'on appelle h_A la hauteur issue de A et p_A la distance de P au côté BC, $\frac{PA'}{AA'} = \frac{p_A}{h_A}$. Or l'aire du triangle ABC vaut $BC.h_A$, et l'aire du triangle PBC vaut $BC.p_A$. Comme la somme des aires des triangles PBC, PCA, PAB est manifestement égale à l'aire de ABC, on a le résultat.

On peut aussi remarquer que si P est barycentre de A, B, C affecté de coefficients u, v et w, avec $u + v + w = 1$, A' est barycentre de B et C affectés de coefficients v et w, et P est barycentre de A et A' affectés de coefficients u et $v + w$. Ce qui entraîne que $\frac{PA'}{AA'} = u$, ce qui entraîne $\frac{PA'}{AA'} + \frac{PB'}{BB'} + \frac{PC'}{CC'} = u + v + w = 1$.

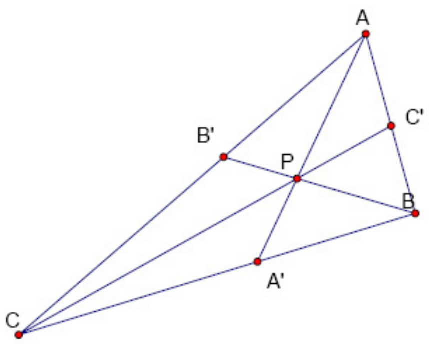


FIG. 11 – Exercice 2.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> L'aire du quadrilatère $AKNM$ peut se décomposer en : $Aire(AKLM)+Aire(KLN)+Aire(LMN)$. Si l'on prouve que : $Aire(KLN)+Aire(LMN)=Aire(KLB)+Aire(LMC)$, il en résultera : $Aire(AKNM)=Aire(ABC)$.

Si l'on appelle K' et M' les projections orthogonales de N sur AB et AC respectivement, comme $K'N$ est parallèle à KL, les triangles KLN et KLK' ont même base KL et même hauteur, donc même aire. De même, les triangles LMN et LMM' ont même aire. Il suffit donc de prouver que $Aire(KLB)-Aire(KLK')=Aire(LMM')-Aire(LMC)$, soit : $Aire(K'NB)=Aire(NM'C)$. Or les deux triangles rectangles $NM'C$ et $NK'B$ sont manifestement isométriques : ils ont même hypoténuse $NB=NC$ car N est le milieu de l'arc BC (le triangle NBC est isocèle vu que N, B, C et A cocycliques entraîne $\widehat{NBC}=\widehat{NAC}$ et $\widehat{NCB}=\widehat{NAB}$), l'un des côtés de l'angle droit NK' est égal à NM' car N est sur la bissectrice, donc, d'après le théorème de Pythagore, l'autre coté de l'angle droit vérifie aussi : $K'B=M'C$. Donc les triangles $K'LB$ et $LM'C$ ont même aire $\frac{1}{2}K'BLK=\frac{1}{2}M'CLM$, ce qui achève la démonstration.

On pouvait également remarquer que la symétrie par rapport à AN transforme K en M, donc le quadrilatère $AKNM$ est un "cerf-volant" dont l'aire vaut $\frac{1}{2}AN.KM$. Or K et M sont sur le cercle de diamètre AL, vu que les angles $\widehat{AKL}$ et $\widehat{AML}$ sont droits, d'où $KM=AL.sin\widehat{A}$. Comme $AireABC=\frac{1}{2}.AB.AC.sin\widehat{A}$, il reste à prouver que $AB.AC=AN.AL$. Mais comme les angles inscrits $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ANB}$ sont égaux, les triangles ACL et ANB sont semblables, donc $\frac{AC}{AN}=\frac{AB}{AV}$.

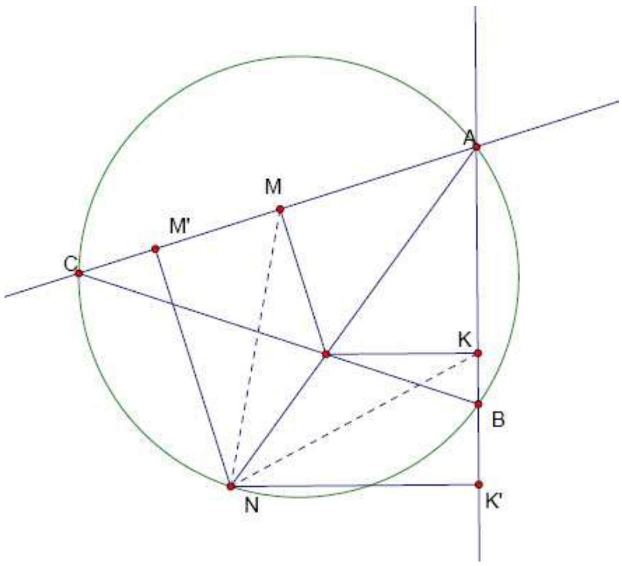


FIG. 12 – Exercice 2.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Pour cet exercice, le plus simple est d'utiliser la géométrie projective. En effet, la concourance des trois droites se conserve par projection. Or on peut projeter la figure de manière à conserver le cercle en envoyant le point Z au centre du cercle. Il suffit donc de démontrer ce résultat lorsque Z est au centre du cercle pour montrer qu'il reste vrai dans tous les autres cas. Mais si Z est au centre du cercle, $\widehat{A}$ est le milieu de l'arc $B'C'$, donc $A'\widehat{A}$ est bissectrice de l'angle $\widehat{B'A'C'}$. De même, $B'\widehat{B}$ est bissectrice de l'angle $\widehat{C'B'A'}$ et $C'\widehat{C}$ est bissectrice de l'angle

$\widehat{A'C'B'}$. Ces trois droites sont manifestement concourantes au centre du cercle inscrit du triangle $A'B'C'$.

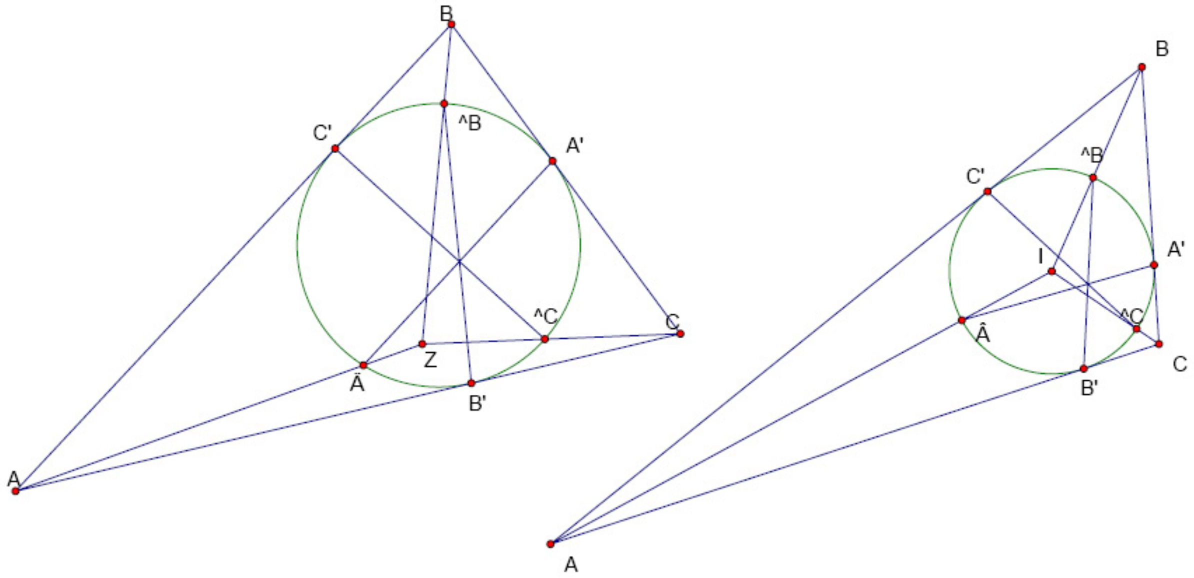


Fig. 13 – Exercice 4.

3 Test d'Arithmétique (3h)

Énoncés

Exercice 1 Trouver tous les entiers positifs x et y tels que $3^x + 7 = 2^y$.

Exercice 2 Trouver tous les entiers positifs n tels que 2^n+3 soit un carré parfait. Même question avec $2^n + 1$.

Exercice 3 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $a_0 = 2$ et $a_1 = 5$ et pour $n > 0$:

$$a_{n+1} = (2 - n^2)a_n + (2 + n^2)a_{n-1}$$

Est-ce qu'il existe trois entiers positifs p, q, r tels que $a_p \cdot a_q = a_r$?

Exercice 4 Soit m un entier strictement positif. Peut-on trouver m nombres entiers positifs a_1, a_2, ..., a_m placés sur un cercle tels que si on prend deux nombres consécutifs sur ce cercle, le quotient du plus grand sur le plus petit est un nombre premier ?

Solutions

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>
Modulo 3, on obtient que $(-1)^y = 1$ donc y est pair : $y = 2y'$. Si $y = 0$, on a $3^x < 0$ donc il n'y a pas de solutions. Sinon $y \geq 2$ et modulo 4 on obtient $3^x \equiv 1[4]$. Or $3^x = (-1)^x[4]$ donc $x = 2x'$. D'où $7 = (2^{y'} + 3^{x'})(2^{y'} - 3^{x'})$. Donc $2^{y'} + 3^{x'} = 7$ et $2^{y'} - 3^{x'} = 1$ donc en sommant $2 \times 2^{y'} = 8$ donc $y' = 2$ et $x' = 1$. La seule solution est donc $(x, y) = (2, 4)$.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Pour $n = 0$, $2^n + 3 = 2^2$ est un carré parfait. On vérifie que $n = 1$ n'est pas solution. Donc on peut supposer $n \geq 2$ et $2^n + 3 \equiv 3[4]$ or un carré est congru à 0 ou 1 modulo 4 donc pour $n \geq 2$, $2^n + 3$ n'est pas un carré parfait.

Supposons que $2^n + 1 = x^2$. Alors $(x-1)(x+1) = 2^n$. Donc $x - 1 = 2^k$ et $x + 1 = 2^{n-k}$. D'où $2^k + 1 = 2^{n-k} - 1$. Donc $2 = 2^{n-k} - 2^k$ donc 2^k divise 2 donc $k = 0$ ou $k = 1$. On obtient alors $x = 2$ ou $x = 3$ ce qui donne $(n, x) = (3, 3)$ comme seule solution.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Une récurrence immédiate montre que $a_n \equiv 2[3]$ pour tout entier n. Ainsi, pour tout choix d'indices p, q et r, $a_p \cdot a_q \equiv 1 \neq 2 \equiv a_r[3]$.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Pour m pair on trouve aisément un exemple (avec q premier) : $a_1 = p$, $a_2 = pq$, $a_3 = p$, $a_4 = pq$, ..., $a_{m-1} = p$, $a_m = pq$. Pour m impair on se rend compte qu'il n'est pas possible de trouver un exemple. Une première solution (expéditive) consiste à remarquer que $\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \dots \frac{a_{m-1}}{a_m} \cdot \frac{a_m}{a_1} = 1$. Donc 1 est un produit nombres premiers ou inverses de nombres premiers. On peut donc regrouper deux à deux les terme du produit sous la forme $(p, \frac{1}{p})$. Contradiction car m est impair.

Deuxième solution : On considère v_i la somme des exposants dans la décomposition de a_i en nombres premiers. Alors v_i et v_{i+1} ont parité contraire. Impossible car il y a un nombre impair de v_i et que v_1 et v_m ont parité contraire.

V. Groupe des Avancés

1 Cours

1 Polynômes

Le but de ce cours est d'introduire la notion de polynôme, de présenter la division euclidienne et son lien avec l'arithmétique des polynômes.

Opérations sur les polynômes

Dans ce qui suit, nous ne ferons pas de distinction entre polynôme et fonction polynomiale associée. Il faudrait la faire en toute rigueur, mais plutôt que de rendre l'exposition abstraite, nous préférons insister sur les idées sous-jacentes. Voir l'appendice situé à la fin du cours pour plus de détails.

Définition 1.1. Une fonction P de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est appelée polynôme à coefficient réels (abrégé en polynôme dans ce qui suit) s'il existe des nombres réels $a_0, \dots, a_n$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Si $a_n \neq 0$, on dit que le degré de P, noté $\deg P$, vaut n. On décrète que le degré du polynôme nul est $-\infty$. Dans ce cas, a_n est appelé le coefficient dominant de P. Si le coefficient dominant de P vaut 1, on dit que ce polynôme est unitaire. On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. De même, on note $\mathbb{Q}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels et $\mathbb{Z}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients entiers.

Exemple 1.2. La fonction $P(x) = \sqrt{2} - 2x + \pi x^2$ est un polynôme de degré 2 de coefficient dominant π. La fonction $Q(x) = |x|$ n'est pas un polynôme (pourquoi ?).

Remarque 1.3. Par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$. Ainsi, les polynômes de degré zéro sont exactement les fonctions constantes non nulles.

Proposition 1.4. Soient P, Q deux polynômes. Alors $P + Q$ et $P \times Q$ sont également deux polynômes.

Démonstration. Pour $P+Q$ il suffit d'utiliser le fait que $\alpha x^i + \beta x^i = (\alpha+\beta)x^i$ pour un nombre réel x, et pour $P(x) \times Q(x)$, il suffit de développer le produit. $\square$

Exemple 1.5. Pour tout réel a et tout entier positif n, $P(x) = (x-a)^n$ est un polynôme.

Proposition 1.6. Soient P, Q deux polynômes. Alors $\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$ et $\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$ (avec la convention $-\infty + \alpha = -\infty$ pour que cet énoncé soit valable si l'un des deux polynômes est nul).

Démonstration. On vérifie aisément que $\deg(P+Q) = \deg P$ si $\deg P > \deg Q$, que $\deg(P+Q) = \deg Q$ si $\deg Q > \deg P$ et que si $\deg P = \deg Q$, alors $\deg(P+Q) \leq \deg P$. Il peut cependant ne pas y avoir égalité (prendre par exemple $P(x) = x^2$ et $Q(x) = -x^2$).

La deuxième partie de la proposition découle du fait que si a_n est le coefficient dominant de P et b_m est le coefficient dominant de Q, alors $a_n b_m$ est le coefficient dominant de PQ. $\square$

Exemple 1.7. Soit E un ensemble fini et $f : E \to \mathbb{N}$ une application. Alors

$$P(x) = \sum_{\alpha \in E} x^{f(\alpha)}$$

est un polynôme à coefficients entiers. Si k_n désigne le nombre nombre d'éléments $\alpha \in E$ tels que $f(\alpha) = n$, alors le coefficient devant x^n est égal à k_n. Le polynôme P est appelé fonction génératrice associée à f. Ce genre de polynômes apparaissent fréquemment en combinatoire, où il arrive qu'on ne connaisse pas de formule explicite pour k_n, bien que le polynôme P se calcule aisément (voir exercice 20). L'intérêt d'introduire cette fonction génératrice est que la connaissance du polynôme P nous permet alors d'accéder à certaines informations (par exemple des formules de récurrence ou un comportement asymptotique).

Division euclidienne et racines

Dans cette partie, notre but est d'expliquer en quoi la connaissance des racines d'un polynôme P, c'est-à-dire des éléments x tels que $P(x) = 0$, donne des informations sur P. On commence par montrer qu'il existe une notion de division euclidienne de polynômes très similaire à celle des entiers.

- Division euclidienne de polynômes -

Ici, et dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$.

Théorème 1.8. Soient $P, U \in \mathbb{K}[X]$ avec $\deg U \geq 1$. Alors il existe un unique couple de polynômes $Q, R \in \mathbb{K}[X]$ tels que :

$$P = QU + R \qquad \text{et} \qquad \deg(R) \leq \deg(U) - 1.$$

Démonstration. Pour l'existence, on applique l'algorithme vu en cours en abaissant à chaque étape le degré de P. Plus précisément, on pose $P_0 = P$ et $Q_0 = 0$. On commence à l'étape 0 et voici ce qu'on fait à l'étape k : notons d degré de P_k et p_d son coefficient dominant. Notons également n le degré de U et u_n son coefficient dominant. Si $\deg(P_k) \leq \deg(U) - 1$, on arrête l'algorithme en prenant $Q = Q_k$ et $R = P_k$. Sinon, on pose :

$$P_{k+1} = P_k - \frac{p_d}{u_n} X^{d-n} U \qquad \text{et} \qquad Q_{k+1} = Q_k + \frac{p_d}{u_n} X^{d-n}.$$

On passe ensuite à l'étape $k+1$. L'algorithme se termine bien car le degré de P_k est au plus $\deg P - k$, et les polynômes Q et R donnés par l'algorithme vérifient les conditions requises.

Pour l'unicité, supposons par l'absurde qu'il existe deux tels couples Q, R et Q', R'. Alors $QU + R = Q'U + R'$. En particulier, $Q \neq Q'$, car sinon on a aussi $R = R'$. Cela implique également :

$$U(Q - Q') = R' - R.$$

Or, d'après la proposition 1.6, le degré du terme de gauche et supérieur ou égal à celui de U et celui de droite est inférieur ou égal à $\deg(U) - 1$, ce qui est contradictoire et conclut la démonstration. □

Remarque 1.9. La division euclidienne telle quelle est fausse pour des polynômes à coefficients entiers. Par exemple, il n'existe pas de $Q \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $3x^2 + 1 = Q(x)(2x + 1)$ (comparer les coefficients dominants). En revanche, en reproduisant la démonstration précédente, si $P, U \in \mathbb{Z}[X]$ **et que le coefficient dominant de** U **est** 1, alors si $\deg U \geq 1$, il existe il existe un unique couple de polynômes $Q, R \in \mathbb{K}[X]$ tels que :

$$P = QU + R \qquad \text{et} \qquad \deg(R) \leq \deg(U) - 1.$$

En effet, dans la preuve précédente, il a fallu diviser par « u_n ». Or, lorsqu'on divise par des éléments de $\mathbb{Z}$, on ne reste pas dans $\mathbb{Z}$. Ceci explique un peu d'ailleurs pourquoi la théorie des polynômes à plusieurs variables est plus compliquée que celle des polynômes à une variable. En effet, on peut par exemple voir les polynômes réels à deux variables comme les polynômes en y à coefficients dans $\mathbb{R}[X]$. Mais, de même que dans $\mathbb{Z}$, tous les éléments de $\mathbb{R}[X]$ ne sont pas inversibles.

Exercice 1 Trouver le reste de la division euclidienne de $x^{100} - 2x^{51} + 1$ par $x^2 - 1$.

- Racines et factorisation de polynômes

Nous voyons ici que la connaissance des racines d'un polynôme permet de le factoriser. Rappelons que $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$.

Définition 1.10. Un élément $x \in \mathbb{K}$ est appelé *racine* d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ si $P(x) = 0$.

Exemple 1.11. Le polynôme réel $X^2 - 1$ a deux racines réelles, qui sont 1 et -1. Le polynôme $X^2 + 1$ n'a pas de racine réelle. Le polynôme réel $X^2 - 2$ a deux racines réelles, mais le polynôme à coefficients rationnels $X^2 - 2$ n'a pas de racines rationnelles car $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Théorème 1.12. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. a est racine de P, autrement dit $P(a) = 0$.
2. Il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$P(x) = Q(x)(x - a).$$

Démonstration. Il est clair que le deuxième point implique le premier. Quant à la réciproque, le point clé est d'utiliser la division euclidienne. En effet, supposons que $P(a) = 0$. Écrivons alors la division euclidienne de P par $X - a$ sous la forme $P(x) = Q(x)(x - a) + R(x)$ avec R un polynôme de degré au plus $1 - 1 = 0$. Ainsi, R est un nombre réel, noté c. Bref, $P(x) = Q(x)(x - a) + c$. Évaluons cette quantité en $x = a$: $0 = P(a) = Q(a)(a - a) + c$. Donc $c = 0$, ce qu'on voulait démontrer. □

Théorème 1.13. Un polynôme de degré n a au plus n racines différentes.

Démonstration. Par l'absurde, soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n ayant au moins $n+1$ racines différentes, notées $r_1, \dots, r_{n+1}$. D'après le théorème précédent, il existe un polynôme Q tel que $P(x) = Q(x)(x-r_1)$. Mais alors, pour $2 \leq i \leq n+1$, $0 = P(r_i) = Q(r_i)(r_i - r_1)$. Comme $r_i - r_1 \neq 0$, ceci impose $Q(r_i) = 0$. On recommence ce raisonnement avec Q pour finalement obtenir l'existence d'un polynôme T tel que $P(x) = T(x)(x-r_1)\cdots(x-r_{n+1})$. Alors d'après la proposition 1.6 :

$$n = \deg(P) = \deg T + n + 1 > n,$$

ce qui est absurde. □

Remarque 1.14. Il existe des polynômes qui n'ont pas de racines réelles, par exemple $P(x) = x^4 + 1$.

Ce théorème important implique quelques corollaires donnant une information concernant le polynôme sachant quelque chose sur ses racines.

Corollaire 1.15. Soit $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ un polynôme de degré n. On suppose qu'il a n racines différentes $r_1, \dots, r_n$. Alors :

$$P(x) = a_n (x - r_1) \cdots (x - r_n).$$

Démonstration. En reprenant la démonstration précédente, on voit qu'il existe un polynôme T tel que $P(x) = T(x)(x-r_1)\cdots(x-r_n)$. En comparant les degrés des termes de gauche et de droite, il vient que T est de degré nul, donc un nombre réel. En regardant le coefficient dominant des deux côtés de l'égalité, on trouve que $T(x) = a_n$. □

Corollaire 1.16. Un polynôme de degré n ayant $n+1$ racines est nul. Ainsi, un polynôme ayant une infinité de racines est forcément le polynôme nul.

Exercice 2 En utilisant le corollaire précédent, retrouver le fait que $Q(x) = |x|$ n'est pas un polynôme.

On en déduit le résultat important suivant.

Proposition 1.17. Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ et $b_0, b_1, \dots, b_m$ des nombres réels. On suppose que pour tout nombre réel x :

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m.$$

Alors $m = n$ et pour tout i entre 0 et n on a $a_i = b_i$.

Démonstration. Soit $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n - (b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m)$, qui est un polynôme à coefficients réels. Par hypothèse, ce polynôme a une infinité de racines ; il est donc nul ! □

La proposition précédente permet d'apporter une réponse positive à la question suivante : étant donnés un nombre fini de points du plan, existe-t-il un polynôme tel que que sa courbe représentative passe par ces points ?

Théorème 1.18. Soient $a_1, \dots a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des nombres réels (avec les a_i deux à deux distincts). Alors il existe un unique polynôme unitaire P de degré $n-1$ tel que pour tout i, $P(a_i) = b_i$.

Démonstration. Montrons d'abord l'unicité en considérant P, Q deux polynômes vérifiant les conditions de l'énoncé du théorème. Comme P et Q sont unitaires, $P - Q$ est un polynôme de degré au plus $n-1$, qui admet au moins n racines différentes, à savoir $a_1, \dots, a_n$. Il est donc nécessairement nul.

Quant à l'existence, pour $1 \leq i \leq n$, introduisons les polynômes suivants, appelés polynômes d'interpolation de Lagrange :

$$L_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^{n} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}.$$

L'intérêt est que pour tout j différent de i, $L_i(a_j) = 0$, alors que $L_i(a_i) = 1$. On en déduit aisément que le polynôme :

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i L_i(x)$$

convient. □

Ainsi, un polynôme de degré n est complètement déterminé par les images de $n+1$ points distincts.

Exercice 3 Trouver tous les polynômes à coefficients complexes P tels que pour tout rationnel q, $P(q)$ est rationnel.

Doit-on dire que le polynôme $P(x) = (x-1)^n$ a une seule racine, ou bien n racines qui sont les mêmes ? Pour ne pas faire de confusion, nous traitons le cas des racines multiples.

Définition 1.19. Soient $P \in \mathbb{K}[X], \alpha \in \mathbb{K}$ et un entier $m \in \mathbb{N}^*$. On dit que α est racine de multiplicité m de P s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(x) = (x-\alpha)^m Q(x)$ et s'il n'existe pas $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(x) = (x-\alpha)^{m+1} Q(x)$. On dit que α est une racine multiple si $m \geq 2$.

Il se trouve qu'on dispose d'un critère assez pratique permettant de reconnaître une racine multiple.

Définition 1.20. Soit $P = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{K}[X]$. On définit le polynôme dérivé P' par $P'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1}$.

La proposition suivante, réminiscente des propriétés de l'opérateur de dérivation sur les fonctions réelles dérivables, est fondamentale.

Proposition 1.21. Pour $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on a :

$$(PQ)' = PQ' + P'Q.$$

Corollaire 1.22. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors α est une racine multiple de P si, et seulement si, $P'(\alpha) = 0$.

Démonstration. Dans le sens direct, écrivons $P(x) = (x-\alpha)^m Q(x)$ avec $m \geq 2$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$. En dérivant cette expression, il vient $P'(x) = m(x-\alpha)^{m-1}Q(x) + (x-\alpha)^m Q'(x)$. En prenant $x = \alpha$, on conclut que $P'(\alpha) = 0$.

Pour la réciproque, supposons que $P'(\alpha) = 0$ et raisonnons par l'absurde en supposant que α soit une racine non multiple de P. Alors P s'écrit $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$ avec $Q(\alpha) \neq 0$ (si $Q(\alpha) = 0$, d'après le théorème 1.12, on pourrait écrire $P(x) = (x-\alpha)^2 R(X)$). En dérivant cette expression, il vient $P'(x) = Q(x) + (x-\alpha)Q'(x)$. En prenant $x = \alpha$, il vient $P'(\alpha) = Q(\alpha) \neq 0$, ce qui est absurde. □

Remarque 1.23. Si $P'(\alpha) = 0$, cela n'implique pas que α soit racine multiple (ou racine tout court !) de P. Il faut en effet s'assurer que $P(\alpha) = 0$ pour utiliser le corollaire précédent. Par exemple, si $P(x) = x^2 - 2$, on a $P'(x) = 2(x-1)$, mais 1, bien que racine de P', n'est pas racine de P.

Exercice 4 Trouver les réels a, b tels que $(x-1)^2$ divise $ax^4 + bx^3 + 1$.

Exercice 5 Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que pour tous réels x, $P(2x) = P'(x)P''(x)$

Exercice 6 Soit $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{R}[X]$ qui possède n racines réelles différentes. Montrer que pour tout x réel, $P(x)P''(x) \leq P'(x)^2$. En déduire que pour $1 \leq k \leq n-1$, $a_{k-1}a_{k+1} \leq a_k^2$.

- Quelques applications

Nous maintenant quelques applications des résultats précédents, parfois sous la forme d'exercice corrigé.

Proposition 1.24. Soient b, c deux nombres réels. On souhaite connaître le nombre de réels x tels que $x^2 + bc + c = 0$. Soit $\Delta = b^2 - 4c$, appelé le discriminant. Alors :

1. Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de solution.
2. Si $\Delta = 0$, il y a une seule solution qui est $-\frac{b}{2}$.
3. Si $\Delta > 0$, il y a exactement deux solutions, qui sont :

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}.$$

Démonstration. L'idée est de se ramener au cas $b = 0$ en écrivant $x^2 + bx + c$ sous la forme suivante, dite forme canonique :

$$x^2 + bx + c = (x + \frac{b}{2})^2 + c - \frac{b^2}{4}.$$

L'intérêt réside dans le fait que x n'intervient qu'une fois dans la nouvelle expression. Cette forme rend très souvent de précieux services et est à retenir. Ainsi, $x^2 + bx + c = 0$ si, et seulement si, $(x + \frac{b}{2})^2 = \frac{b^2}{4} - c$. Ainsi, un carré étant positif, si $\frac{b^2}{4} - c = \Delta/4 < 0$, il n'y a pas de solution, d'où le premier point. D'un autre côté, si $\Delta \geq 0$, alors $(x + \frac{b}{2})^2 = \frac{b^2}{4} - c$ si, et seulement si :

$$x + \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} \qquad \text{ou} \qquad x + \frac{b}{2} = -\sqrt{\frac{b^2}{4} - c}.$$

On en déduit les points 2. et 3. □

Exemple 1.25. Le polynôme $P(x) = x^2 + x + 1$ a un discriminant égal à -3, et n'a donc pas de racine réelle.

Exercice 7 Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, avec $a \neq 0$, et considérons le graphe de la fonction $P(x) = ax^2 + bx + c$. Montrer qu'en faisant une homothétie et une translation, on peut obtenir le graphe de la fonction $Q(x) = x^2$.

Remarque 1.26. Il s'ensuit qu'étant donné un polynôme de degré 2, on peut aisément dire s'il a des racines réelles, et le cas échéant donner leur expression. Ceci est tout à fait remarquable : on peut montrer qu'il existe des polynômes de degré 5 dont les racines réelles ne s'expriment pas en utilisant des racines carrées, cubiques, etc. Cependant, si $P(x)$ est un polynôme de degré 3 et si on trouve une racine évidente a (par exemple $a = 1, 2, -1, -2, ...$), alors on peut effectuer la division euclidienne de P par $x - a$. On en déduit qu'il existe Q, un polynôme de degré 2, tel que $P(x) = Q(x)(x - a)$. Mais Q est de degré 2, et ce qui précède s'applique. La moralité de ceci est que si on trouve une racine évidente d'un polynôme de degré 3, alors on arrivera à connaître toutes ses racines. À titre d'illustration, on pourra chercher l'exercice suivant.

Exercice 8 Trouver tous les nombres réels x, y, z vérifiant :

$$\begin{cases} (x+1)yz = 12 \\ (y+1)zx = 4 \\ (z+1)xy = 4. \end{cases}$$

Proposition 1.27 (Relations de Viète)**.** Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme réel de degré 2 (avec $a \neq 0$) ayant z_1 et z_2 comme racines réelles. Alors $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$ et $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$.

Démonstration. D'après le corollaire 1.15, on a $P(x) = a(x - z_1)(x - z_2)$. En développant le terme de droite, on trouve les égalités annoncées. □

Remarque 1.28. Ces relations sont utiles car elles expriment les coefficients du polynôme en fonction des racines. À ce titre, on cherchera l'exercice suivant.

Exercice 9 Trouvez toutes les valeurs du paramètre a pour que l'équation :

$$ax^2 - (a+3)x + 2 = 0$$

admette deux racines réelles de signes opposés.

Proposition 1.29 (Relations de Viète dans le cas général)**.** Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{K}[X]$ avec $a_n \neq 0$. Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont les racines de P, alors, en notant, pour $1 \leq k \leq n$,

$$\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_k},$$

on a :

$$\sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

Par exemple :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j = -\frac{a_{n-2}}{a_n}, \ldots, \prod_{i=1}^{n} \alpha_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Remarque 1.30. Les $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sont appelés *fonctions symétriques élémentaires des α_i*. *Symétriques*, parce qu'une permutation des α_i laisse les σ_k invariants. *Élémentaires*, parce qu'on peut montrer que toute expression symétrique en n variables peut s'exprimer polynomialement à l'aide de ces fonctions symétriques élémentaires. Plus précisément, si $P(x_1, \dots, x_n)$ est un polynôme à n variables (on laisse le lecteur imaginer ce que c'est) tel que pour toute permutation σ de $\{1, \dots, n\}$ on ait $P(x_1, \dots, x_n) = P(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$, alors il existe un polynôme à n variables R tel que $P(x_1, \dots, x_n) = R(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Exemple 1.31. En notant $\alpha_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $\alpha_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ et $\alpha_3 = x_1x_2x_3$, on a :

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = \alpha_1^3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_3.$$

Bref, lorsqu'on a affaire à des quantités symétriques, il peut être parfois judicieux de faire intervenir les fonctions symétriques élémentaires associées.

Exercice 10 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul. Montrer que les sommes des racines complexes de $P, P', \dots, P^{(n-1)}$ (où $P^{(n-1)}$ désigne le polynôme P dérivé $n-1$ fois) forment une suite arithmétique.

Exercice 11 Trouver tous les réels x, y vérifiant $x^5 + y^5 = 33$ et $x + y = 3$.

- Théorème de d'Alembert-Gauss

Nous avons vu qu'il existait des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui ne possédaient pas de racines réelles. Un des intérêts de l'introduction des nombres complexes (et c'est dans cette optique qu'ils ont été introduits au XVIè siècle) est de pallier cette difficulté via le théorème de d'Alembert-Gauss (énoncé par d'Alembert et démontré par Gauss).

Définition 1.32. Notons $\mathbb{C}$ l'ensemble des couples de nombres réels (a, b) munis :

1. de l'addition suivante : $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$,
2. des multiplications suivantes : $(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ et pour λ réel, $\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$.

Nous voyons l'ensemble des nombres réels plongés dans l'ensemble des nombres complexes : à chaque réel a, on peut associer le nombre complexe $(a, 0)$. Notons enfin i le nombre complexe $(0, 1)$. Ainsi, nous pouvons représenter chaque nombre complexe (a, b) sous la forme $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a + ib$.

Remarque 1.33. Avec les règles de multiplication précédentes, on voit que $i^2 = -1$, et que $(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$. Ainsi, tout se passe comme si i était un « nombre » tel que $i^2 = -1$ dans toutes les manipulations. En particulier, i est racine du polynôme $X^2 + 1 = 0$.

Remarque 1.34. Tout élément non nul de $\mathbb{C}$ possédant un inverse, les résultats des sections précédentes sont aussi valables pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Nous admettons le théorème (qu'on appelle aussi théorème fondamental de l'algèbre) suivant :

Théorème 1.35. Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine. On dit que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

Par une récurrence sur le degré, on en déduit :

Corollaire 1.36. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Alors P peut s'écrire sous la forme :

$$P(x) = c(x-\alpha_1)^{m_1} \cdots (x-\alpha_k)^{m_k},$$

où $c, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sont des nombres complexes et $m_1, \ldots, m_k$ sont des entiers strictement positifs.

Nous définissons finalement la conjugaison complexe, qui sera utile lorsque nous voudrons déterminer les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Définition 1.37. Soit $z = a + bi \in \mathbb{C}$. On définit son *conjugué* $\overline{z}$ par $\overline{z} = a - bi$.

Proposition 1.38. Pour tous $w, z \in \mathbb{C}$, on a $\overline{wz} = \overline{w}\,\overline{z}$.

Démonstration. Exercice. □

Arithmétique de $\mathbb{K}[X]$

De même que dans le cas des nombres entiers, la division euclidienne entre polynômes permet de démontrer le théorème de Bézout, et par voie de conséquence de définir la notion de PGCD et d'avoir accès au lemme de Gauss. Les démonstrations étant similaires au cas des entiers, nous ne les reproduisons pas. Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- Théorème de Bézout

Définition 1.39. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P divise Q s'il existe $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q = PR$. On dit que P et Q sont premiers entre eux s'ils n'ont comme diviseurs communs (dans $\mathbb{K}[X]$) que les constantes non nulles. Nous utilisons aussi ces définitions dans le cas de $\mathbb{Z}[X]$.

Remarque 1.40. La définition précédente laisse penser que la notion de primalité entre deux polynômes dépend de l'ensemble choisi pour ses coeffecients : ainsi, a priori, rien n'empêche que deux polynômes à coefficients entiers soient premiers entre eux lorsqu'ils sont vus comme éléments de $\mathbb{Q}[X]$, mais qu'ils ne le soient plus lorsqu'on les voit comme éléments de $\mathbb{C}[X]$.

Théorème 1.41 (Bézout)**.** Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors P et Q sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $PU + QV = 1$.

Exercice 12 Soit $x \in \mathbb{R}$. Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

a. Si x^7 et x^{12} sont rationnels, alors x est rationnel.

b. Si x^9 et x^{12} sont rationnels, alors x est rationnel.

Corollaire 1.42. Si $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$ sont premiers entre eux, alors, vus comme éléments de $\mathbb{C}[X]$, ils sont premiers entre eux.

Démonstration. D'après le théorème de Bézout, il existe $U, V \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $PU + QV = 1$. A fortiori, $U, V \in \mathbb{C}[X]$, donc, d'après la réciproque du théorème de Bézout, P et Q sont premiers entre eux vus comme éléments de $\mathbb{C}[X]$. □

Du théorème de Bézout on déduit le théorème de Gauss.

Théorème 1.43. Si $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$ sont tels que P soit premier avec Q et P divise QR, alors P divise R.

- Polynômes irréductibles

Les polynômes irréductibles jouent le rôle des nombres premiers : ce sont en quelque sorte les briques de base lorsqu'on souhaite factoriser des polynômes.

Définition 1.44. Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit *irréductible* dans $\mathbb{K}[X]$ si P n'est pas constant et si ses seuls diviseurs dans $\mathbb{K}[X]$ sont les constantes et les polynômes proportionnels à P non nuls, ou, de manière équivalente, s'il n'existe pas $Q, R \in \mathbb{K}[X]$ avec $\deg Q \geq 1$ et $\deg R \geq 1$.

On en déduit l'équivalent du théorème de factorisation en nombre premiers.

Théorème 1.45. Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ se décompose de manière unique, à l'ordre des facteurs près, sous la forme :

$$P = cP_1^{k_1}P_2^{k_2}\cdots P_k^{\alpha_k},$$

où $c \in \mathbb{K}^*, k_i \in \mathbb{N}^*$ et les P_i sont des polynômes distincts unitaires et irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$.

Le théorème précédent nous invite à chercher les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{Q}[X]$. Nous commençons par une proposition générale.

Proposition 1.46. Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré 2 ou 3 est irréductible si, et seulement si, il n'a pas de racine.

Démonstration. Exercice. □

Proposition 1.47. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de premier degré.

Démonstration. Il est clair que ces polynômes sont bien irréductibles. Réciproquement, si $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré au moins 2 est irréductible, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, il peut s'écrire $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$, se qui contredit son irréductibilité. □

Passons maintenant à l'étude des polynômes à coefficients réels.

Proposition 1.48. Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ se décompose sous la forme :

$$P(x) = c\prod_{i=1}^{r}(x-\alpha_i)\prod_{i=1}^{s}(x^2+a_ix+b_i).$$

En conséquence, les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de premier degré et ceux du second degré à discriminant négatif.

Démonstration. D'après le corollaire 1.36, on peut écrire $P(x) = c(x - \alpha_1)\cdots(x - \alpha_n)$, où les α_i sont complexes. En utilisant la proposition 1.38, on voit que si α est racine de P, alors $\overline{\alpha}$ est également racine de P. En effet, si $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ avec les a_i réels, on a $0 = \overline{P(\alpha)} = \overline{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n} = \overline{a_0}+\overline{a_1}\overline{x}+\cdots+\overline{a_n}\overline{x}^n = a_0+a_1\overline{x}+\cdots+a_n\overline{x}^n$. Dans l'expression donnant P sous forme factorisée, on regroupe alors par pairs les racines complexes (non réelles) avec leurs conjugués. En remarquant que pour un nombre complexe z, $(x-z)(x-\overline{(z)}) = x^2+ax+b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 - 4b \leq 0$, on conclut.

Le raisonnement précédent montre qu'un polynôme irréductible de $\mathbb{R}[X]$ est un polynôme de premier degré ou du second degré à discriminant négatif. Réciproquement, de tels polynômes sont irréductibles en vertu de la proposition 1.46. □

Exercice 13 Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes non nuls tels que pour tout réel x, $P(x^2+x+1) = P(x)Q(x)$. Montrer que P est de degré pair. Peut-on trouver de tels polynômes ?

Exercice 14 Soit P un polynôme à coefficients réels tel que $P(x) \geq 0$ pour tout réel x. Montrer qu'il existe deux polynômes $Q, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = Q^2 + R^2$.

- Cas particulier des polynômes à coefficients rationnels

Dans le cas de $\mathbb{Q}[X]$, il n'y a pas de caractérisation satisfaisante des polynômes irréductibles (essentiellement parce que des propriétés arithmétiques de $\mathbb{Z}$ rentrent en jeu). On peut toutefois donner quelques méthodes de recherche de racines et des critères d'irréductibilité.

Proposition 1.49. Soit $P(x) \in \mathbb{Q}[X]$ et cherchons ses racines rationnelles. Quitte à multiplier P par le ppcm des dénominateurs de ses coefficients, on peut supposer que $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$. Soit p/q une racine rationnelle de P. Alors p divise a_0 et q divise a_n.

Démonstration. Il suffit d'écrire $P(p/q) = 0$, de réduire au même dénominateur et d'utiliser le lemme de Gauss pour les entiers. □

Venons-on à l'irréductibilité.

Remarque 1.50. En vertu de la remarque 1.46, on peut en pratique vérifier si un polynôme de degré 2 ou 3 à coefficients entiers ou rationnels est irréductible.

Exemple 1.51. Le polynôme $x^3 + x^2 - 2x - 1$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ puisqu'il est sans racine dans $\mathbb{Q}$.

On commence par introduire le contenu d'un polynôme afin de montrer que les irréductibles de $\mathbb{Z}[X]$ sont irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$, ce qui n'est pas évident a priori.

Définition 1.52. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ non nul. On appelle contenu de P et on note $c(P)$ le pgcd de ses coefficients (au signe près).

Exemple 1.53. Par exemple, $c(-6x^6 + 3x^5 + 27x - 90) = 3$.

Lemme 1.54. Pour $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ non nuls, $c(PQ) = c(P)c(Q)$ au signe près.

Démonstration. Montrons d'abord le résultat lorsque $c(P) = c(Q) = 1$. Raisonnons par l'absurde que $c(PQ) \neq 1$ en considérant un nombre premier p divisant $c(PQ)$. Écrivons $P(x) = \sum_i a_i x^i$, $Q(x) = \sum_i b_i x^i$, $P(x)Q(x) = \sum_i c_i x^i$. Comme $c(P) = c(Q) = 1$, il existe $i_0, j_0 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\begin{aligned} \forall i < i_0, \quad & p | a_i \text{ mais } p \not| a_{i_0} \\ \forall j < j_0, \quad & p | b_j \text{ mais } p \not| b_{j_0}. \end{aligned}$$

Par hypothèse, on a :

$$p | c_{i_0+j_0} = \sum_{i+j=i_0+j_0} a_i b_i = a_{i_0} b_{j_0} + \sum_{\substack{i+j=i_0+j_0 \\ i<i_0 \text{ ou } j<j_0}} a_i b_j.$$

Mais alors p divise $a_{i_0} b_{j_0}$, ce qui est absurde.

Dans le cas général, notons $P' = P/c(P), Q' = Q/c(Q)$ de sorte que $c(P') = c(Q') = 1$. Ainsi, $c(P'Q') = 1$. Or $c(P'Q') = c(PQ)/c(P)c(Q)$, d'où le résultat. □

On en déduit également le résultat suivant.

Proposition 1.55. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. Alors P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ si, et seulement, si P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ et $c(P) = 1$.

Démonstration. Si P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ et $c(P) = 1$, il est clair qu'il l'est dans $\mathbb{Z}[X]$. Réciproquement, supposons P irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ (ce qui implique $c(P) = 1$) et par l'absurde supposons qu'il n'est pas irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Écrivons alors $P = QR$ avec $Q, R \in \mathbb{Q}[X]$ unitaires de degré au moins 1. Écrivons $Q(x) = \frac{a}{b}Q'(x)$ avec $Q' \in \mathbb{Z}[X]$, $c(q') = 1$ et a, b entiers premiers entre eux. De même, écrivons $R(x) = \frac{c}{d}R'(x)$ avec $R' \in \mathbb{Z}[X]$, $c(R') = 1$ et c, d entiers premiers entre eux. Alors $bdP(x) = acQ'(x)R'(x)$. Comme $c(P) = 1$, il vient $bd = c(bdP(x)) = c(acQ'R') = ac$ (au signe près). Ainsi, $P = QR = \frac{ac}{bd}Q'R' = Q'R'$ (au signe près) avec $Q', R' \in \mathbb{Z}[X]$. Ceci contredit l'irréductibilité de P dans $\mathbb{Z}[X]$. $\square$

De manière un peu similaire, on démontre la proposition suivante, parfois utile.

Proposition 1.56. Soit $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$ unitaires tels que $R = PQ \in \mathbb{Z}[X]$. Alors P et Q sont à coefficients entiers.

Démonstration 1.57. Notons u (resp. v) le ppcm des dénominateurs des coefficients de P (resp. Q). Alors $uvR = uvPQ = (uP)(vQ)$. Donc $c(uvR) = c(uP)c(vQ)$ d'après le lemme précédent. Or, comme P et Q sont unitaires, $c(uP) = c(vQ) = 1$ et $c(uvR) \geq uv$. On en déduit que $u = v = 1$ et donc que $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$.

Exercice 15 Soit $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{Z}[X]$ avec ad impair et bc pair. On suppose que P a toutes ses racines réelles. Montrer qu'au moins une racine de P est un nombre réel irrationnel.

Remarque 1.58. Ainsi, l'étude de l'irréductibilité d'un polynôme à coefficients entiers sur $\mathbb{Q}[X]$ se réduit à l'étude de l'irréductibilité de $\mathbb{Z}[X]$, qui est a priori plus facile.

Voici un exemple (important) d'application de ceci.

Théorème 1.59. Soit $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$. On suppose qu'il existe un nombre premier p tel que :

1. p divise $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$,
2. p ne divise pas a_n,
3. p^2 ne divise pas a_0.

Alors P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Démonstration. D'après la proposition précédente, il suffit de montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$. Supposons donc par l'absurde que $P(x) = Q(x)R(x)$ avec Q, R deux polynômes non constants de $\mathbb{Z}[X]$ avec $Q(x) = q_k x^k + \cdots q_0$ et $R(x) = r_l x^l + \cdots + r_0$. Alors $a_0 = q_0 r_0$. Par suite, d'après le point 3., p divise q_0 ou r_0, mais pas les deux à la fois. Sans perte de généralité, supposons que $p | q_0$ et que $p \not| r_0$. D'autre part, p ne divise pas q_k car sinon il diviserait a_n, ce qui est exclu. Soit donc i_0 le plus petit indice i $(1 \leq i \leq k)$ tel que p ne divise par q_i. Alors :

$$a_{i_0} = q_{i_0} r_0 + q_{i_0 - 1} r_1 + \cdots + q_o r_{i_0}.$$

Comme $i_0 \leq k < n$, p divise a_{i_0} et donc p divise $q_{i_0} r_0$, et donc p divise r_0, ce qui est absurde. $\square$

Exemple 1.60. Soit p un nombre premier et $P(x) = x^{p-1} + \cdots + x + 1 \in \mathbb{Z}[X]$. En appliquant le critère d'Eisenstein au polynôme $Q(x) = P(x+1)$, on voit que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 16 (IMO 93, exercice 1)Soit $n \geq 2$ un entier. Montrer que le polynôme $P(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$ est irréductible sur $\mathbb{Z}[X]$.

Quelques motivations

Pourquoi étudie-t-on les polynômes ? Voici quelques éléments de réponse donnés sans démonstration.

Théorème 1.61. Soit f une fonction réelle infiniment dérivable (si vous ne savez pas ce que ça veut dire, imaginez qu'elle est très gentille). Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors pour tout entier n, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ et des réels $a_0, \ldots, a_n$ tels que pour tout $x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$:

$$|f(x - x_0) - a_0 - a_1(x - x_0) - \cdots - a_n(x - x_0)^n| \leq \epsilon|(x - x_0)^n|.$$

Ainsi, au voisinage de tout point, la fonction « ressemble » à un polynôme.

Théorème 1.62. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors il existe une suite de polynômes $P_1(x), P_2(x), \cdots$ telle que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que pour tout $n \geq N$:

$$\text{pour tout } x \in [0, 1] \qquad |f(x) - P_n(x)| \leq \epsilon.$$

Ainsi, toute fonction continue sur $[0, 1]$ peut être approchée sur tout $[0, 1]$ par des polynômes.

Signalons finalement que l'étude de l'ensemble des zéros communs de plusieurs polynômes à n variables, appelé variété algébrique, est centrale en géométrie algébrique.

Distinction entre polynôme et fonction polynomiale

Ici, nous expliquons pourquoi il est nécessaire de faire cette distinction en commençant par définir d'une autre manière un polynôme. Ici, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou bien $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ muni des lois d'addition et de multiplication usuelles.

Définition 1.63. Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une suite infinie d'éléments de $\mathbb{K}$ nulle à partir d'un certain rang.

Exemple 1.64. Par exemple, $(0, 1, 2, 3, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ est un polynôme, de même que $(0, 0, \ldots, 0, \ldots)$. Par contre, $(1, 1, \ldots, 1, \ldots)$ n'en est pas un.

Définition 1.65. Soit $P = (u_n)_n$ et $Q = (v_n)_n$ deux polynômes. On définit le polynôme $P + Q$ par la suite $w_n = u_n + v_n$ (qui est bien nulle à partir d'un certain rang) et le polynôme $P \times Q$ par la suite (z_n), où $z_n = \sum_{i+j=n} u_n v_n$ (vérifier que (z_n) est nulle à partir d'un certain rang). On identifie les éléments de $\mathbb{K}$ avec les polynômes constants via l'application qui à un élément $\lambda \in \mathbb{K}$ associe le polynôme $(\lambda, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$. Remarquons que ceci est cohérent avec la notion de multiplication intuitive d'un polynôme par un élément de $\mathbb{K}$: si (u_n) est un polynôme et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors le polynôme $\lambda \times (u_n)$ est le polynôme (λu_n).

Nous introduisons maintenant l'indéterminée X.

Définition 1.66. Notons X le polynôme $(0, 1, 0, 0, \ldots)$.

Proposition 1.67. Tout polynôme P s'exprime sous la forme $P = \sum_{i=0}^{n} a_n X^n$. On note indifféremment P ou $P(X)$ pour rappeler qu'on note X l'indéterminée (on pourrait très bien la noter Y !).

Démonstration. Si $P = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$, notons N un entier tel que $i \geq N$ implique $a_i = 0$. Alors $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_N x^N$. Ceci est une conséquence immédiate de la définition de X et de la multiplication entre polynômes. $\square$

Voici maintenant le lien entre polynôme et fonction polynomiale associée. Rappelons que, pour l'instant, un polynôme est juste une suite de nombres qui est nulle à partir d'un certain rang et n'est pas vu comme une application.

Proposition 1.68. Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. On note $\widetilde{P}$ l'application définie par $\widetilde{P}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ pour $x \in \mathbb{K}$, qu'on appelle application polynomiale associée à P. L'application $P \mapsto \widetilde{P}$ est injective si $\mathbb{K}$ est infini. Si $\mathbb{K}$ est fini, cette application n'est pas nécessairement injective.

Démonstration. Plaçons nous d'abord dans le cas où $\mathbb{K}$ est infini. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\widetilde{P} = \widetilde{Q}$. Écrivons $P(X) = \sum_i a_i X^i$ et $Q(X) = \sum_i b_i X^i$. Alors le polynôme $P(x) - Q(x)$, au sens des sections précédentes, a une infinité de racines, donc est nulle. Donc $a_i = b_i$ pour tout i.

Par contre, dans le cas où $\mathbb{K}$ est fini, le raisonnement précédent ne s'applique pas. Exhibons d'ailleurs un contre-exemple. Considérons $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $P(X) = X^p - X$. D'après le petit théorème de Fermat, pour tout $x \in \mathbb{K}$, on a $P(x) = 0$. Ainsi, P n'est pas le polynôme nul, mais les deux fonctions polynomiales associées sont les mêmes. $\square$

En d'autres termes, lorsque $\mathbb{K}$ est infini (par exemple $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, ce qui explique que nous n'avons pas perdu de généralité dans les premières sections), nous pouvons parler sans distinction de polynôme ou de fonction polynomiale associée. En revanche, dans les autres cas, il faut faire très attention !

Quelques exercices

Exercice 17 (Canada 1970) Soit P un polynôme à coefficients entiers. On suppose qu'il existe des entiers deux à deux distincts a, b, c, d tels que $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 5$. Montrer qu'il n'existe pas d'entier k tel que $P(k) = 8$.

Exercice 18 (Benelux 2010) Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que pour tous réels a, b, c on ait :

$$p(a+b-2c) + p(b+c-2a) + p(c+a-2b) = 3p(a-b) + 3p(b-c) + 3p(c-a).$$

Exercice 19 (IMO 2004, exercice 2)Trouver tous les polynômes P à coefficients réels qui vérifient, pour tous a, b, c réels tels que $ab + bc + ca = 0$:

$$P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = 2P(a+b+c).$$

Exercice 20 Soit $n \geq 1$ un entier. On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note aussi $\mathrm{cyc}(\sigma)$ le nombre de cycles de σ. Soit $P_n(x)$ le polynôme suivant :

$$P_n(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} x^{\mathrm{cyc}(\sigma)}.$$

Montrer que P_n a toutes ses racines réelles et que ce sont des entiers négatifs.

Exercice 21 Trouver un polynôme $P(x,y)$ à coefficients entiers tel que :

1. Le nombre d'entiers que parcourt $P(x,y)$ lorsque $P(x,y)>0$ et x,y sont des entiers positifs est infini.
2. si x,y sont des entiers positifs tels que $P(x,y)$ est un entier strictement positif, alors $P(x,y)$ est un nombre de Fibonacci. Rappelons que la suite de Fibonacci est définie par $F_0=1, F_1=1$ et par la relation de récurrence $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ pour $n\geq 1$. Les entiers $F_0, F_1, F_2, \ldots$ sont appelés nombres de Fibonacci.

Éléménts de réponse aux exercices

Solution de l'exercice 1 On cherche le reste sous la forme $R(X)=aX+b$. On a $R(1)=P(1)$, $R(-1)=P(-1)$, ce qui permet de calculer $R(X)=-2X+2$.

Solution de l'exercice 2 Si $Q(x)$ était un polynôme, alors $Q(x)-x$ serait un polynôme avec une infinité de racines, donc serait de degré nul, c'est absurde.

Solution de l'exercice 3 Un polynôme à coefficients rationnels est clairement solution. Réciproquement, si P est un polynôme de degré n vérifiant cette propriété, alors en interpolant en $n+1$ points rationnels, on remarque que P est à coefficients rationnels.

Solution de l'exercice 4 1 doit être racine double de P. Cela nous donne deux équations : $P(1)=0$ et $P'(1)=0$, qui permettent de trouver $a=3$ et $b=-4$.

Solution de l'exercice 5 On note n le degré de P. En passant l'équation aux degrés, on obtient $n=(n-1)+(n-2)=2n-3$, donc $n=3$. On peut facilement calculer le coefficient dominant, on laisse le soin au lecteur de terminer les calculs.

Solution de l'exercice 6 On remarque que la dérivée de $\frac{P'}{P}$ est $\frac{P''-P'^2}{P^2}$ qui est du même signe que $P''-P'^2$. Or on voit facilement que $\frac{P'(x)}{P(x)}=\sum\frac{1}{x-\alpha_i}$ donc $(\frac{P'(x)}{P(x)})'=\sum\frac{-1}{(x-\alpha_i)^2}<0$ d'où le résultat. Pour obtenir l'inégalité sur les coefficients on procède de la manière suivante. Pour $k=1$, l'inégalité provient de $P(0)P''(0)\leq P'(0)^2$. Ensuite on applique l'inégalité aux polynômes $P^{(k-1)}$: $P^{(k-1)}P^{(k+1)}\leq\left(P^{(k)}\right)^2$ d'où $a_{k-1}(k-1)!\times a_{k+1}(k+1)!\leq a_k^2\times k!^2$ or $\frac{k!^2}{(k-1)!(k+1)!}=\frac{k}{k+1}\leq 1$ d'où le résultat.

Solution de l'exercice 7 On met P sous forme canonique : $P=a(x-b)^2+c$. On translate de b selon l'axe des abscisses, de $-c$ selon l'axe des ordonnées, et on applique une homothétie de rapport $\frac{1}{\sqrt{a}}$.

Solution de l'exercice 8 Soit (x,y,z) une solution. Visiblement, aucun de ces nombres n'est nul. En retranchant la troisième équation à la deuxième équation, on en déduit que $zx=xy$, puis, en simplifiant par x (qui est non nul), on obtient que $z=y$. En retranchant la troisième équation à la première équation, on obtient : $y^2-xy=8$, ou encore $xy=y^2-8$. La deuxième équation se réécrit $y^2x+xy=4$. Il vient donc :

$$y(y^2-8)+y^2-8=4,$$

ou encore $y^3+y^2-8y-12=0$. On remarque que $y=3$ est une solution. En effectuant la division euclidienne de $y^3+y^2-8y+12$ par $y-3$, on trouve :

$$y^3+y^2-8y-12=(y-3)(y^2+4y+4)=(y-3)(y+2)^2.$$

On en déduit que $y=z=3$ ou $y=z=-2$. Dans le premier cas, $x=\frac{1}{3}$ et dans le deuxième cas, $x=2$. Réciproquement, les triplets $(2,-2,-2)$ et $(\frac{1}{3},3,3)$ sont solution et ce sont donc les seules.

Solution de l'exercice 9 Supposons que $ax^2-(a+3)x+2=0$ admette deux racines de signe opposé, notées z_1, z_2. Alors d'après les relations de Viète, $z_1z_2=2/a$. Or z_1 et z_2 sont de signe opposés si, et seulement si, $z_1z_2<0$. On en déduit que $a<0$. Réciproquement, si a<0, alors le discriminant de l'équation vaut a^2-2a+9. Pour montrer qu'il est positif, utilisons la forme canonique en écrivant $a^2-2a+9=(a-1)^2+8\geq 0$. Ainsi, lorsque $a<0$, il y a deux solutions réelles notées z_1, z_2. D'après les relations de Viète, $z_1z_2=2/a<0$, de sorte que z_1 et z_2 sont de signe opposés.

Remarquons que dans la preuve de la réciproque, il a d'abord fallu montrer que le polynôme avait deux racines réelles avant d'utiliser les relations de Viète.

Solution de l'exercice 10 On pose $P=\sum a_kX^k$, et on appelle n le degré de P. La somme des racines de $P^{(k)}$ vaut $\frac{a_{n-1}(n-1)(n-2)...(n-k)}{a_nn(n-1)...(n-k+1)}=\frac{a_{n-1}(n-k)}{a_nn}$. La suite est donc arithmétique, de raison $\frac{-a_{n-1}}{na_n}$.

Solution de l'exercice 11 Indication : introduire $\sigma_1=x+y$ et $\sigma_2=xy$, puis écrire les équations correspondantes pour σ_1 et σ_2, puis les résoudre.

Solution de l'exercice 12 Voir le corrigé de l'évaluation du premier jour.

Solution de l'exercice 13 Supposons par l'absurde que P admette une racine réelle, α. Alors $\alpha^2+\alpha+1$ est une autre racine du polynôme, strictement supérieure à la précédente. On construit ainsi une infinité de racines distinctes, contradiction. Donc toutes les racines de P sont complexes, donc P est de degré pair.

Solution de l'exercice 14 On écrit P comme produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}$. P est le produit de polynômes de degrés 2 de discriminant négatifs et de polynômes de la forme $(x-a)^{2k}$ (en effet si la multiplicité d'une racine était impaire, au voisinage de cette racine on pourrait rendre P négatif). Pour exprimer la partie complexe comme somme de carrés, on la sépare en deux termes conjugués l'un de l'autre (en séparant les termes $(X-z)$ des $(X-\bar{z})$). Cela termine, car $(P-iQ)(P+iQ)=P^2+Q^2$.

Solution de l'exercice 15 On démarre par diviser P par son contenu, ce qui ne modifie pas les hypothèses (car ce contenu est impair). Supposons par l'absurde que P a toutes ces racines rationnelles. Comme $c(P)=1$, ces racines sont entières. Comme d est impair, ces trois racines sont impaires, et les relations coefficients racines montrent que b et c sont impairs, c'est absurde.

Solution de l'exercice 16 Supposons qu'il existe deux polynômes g et h, à coefficients entiers, tels que $f=gh$. Comme $f(0)=3$, on peut supposer, sans perte de généralité que $\mid g(0)\mid=3$ et on écrit : $g(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + ... + a_0$ ($a_0 = \pm \otimes 3$). On s'inspire maintenant de la démonstration du critère d'Eisenstein : soit j le plus petit indice tel que a_j ne soit pas divisible par 3. On pose $h(x) = x^p + b_{p-1}x^{p-1} + ... + b_0$ et $f(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + ... + c_0$, il apparaît que le coefficient $c_j = a_j b_0 + a_{j-1}c_1 + ...$ n'est pas divisible par3 car $b_0 a_0 = 3$ et $a_0 = \pm 3$. Compte tenu de l'expression de f,$j \geq n-1$, donc $k \geq n-1$ donc $p \leq 1$ donc le polynôme h s'écrit $\pm x \pm 1$, ce qui est absurde car $f(\pm 1) = 0$.

Solution de l'exercice 17 On écrit P sous la forme $P(X) = Q(X)(X-a)(X-b)(X-c)(X-d)+5$, et on suppose par l'absurde que $P(k) = 8$. Alors $Q(k)(k-a)(k-b)(k-c)(k-d) = 13$. Or $(k-a)$, $(k-b)$, $(k-c)$ et $(k-d)$ sont des entiers distincts, et comme 3 est premier, il ne peut pas être écrit comme produit de 4 entiers distincts, contradiction.

Solution de l'exercice 18 En injectant $a = b = c = 0$, on trouve $P(0) = 0$. En prenant $b = c = 0$, on obtient $P(2a) = 3P(a) + P(-a)$, et ce pour tout a. On suppose P de degré n. En examinant les coefficients dominants, on obtient $2^n = (-1)^n + 3$, donc n vaut 1 ou 2, et P est de la forme $aX^2 + bX$. On vérifie réciproquement que ces polynômes conviennent.

Solution de l'exercice 19 On remarque tout d'abord, en prenant $b = c = 0$, que P est pair, et ne contient donc que des termes de degré pair. En évaluant en zéro, on trouve que le terme constant doit être nul. On essaie ensuite $a = 6x$, $b = 3x$ et $c = -2x$. Cela donne $P(3x) + P(5x) + P(-8x) = 2P(7x)$. On note n le degré de P. En comparant les coefficients dominants, on trouve $3^n + 5^n + (-8)^n = 2 \cdot 7^n$. C'est impossible pour $n \geq 5$. P est donc de la forme $aX^4 + bX^2$. On vérifie réciproquement que ces polynômes conviennent.

Solution de l'exercice 20 Notons $c_n(k)$ le nombre de permutations de longueur n. Pour résoudre l'exercice, nous établissons une relation de récurrence sur les $c_n(k)$. Nous allons, pour cela, dénombrer les permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\mathrm{cyc}(\sigma) = k$ en les comptant séparément selon la valeur de $\sigma(n)$. Si $\sigma(n) = n$, on remarque que se donner une telle permutation revient simplement à se donner une permutation de $\{1, \dots, n-1\}$ ayant $(k-1)$ cycles (puisque n est tout seul dans son cycle). Il y a donc $c_{n-1}(k-1)$ permutations qui relèvent de ce cas.

Examinons maintenant le cas où $\sigma(n)$ est un entier m fixé strictement inférieur à n. L'entier n apparaît alors dans un cycle de σ qui est de longueur au moins 2 (puisqu'il contient au moins n et m) et on peut construire une permutation τ de $\{1, \dots, n-1\}$ simplement en retirant n de ce cycle et en laissant les autres cycles inchangés. Par construction, il est évident que τ a encore k cycles. Par ailleurs, on peut reconstruire σ à partir de τ et l'entier m comme suit : on regarde le cycle de τ qui contient m et, dans ce cycle, on insère l'entier n juste avant m. On déduit de cela qu'il y a $c_{n-1}(k)$ permutations à k cycles telles $\sigma(n)$ est égal à un entier $m < n$ fixé.

En mettant ensemble les deux raisonnements précédents, on aboutit à $c_n(k) = c_{n-1}(k-1) + (n-1)c_{n-1}(k)$. En tenant compte du fait que $c_{n-1}(0) = c_{n-1}(n) = 0$ trivialement, et en sommant l'égalité précédente pour k variant de 1 à n, il vient :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_n(k)x^k = \sum_{k=1}^{n-1} c_{n-1}(k)x^{k+1} + (n-1) \cdot \sum_{k=1}^{n-1} c_{n-1}(k)x^k = (x+n-1) \cdot P_{n-1}(x).$$

Solution de l'exercice 21 Indications : Montrer par récurrence que si x et y sont des entiers positifs tels que $\mid (y-x)y - x^2 \mid = 1$ ssi x et y sont des nombres de Fibonacci d'indices consécutifs. On considère alors $P(x,y) = x(2-((y-x)y-x^2)^2)$. On peut montrer que si $2-((y-x)y-x^2)^2 > 0$ alors $2-((y-x)y-x^2)^2 = 1$ et donc x est un terme de Fibonacci donc $P(x,y) = x$ est un nombre de Fibonacci.

2 Inégalités

Dans ce cours nous allons introduire quelques inégalités classiques très utiles pour les Olympiades.

Réordonnement

Pour cette section, on considére deux familles de nombres positifs rangés dans l'ordre croissant : $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ et $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$. Soit σ une permutation de $\{1,\ldots,n\}$, c'est-à-dire un rèarrangement dans un autre ordre. On veut étudier la somme des produits

$$S_\sigma = \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)}$$

Théorème 1.69 (Inégalité de réordonnement)**.** La somme $\sum a_i b_{\sigma(i)}$ est maximale pour $\sigma(i) = i$ et minimale pour $\sigma(i) = n+1-i$. En d'autres termes, la somme est maximale squand les deux familles sont rangées dans le même sens et minimale lorsqu'elles sont dans le sens inverse.

Démonstration. Soit σ la permutation qui maximise la somme. Supposons que σ n'est pas l'identité, cela signifie qu'il existe i et j tels que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$. Si on consideère σ' obtenue à partir de σ juste en interchangeant les images de i et j, on a :

$$S_{\sigma'} - S_\sigma = (a_j - a_i)(b_{\sigma(i)} - b_{\sigma(j)})$$

Ceci est positif, puisque les deux termes du produit sont positifs, et $S_{\sigma'}$ est plus grande que S_σ. □

Ce résultat est assez naturel : on gagne plus en multipliant les grands nombres entre eux.

Exercice 1 Utilisez l'inégalité de réordonnement pour montrer :

$$x^2 + y^2 \geq 2xy$$

Exercice 2 Utilisez l'inégalité de réordonnement pour montrer :

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$$

Exercice 3 Trouvez le minimum de la fonction

$$f(x) = \frac{cos(x)^3}{sin(x)} + \frac{sin(x)^3}{cos(x)}$$

sur $]0, \pi/2[$.

Théorème 1.70 (Inégalité de Tchebitcheff). Avec les mêmes notations que précédemment, si les a_i et les b_i sont rangés dans le même ordre, alors

$$\sum a_ib_i \geq \frac{1}{n}\left(\sum a_i\right)\left(\sum b_i\right)$$

Démonstration. On utilise l'inégalité de réordonnement pour trouver les n relations suivantes

$$\begin{array}{rcl} a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n & \geq & a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \\ a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n & \geq & a_1b_2 + a_2b_3 + \cdots + a_nb_1 \\ a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n & \geq & a_1b_3 + a_2b_4 + \cdots + a_nb_2 \\ \cdots & & \cdots \\ a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n & \geq & a_1b_n + a_2b_1 + \cdots + a_nb_{n-1} \end{array}$$

Et en additionant ces relations on obtient l'inégalité souhaitée. □

Exercice 4 Utilisez l'inégalité de Tchebitcheff pour prouver la relation entre la moyenne quadratique et la moyenne arithmétique :

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{n}} \geq \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}$$

Inégalité de la moyenne

Théorème 1.71 (Inégalité arithmético-géométrique). La moyenne arithmétique est supérieure à la moyenne géomètrique :

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}$$

avec égalité si et seulement si les a_i sont tous égaux.

Remarque 1 : les cas $n = 2$ et 3 ont déjà été démontrés puisqu'on obtient respectivement

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \textbf{ et } x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$$

Remarque 2 : le cas d'égalité est aussi important à retenir, cela permet de savoir quels sont les cas extrèmes.

Démonstration. Commençons par montrer le résultat par récurrence pour les puissance de 2. La remarque montre que le résultat est vrai pour 2. On note $n = 2^k$, on suppose que l'inégalité est vraie pour n et on cherche a la démontrer pour $2n$.

$$\begin{array}{rcl} \frac{a_1 + \cdots + a_{2n}}{2n} & = & \frac{1}{2}\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} + \frac{a_{n+1} + \cdots + a_{2n}}{n}\right) \\ & \geq & \frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{a_1\dots a_n} + \sqrt[n]{a_{n+1}\dots a_{2n}}\right) \geq \sqrt[2n]{a_1\dots a_{2n}} \end{array}$$

Ce qui achève la récurrence. Il reste encore à prouver le résultat pour les entiers qui ne sont pas des puisssances de 2. Pour cela il suffit de montrer : “si línégalité est vraie pour n, alors elle est vraie pour $n-1$", et de faire une récurrence descendante. Soit $(a_1,\dots,a_{n-1})$ une famille de réels positifs, on y ajoute $a_n = (a_1+\dots+a_{n-1})/(n-1)$. L'inégalité est vraie pour $(a_1,\dots,a_{n-1},a_n)$:

$$\frac{a_1+\dots+a_{n-1}}{n} + \frac{a_n}{n} \geq (a_1\dots a_{n-1})^{1/n}\cdot a_n^{1/n}$$

Et avec l'expression de a_n, on trouve

$$\frac{n-1}{n}a_n + \frac{1}{n}a_n \geq (a_1\dots a_{n-1})^{1/n}\cdot a_n^{1/n}$$

$$a_n^{\frac{n-1}{n}} \geq (a_1\dots a_{n-1})^{1/n}$$

Ce qui donne la solution.

Pour prouver le cas d'égalité il on utilise le fait que $x^2+y^2=2xy$ si et seulement si $x=y$, et on le fait remonter et descendre le long des récurrences. □

Exercice 5 Soit $x_1,\dots x_n$ une famille de réels strictement positifs, montrer que

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\dots+\frac{x_n}{x_1} \geq n.$$

Théorème 1.72. Généralisation Soit $a_1,\dots a_n$ une famille de réels positifs, on définit la moyenne d'ordre p :

$$\begin{aligned} M(p) &= \left(\frac{a_1^p+a_2^p+\dots+a_n^p}{n}\right)^{1/p} \\ M(0) &= (a_1\dots a_n)^{1/n} \end{aligned}$$

La fonction M est croissante : si $p>q$ alors $M(p)>M(q)$.

Pas de démonstration pour ce résultat puisqu'elle est un peu casse-pieds. Pour ceux d'entre vous qui connaissent un peu la fonction logarithme, vous pouvez exprimer $\ln(M(p))$ et essayer de dériver par rapport à p.

Exercice 6 Vérifiez l'inégalité de l'exercice 4 avec les résultats de cette section

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{n}} \geq \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}.$$

Cauchy-Schwartz

On commence cette section par une propriété evidente mais qui permet de prouver nombre d'exercices non triviaux.

Théorème 1.73. Un carré est toujours positif.

Munis de cet outil avancé, on peut s'attaquer a des résultats plus avancés.

Théorème 1.74 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** Soient $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$ deux familles de réels.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)}$$

avec égalité si et seulement si les familles $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$ sont proportionnelles, c-à-d s'il existe un réel λ tel que $b_i = \lambda a_i$ pour tout i.

Remarque 1 : Attention, on n'est plus dans la section de réordonnement, aucune hypothèse n'est necessaire sur l'ordre des familles.

Remarque 2 : Pour retenir le sens de l'inégalité, retenez que le plus grand terme est aussi le plus gros à écrire, celui avec deux sommes.

Démonstration. Mettons à bon profit le cours d'Igor et définissons un polynôme :

$$P(X) = \left(\sum a_i^2\right) \cdot X^2 + 2\left(\sum a_i b_i\right) \cdot X + \left(\sum b_i^2\right)$$

On remarque facilement qu'on peut écrire P sous la forme suivante

$$\begin{aligned} P(X) &= \sum \left(a_i^2 X^2 + 2a_i b_i X + b_i^2\right) \\ &= \sum (a_i X + b_i)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Le polynôme P est un trinôme du second degré toujours positif, donc son déterminant Δ est négatif.

$$\Delta = \left(2\sum a_i b_i\right)^2 - 4\left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right) \leq 0$$

Et on a la relation désirée. Si l'égalité est atteinte, cela veut dire que $\Delta = 0$ et que le polynôme P a une racine r. Et en écrivant $P(r) = 0$ on voit que $b_i = -r a_i$ pour tout i. $\square$

Exercice 7 Vérifiez l'inégalité de l'exercice 4 avec les résultats de cette section

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{n}} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}.$$

Exercice 8 Trouvez le maximum de la fonction $f(x, y, z) = 3x + 5y - z$ sur la sphère de rayon 1, et les points où ce maximum est atteint.

Exercice 9 Soient $x_1, \dots, x_n > 0$, montrez que

$$(x_1 + x_2 + \dots x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2.$$

Convexité

Définition 1.75. Une fonction réelle f est convexe si pour tous couples de réels x, y et tout $t \in [0,1]$, alors
$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)y$$
Ceci signifie que si on choisit deux points de la courbe de f, alors le segment entre ces deux points est au-dessus de la courbe.

Proposition 1.76.
1. La fonction $f(x) = x^2$ est la plus courante des fonctions convexes. Les fonctions affines sont aussi convexes.
2. La somme de deux fonctions convexes est aussi convexe.
3. Une fonction dérivable est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante.
4. Une fonction deux fois dérivable est convexe si et seulement si sa dérivée seconde (la dérivée de la dérivée) est positive.

La propriété 4. est la plus pratique pour vérifier qu'une fonction est convexe, ce doit être votre premier reflexe. Le seul problème est que certaines fonctions ne sont pas dérivables (par exemple $f(x) = |x|$).

Exercice 10 Les fonctions suivantes sont-elle convexes ? Si non, existe-t-il un intervalle sur lequel elles le sont ?
$$x^{2n} \;;\; x^{2n+1} \;;\; \cos(x) \;;\; e^x$$
la fonction “marche" : $f(x) = 0$ si $x \leq 0$, 1 si $x > 0$.

Théorème 1.77. Soit f une fonction convexe. On choisit n réels $(x_1, \ldots, x_n)$ et n "poids" $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ vérifiant $0 \leq \alpha_i \leq 1$ et $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$. Alors
$$\alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n) \geq f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha x_n)$$
Remarque : En prenant en particulier $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1/n$, on a l'équation suivante :
$$\frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)$$

Démonstration. Pour $n = 2$, il s'agit de la définition de convexité. Le reste s'obtient par une récurrence laissée au lecteur. ☐

Remarque : Une fonction concave est l'opposée d'une fonction convexe, cela signifie que toutes les ingalités sont dans l'autre sens, les segments entre deux point de la courbe sont en-dessous de la courbe, la dérivée seconde est négative, etc. Une bonne facon de traiter une fonction concave g est de considérer $f = -g$ qui elle est convexe.

Exercice 11 Vérifiez l'inégalité de l'exercice 4 avec les résultats de cette section
$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{n}} \geq \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}.$$

Exercice 12 Trouvez le maximum pour tous les triangles ABC de
$$\sin(A) + \sin(B) + \sin(C).$$

Inégalité triangulaire

Il s'agit simplement de

Théorème 1.78. Si AB, BC et AC sont les trois côtés d'un triangle, alors

$$AB + BC \geq AC$$

avec égalité si et seulement si B est sur le segment $[AC]$.

Exercice 13 Soient O, A et B des points du plan. Montrez

$$||\vec{OA}|| + ||\vec{OB}|| \leq ||\vec{OA} + \vec{OB}|| + ||\vec{OA} - \vec{OB}||.$$

Changement de variables intéressant : Parfois, un exercice demande de prouver une inégalité sur a, b et c les longueurs des côtés d'un triangle. Il est alors intéressant de considérer

$$x = a + b - c \ , \ y = b + c - a \ , \ z = c + a - b$$

L'inégalité triangulaire permet d'affirmer que x, y et z sont positifs (strictement s'il est précisé que le triangle n'est pas plat), et on retrouve a, b et c par :

$$a = \frac{x+z}{2} \ , \ b = \frac{y+x}{2} \ , \ c = \frac{z+y}{2}$$

Exercice 14 Soient a, b, c les trois côtés d'un triangle. Montrez que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq 2.$$

Exercices

Les exercices éparpillés dans le cours sont plutôt des applications et vous ont peut-être semblés un peu fade, alors voila les choses sérieuses :

Exercice 15 Soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ une suite d'entiers positifs distincts. Montrez que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{k^2} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Exercice 16 Soient $a, b, c, d > 0$, montrez que

$$\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ad} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{bd} + \frac{1}{cd}\right) \leq \frac{3}{8}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)^2.$$

Exercice 17 Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels valant 0, +1 ou −1. Quel est le minimum de

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j ?$$

Exercice 18 Soient $a, b, c, d, e \geq$ tels que

$$a + b + c + d + e = 8 \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16$$

Quelle est la valeur maximale de e ?

Exercice 19 Soient $a, b, c, d \geq 0$ tels que $ab + bc + cd + da = 1$. Montrez que :

$$\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{a+c+d} + \frac{c^3}{a+b+d} + \frac{d^3}{a+b+c} \geq \frac{1}{3}.$$

Exercice 20 Soient a, b, c, d tels que $abcd = 1$. Montrez que

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 10.$$

Exercice 21 Soient a, b deux réels avec $a \neq 0$. Montrez que

$$a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{b}{a} \geq \sqrt{3}.$$

3 Corrections

Solution de l'exercice 1 On prend $a_1 = b_1 = x$, $a_2 = b_2 = y$, les deux suites (a_1, a_2) et (b_1, b_2) sont évidemment dans le même sens. L'inégalité réordonnement donne $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

Solution de l'exercice 2 On peu supposer sans perte de géneralité que $x \geq y \geq z$. Démontrons ce résultat en deux étapes :

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2y + y^2z + z^2x \geq 3xyz$$

La première se fait avec les suites $x \geq y \geq z$ et $x^2 \geq y^2 \geq z^2$ et la deuxième avec $x \geq y \geq z$ et $yz \leq xz \leq xy$.

Solution de l'exercice 3 Profitons de cet exercice pour rappeler comment déterminer le minimum d'une fonction f est m. Cela se passe en deux étapes : d'abord montrer que $f(x) \geq m$ pour tout x, ensuite trouver un x_0 où ce minimum est atteint. Considerons la fonction qui nous interesse,

$f(x) = \frac{\cos(x)^3}{\sin(x)} + \frac{\sin(x)^3}{\cos(x)}$. Il est facile de voir que les suites $(\cos(x)^3, \sin(x)^3)$ et $(1/\sin(x), 1/\cos(x))$ sont dans le même ordre. L'inégalité réordonnement donne

$$\begin{aligned}\frac{\cos(x)^3}{\sin(x)} + \frac{\sin(x)^3}{\cos(x)} \geq f(x) &\geq \frac{\cos(x)^3}{\cos(x)} + \frac{\sin(x)^3}{\sin(x)} \\ &= \cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1\end{aligned}$$

Pour la dernière étape on remarque juste que $f(\pi/4) = 1$ ce qui achève la démonstration.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> On applique simplement l'inégalité de Tchebitcheff avec deux copies de $(a_1, \ldots, a_n)$.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> L'inégalité arithmético-gómétrique appliquée à $\left(\frac{x_1}{x_2}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right)$ donne le résultat.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> Il s'agit d'une simple application du théorème : $M(2) \geq M(1)$.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> On applique Cauchy-Schwarz avec les deux familles $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et $(1, 1, \ldots, 1)$.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> Rappelons qu'un point est sur la sphère de rayon 1 ssi $x^y + y^2 + z^2 = 1$. Ceci ressemble furieusement à un terme de l'inégalité de Cauchy Schwarz, faisons-le apparaître :

$$(3x + 5y - z) \leq \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)(3^2 + 5^2 + (-1)^2)} = \sqrt{14}$$

Pour montrer que ceci est effectivement le maximum, il faut trouver un point pour lequel cela devient une égalité. Le théorème indique que l'égalité dans Cauchy-Schwarz a lieu ssi les familles sont proportionnelles. Il faut donc trouver (x, y, z) proportionnel à $(3, 5, -1)$ et qui vérifie $x^2 + y^y + z^2 = 1$. Il y a 2 tels points $\pm(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{5}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}},)$. Le point avec un $+$ marche (l'autre atteint le minimum $-\sqrt{14}$).

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> On applique Cauchy-Schwarz avec les deux familles $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n})$.

<u>*Solution de l'exercice 10*</u> Dérivez chacune des fonctions 2 fois. Pour la fonction "marche", bien que la dérivée seconde soit nulle pratiquement partout, un simple dessin devrait vous convaincre qu'elle n'est pas convexe.

<u>*Solution de l'exercice 11*</u> On utilise simplement la convexité de $f(x) = x^2$.

<u>*Solution de l'exercice 12*</u> Lorsqu'on dérive deux fois la fonction sin, on obtient -sin qui est négatif sur l'intervalle $]0, \pi[$. Donc sin est concave sur $]0, \pi[$. On applique l'inégalité de concavité :

$$\begin{aligned}\frac{\sin(A) + \sin(B) + \sin(C)}{3} &\leq \sin\left(\frac{A + B + C}{3}\right) \\ &\leq \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

et l'égalité est atteinte pour le triangle équilatéral. Le maximum est $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Solution de l'exercice 13 L'égalité vectorielle $2\vec{OA} = (\vec{OA} + \vec{OB}) + (\vec{OA} - \vec{OB})$ est évidente. L'inégalité triangulaire donne

$$2||\vec{OA}|| \leq ||\vec{OA} + \vec{OB}|| + ||\vec{OA} - \vec{OB}||$$

La même chose est vraie pour $\vec{OB}$, et en additionnant les deux on a le résulta souhaité.

Solution de l'exercice 14 On applique la transformation précédente. Le terme de gauche devient alors

$$\frac{x+z}{x+2y+z} + \frac{x+y}{x+y+2z} + \frac{y+z}{2x+y+z}.$$

Ensuite on remarque juste que $x+2y+z \geq x+y+z$, donc $\frac{x+z}{x+2y+z} \leq \frac{x+z}{x+y+z}$. La somme des trois termes ainsi transformés donne 2.

Solution de l'exercice 15 On considère juste les n premiers termes de la suite α_k. On peut les réordonner en $\beta_1, \ldots, \beta_n$ tels que les β sont croissants. L'inégalite de réordonnement appliquée aux suites α_k et $1/k^2$ donne

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k}{k^2}.$$

Enfin, comme $1 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq \cdots \leq \beta_n$ et que ce sont des entiers distincts, il est facile de vérifier que $\beta_k \geq k$, et en injectant ceci dans la relation précédente on a le résultat souhaité.

Solution de l'exercice 16 Tout d'abord, on peut faire un changement de variable pour clarifier les notations : on note w, x, y, z les inverses respectives de a, b, c, d. Faisons une preuve un peu brutale : on va développer le terme de droite.

$$(w+x+y+z)^2 = w^2 + x^2 + y^2 + z^2 + 2(wx + wy + wz + xy + xz + yz)$$

Ensuite on peut retirer de chaque côté de línégalité $3/4(wx + \cdots + yz)$. Il reste à montrer que

$$\frac{1}{4}(wx + wy + wz + +xy + xz + yz) \leq \frac{3}{8}(w^2 + x^2 + y^2 + z^2)$$

Utilisons $wx \leq \frac{w^2+x^2}{2}$ et les 5 autres inégalités identiques et on a le résultat.

Solution de l'exercice 17 La somme $\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$ ressemble beaucoup à ce qui apparaît lorsque l'on développe $(\sum x_i)^2$. Cependant il y a deux problèmes : chaque terme $x_i x_j$ est compté 2 fois, et les termes x_i^2 apparaissent :

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Le terme $(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2$ est positif puisque c'est un carré, et chaque x_i^2 est inférieur à 1, donc le terme $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ est inférieur à n.

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = \frac{1}{2}\left((\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \geq \frac{-n}{2}$$

Si n est pair, ce minimum est atteint lorsque la moitié des x_i vaut $+1$ et l'autre moitié -1. pour n impair, $\sum_{i<j} x_i x_j \leq \frac{-n}{2}$ et cette somme est un entier, donc elle vaut au moin $\frac{-n+1}{2}$, et ce min est atteint avec $x_1 = 0$ et le reste des x_i partagé entre $+1$ et -1.

<u>*Solution de l'exercice 18*</u> Présentons d'abord la réponse d'Andrea sur la valeur de e : "il est bien connu que $e = 2.71828\ldots$!".

Passons à la résolution, on écrit les deux contraintes sur a, b, c, d, e comme

$$a + b + c + d = 8 - e \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 16 - e^2$$

Ensuite on utilise Cauchy-Schwarz sur (a, b, c, d) et $(1, 1, 1, 1)$:

$$\begin{aligned} (a+b+c+d)^2 &\leq (a^2+b^2+c^2+d^2)(1+1+1+1) \\ (8-e)^2 &\leq 4(16-e^2) \\ 5e^2 - 16e &\leq 0 \end{aligned}$$

Une simple étude de polynôme du second degré montre que ceci est équivalent à $0 \leq e \leq 16/5$. En vérifiant ensuite que $e = 16/5$ avec $a = b = c = d = 6/5$ marche.

<u>*Solution de l'exercice 19*</u> On a besoin d'un résultats préliminaires : la condition peut se réecreire $(a+c)(b+d) = 1$, on a alors $a + b + c + d = (a + c) + \frac{1}{a+c} \geq 2$.

On réordonne a, b, c, d et on applique Tchebitcheff aux suites $a^3 \geq b^3 \geq c^3 \geq d^3$ et $\frac{1}{b+c+d} \geq \frac{1}{a+c+d} \geq \frac{1}{a+b+d} \geq \frac{1}{a+b+c}$

$$\begin{aligned} &\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{a+c+d} + \frac{c^3}{a+b+d} + \frac{d^3}{a+b+c} \\ \geq\ &\frac{1}{4}(a^3+b^3+c^3+d^3)\left(\frac{1}{b+c+d} + \frac{1}{a+c+d} + \frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+b+c}\right) \end{aligned}$$

Étudions chacun de ces termes séparemment et exprimons-les en fonction de $a + b + c + d$: par l'inégalité sur les moyennes,

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq \frac{1}{16}(a+b+c+d)^3 \geq \frac{1}{4}(a+b+c+d)$$

et avec Tchebitcheff sur les suites $\frac{1}{b+c+d} \geq \frac{1}{a+c+d} \geq \frac{1}{a+b+d} \geq \frac{1}{a+b+c}$ et $b + c + d \leq a + c + d \leq a + b + d \leq a + b + c$,

$$\begin{aligned} (1+1+1+1) &\leq \frac{1}{4}(3a+3b+3c+3d) \\ &\quad \cdot \left(\frac{1}{b+c+d} + \frac{1}{a+c+d} + \frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+b+c}\right) \\ \frac{16}{3(a+b+c+d)} &\leq \left(\frac{1}{b+c+d} + \frac{1}{a+c+d} + \frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+b+c}\right) \end{aligned}$$

On renvoie tout ca dans l'inégalité de départ, avec $(a + b + c + d) \geq 2$, et voila !

<u>*Solution de l'exercice 20*</u> On utilise l'inégalité arithmético-géométrique :

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 10\sqrt[10]{a^5b^5c^5d^5} = 10$$

<u>*Solution de l'exercice 21*</u> On se débarasse des dénominateurs en multipliant de chaque côté par a^2 et on essaie ensuite de faire apparaître des carrés :

$$\begin{aligned} a^4 + b^2a^2 + ba + 1 &\geq \sqrt{3}a^2 \\ \left(a^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + b^2a^2 + ba + 1 - \frac{3}{4} &\geq 0 \\ \left(a^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(ba + \frac{1}{2}\right)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

et la dernière ligne est vraie puisque c'est la somme de deux carrés.

2 TD

1 Combinatoire

Énoncés

Exercice 1

Combien y a-t-il de sous-ensembles d'un ensemble de cardinal n ?

Exercice 2

Montrer que le nombre de diviseurs de n (y compris 1 et n) est impair si et seulement si n est le carré d'un nombre entier.

Exercice 3

On dispose de n elfes et de n gobelins. On souhaite les aligner mais il est interdit de mettre deux gobelins l'un à coté de l'autre. Combien de dispositions sont possibles ?

Exercice 4

On a n objets à ranger dans n emplacements. Mais certains objets sont semblables. Il y a k types d'objets différents et il y a n_i objets du $i^{\text{ème}}$ type. On a donc $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

Combien y a-t-il de rangements de ces objets ?

Exercice 5

Soient n et k deux nombres entiers naturels. De combien de façons est-il possible de choisir k nombres entiers naturels $i_1, i_2, ..., i_k$ tels que $i_1 + i_2 + ... + i_k = n$?

Exercice 6

Combien de tirages différents peut-on faire si l'on tire des boules différentes <u>et qu'on les remet</u> après chaque tirage sans se soucier de l'ordre ?

Exercice 7 (Concours général 90)

On dispose de $n \geq 4$ couleurs. Combien de tétraèdres différents peut-on peindre en peignant chaque face avec une et une seule couleur ?

Exercice 8

Trouver une expression comparable à celle du binôme de Newton pour $(x_1 + x_2 + ... + x_m)^n$.

Exercice 9

Dans le champ mathematicus il y a un alignement infini de fleurs.

Une sauterelle se déplace de fleur en fleur. A chaque saut, elle peut passer sur la fleur d'à coté (si elle est sur la fleur n elle peut passer sur la fleur $n-1$ ou $n+1$). Au départ la sauterelle est sur la fleur 0.

De combien de façons peut-elle sauter k fois sachant qu'après ses k sauts, elle doit revenir sur la fleur 0 ?

De combien de façons peut-elle sauter k fois sachant qu'après ses k sauts, elle doit revenir sur la fleur 0 sans jamais être passée sur une fleur strictement négative ?

Exercice 10

De combien de manières différentes un polygone à n côtés peut être partagé en triangles en reliant ses sommets par des segments de droite ?

Exercice 11

Calculer

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i^2 j^2$$

Exercice 12

Calculer

$$u_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \min(i,j)$$

Avec min la fonction qui donne le plus petit des deux nombres.

Exercice 13

Calculer

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{p} p+q$$

Exercice 14 (L'identité de Vandermonde)

Montrer que si $k \leq \min(m,n)$ alors :

$$\binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + ... + \binom{n}{k}\binom{m}{0} = \binom{m+n}{k}$$

Exercice 15

Combien y a-t-il de permutations n'ayant qu'un seul cycle ?

Exercice 16

Soit p une fonction associée à une permutation. On appelle ordre de cette permutation le plus petit entier k tel que $p^{(k)} = Id$.

Quelle est le plus grand ordre pour une permutation de taille 11 ?

Exercice 17

Quelle est le plus petit k tel que l'on ait $p^{(k)} = Id$ pour toutes les permutations de longueur n fixée (on note p pour la fonction correspondant à la permutation).

Exercice 18

On appelle dérangement une permutation de taille n telle que pour tout $1 \leq i \leq n$ on ait $p(i) \neq i$.

Combien y a-t-il de dérangements de taille n ?

Exercice 19

On dit qu'une permutation $(x_1, x_2, ..., x_{2n})$ possède la propriété $\mathfrak{P}$ s'il existe un i tel que $|x_i - x_{i+1}| = n$.

Démontrer qu'il y a plus de permutations qui ont la propriété $\mathfrak{P}$ que de permutations qui ne l'ont pas.

Exercice 20

On a un groupe de n filles $F_1, F_2, ..., F_n$ et $2n-1$ garçons $G_1, G_2, ..., G_{2n-1}$. La fille F_i connaît les garçons $G_1, ..., G_{2i-1}$ et aucun autre.

On souhaite faire des couples pour faire danser les filles et les garçons. Montrer que le nombre de façons de former $r \leq n$ couples de telle sorte que chaque fille connaisse le garçon est :

$$\binom{n}{r} \frac{n!}{(n-r)!}$$

Exercice 21

Déterminer s'il existe ou pas, dans le plan, 100 droites deux à deux distinctes ayant exactement 2008 points d'intersection distincts.

Exercice 22

Montrer que les nombres $1, 2, ..., 2008$ peuvent être coloriés de 4 couleurs différentes de sorte que aucune progression arithmétique de 10 termes ne contienne que des nombres d'une seule couleur.

Exercice 23

Soit $ABCDEFGH$ un octogone régulier. Un pion est placé au départ sur A et se déplace sur un des voisin à chaque tour (quand le pion est sur A il peut aller sur B ou H). Le jeu se termine lorsque le pion atteint pour la première fois le sommet E.

On désigne par a_n le nombre de "parties" de exactement n coups (qui se termine donc en E). Montrer alors que

$$a_{2k-1} = 0 \text{ et } a_{2k} = \frac{x^{k-1} - y^{k-1}}{\sqrt{2}}$$

avec $x = 2 + \sqrt{2}$ et $y = 2 - \sqrt{2}$.

Solutions

Solution de l'exercice 1

Le problème peut être résolu de plusieurs manières.

On peut simplement se contenter de faire le lien avec les suites de 0 et de 1 de longueur n (il y en a 2^n) qui sont une forme de représentation d'un sous ensemble puisqu'on peut, par exemple, dire que le sous ensemble associé à une suite est construit tel que le $i^{\text{ème}}$ élément soit dans le sous ensemble si et seulement si le $i^{\text{ème}}$ terme de la suite est 1. Pour chaque suite il existe donc un ensemble et pour chaque ensemble il existe une unique suite. Il y a donc exactement 2^n sous ensembles d'un ensemble de cardinal n.

Une autre méthode de démonstration consiste à raisonner par récurrence sur n. Nous laissons au lecteur le soin de rédiger la démonstration qui ne devrait pas présenter de difficulté.

Solution de l'exercice 2

Pour chaque diviseur d de n, on fait correspondre n/d. Pour d, il existe bien un seul nombre n/d et inversement si on a $a = n/d$ on a $d = n/a$.

Si n n'est pas le carré d'un entier, pour tout diviseur d de n alors d et n/d sont différents et n/d est aussi un diviseur de n. On a donc formé des paires de diviseurs, et il existe donc un nombre pair de diviseurs de n.

Si n est un carré d'un entier, pour tous les diviseurs d tels que $\sqrt{n} \neq d$ on peut faire des paires, entre d et n/d. Enfin, il ne reste qu'un diviseur qui est $\sqrt{n}$ et n a un nombre impair de diviseurs.

Solution de l'exercice 3

Intérèssons-nous aux 2 premiers individus. Il est impossible de finir par 2 elfes puisque sinon parmi les $2n-2$ derniers individus on aurait n goblins et $n-2$ elfes et donc il y aurait nécessairement 2 elfes l'un à coté de l'autre (cela se montre facilement par récurrence sur n). Les deux personnages sont donc soit, un elfe puis un goblin soit un goblin puis un elfe.

On note v_n le nombre d'alignements différents que l'on peut faire avec n elfes et n goblins en commençant par un elfe et un goblin, et u_n le nombre d'alignements faisables en commençant par un goblin et un elfe.

On a donc $u_{n+1} = u_n + v_n$ car si le deuxième personnage est un elfe le troisiéme peut être un elfe ou un goblin. De même on a $v_{n+1} = u_n$ et donc $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.

Comme $u_0 = u_1 = 1$, (u_n) est la suite de Fibonacci.

Le nombre de rangements de n elfes et de n goblins est donc $u_n + v_n = u_n + u_{n-1} = u_{n+1}$.

Solution de l'exercice 4

Le plus simple est sans doute de considérer les objets tous différents dans un premier temps. Il y a donc $n!$ manières de les ranger. Mais les mêmes solutions sont comptées plusieurs fois car certains objets sont indentique. Si on considère que seuls les n_i objets du $i^{\text{ème}}$ type sont indiscernables (et tous les autres sont distincts) alors on compte $n_i!$ fois chaque solution car chaque permutation d'objets du $i^{\text{ème}}$ type est possible. Ainsi on compte $n_1!.n_2!.....n_k!$ fois la même solution quand les objets tous différents. Il y a donc

$$\frac{n!}{n_1!.n_2!.....n_k!}$$

rangements différents de ces objets.

On retrouvera ce nombre dans l'exercice 8.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u>

L'idée consiste à transformer légèrement le problème. On considère une série de $n+(k-1) = n+k-1$ cases dans lesquelles on va placer $k-1$ cubes délimiteurs. A chacune de ces configurations correspond une somme : i_1 est le nombre de cases avant le premier cube délimiteur et le nombre i_k est le nombre de case entre le $k-1^{\text{ème}}$ délimiteur et la fin du casier. Réciproquement, pour chaque somme, il existe un seul arrangement des cases et des blocs délimiteurs.

Ainsi il y a autant de sommes de k nombres dont la somme est n que de choix de $k-1$ cases parmi $n+k-1$. Il y a donc $\binom{n+k-1}{k-1}$ sommes possibles.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u>

Ce problème est très proche du précédent, car il faut regrouper en n paquets les k tirages. Ainsi il y a $\binom{n+k-1}{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!.(n+k-1-n+1)!} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!.k!} = \binom{n+k-1}{k}$.

Ce nombre s'appelle généralement le nombre de combinaisons avec répétition et se note généralement : $\Gamma_n^k = \binom{n+k-1}{k}$.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u>

On note $1, 2, ..., n$ les couleurs (on a donc un ordre sur les couleurs).

Nous allons distinguer les differents cas, en fonction du nombre de couleurs utilisées.

- Si on utilise 4 couleurs différentes, toutes les faces sont de couleurs différentes. On place la plus petite couleur (celle qui a le plus petit numéro) vers le bas et l'on place la seconde couleur face à nous. Il reste alors 2 possibilités pour choisir la place des 2 dernières couleurs. Il existe donc 2 (et seulement 2) tétraèdres qui ont les 4 mêmes couleurs. Il y a donc $2.\binom{n}{4}$ tétraèdres avec 4 couleurs.
- Si on utilise 3 couleurs, il y a nécessairement une couleur qui se répète, notons la i. On place alors les deux faces de couleur i vers le bas et l'autre vers nous, les deux autres faces peuvent donc être peintes de 2 manières différentes. Donc il y a $2.\binom{n}{3}$ tétraèdres de 3 couleurs différentes.
- Si on utilise 2 couleurs, soit une couleur apparaît 3 fois, soit les deux couleurs apparaissent 2 fois. Si une des 2 couleurs est représentée 3 fois, alors en plaçant la couleur représentée une seule fois vers le bas on remarque qu'il n'y a qu'une seule manière de peindre le tétraèdre. Si chaque couleur est représentée 2 fois et si l'on place la plus petite couleur vers le bas et face à nous on remarque que la position de l'autre couleur est ainsi fixée. Il n'existe donc qu'une manière de peindre un tétraèdre avec deux couleurs qui se répètent deux fois chacunes. Il y a donc $2.\binom{n}{2}$ tétraèdres peints avec 2 couleurs.
- Si on utilise une seule couleur, il n'y a bien sûr qu'un tétraèdre par couleur. Il y a donc $\binom{n}{1} = n$ tétraèdres d'une seule couleur.

Le nombre de tétraèdres possibles est donc :

$$2(\binom{n}{4} + \binom{n}{3} + \binom{n}{2}) + n = 2(\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \frac{n(n-1)}{2}) + n$$
$$= n(\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{12} + \frac{(n-1)(n-2)}{3} + (n-1) + 1)$$

<u>*Solution de l'exercice 8*</u>

Nous allons montrer par récurrence sur m que

$$(x_1 + x_2 + ... + x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+...+k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, ..., k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_m^{k_m}$$

avec

$$\binom{n}{k_1, k_2, ..., k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! ... k_m!}$$

.

Pour $m = 2$ on retrouve la formule du binôme de Newton.

Supposons alors que la formule soit vraie pour m, on a donc :

$$(x_1 + ... + (x_m + x_{m+1}))^n = \sum_{k_1+k_2+...+K=n} \binom{n}{k_1, k_2, ..., K} x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_{m-1}^{k_{m-1}} (x_m + x_{m+1})^K$$

avec la formule du binôme sur $(x_m + x_{m+1})^K$ on a :

$$= \sum_{k_1+k_2+...+K=n} \binom{n}{k_1, k_2, ..., K} x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_{m-1}^{k_{m-1}} \sum_{k_m+k_{m+1}=K} \binom{K}{k_m, k_{m+1}} x_m^{k_m} x_{m+1}^{k_{m+1}}$$

Et par définition des coefficients, on a

$$\binom{n}{k_1, k_2, ..., K} \binom{K}{k_m, k_{m+1}} = \frac{n!}{k_1! k_2! ... K!} \frac{n!}{k_m! k_{m+1}!} = \frac{n!}{k_1! k_2! ... k_{m+1}!} = \binom{n}{k_1, ..., k_m, k_{m+1}}$$

Enfin :

$$(x_1 + x_2 + ... + x_m + x_{m+1})^n = \sum_{k_1+...+k_{m+1}=n} \binom{n}{k_1, k_2, ..., k_m, k_{m+1}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_{m+1}^{k_{m+1}}$$

Solution de l'exercice 9

Pour que la sauterelle soit sur la fleur 0 après k sauts il faut qu'il y ait eu autant de sauts vers la gauche que vers la droite, il est donc nécessaire que k soit pair, sinon c'est impossible. Notons alors $k = 2r$.

Il faut et il suffit qu'il y ait autant de sauts vers la droite que vers la gauche il y a donc $\binom{2r}{r}$ façons de faire $2r$ sauts pour que la sauterelle revienne à son point de départ. On pourrait généraliser le résultat en demandant à ce que la sauterelle soit sur la fleur i après ses k sauts (comment ?).

Si on lui impose maintenant de ne jamais passer sur une fleur strictement négative, on remarque facilement que pour tous mots bien parenthésés il correspond un parcours de la sauterelle en transformant une "(" en saut vers la droite et une ")" en un saut vers la gauche. A l'inverse une série de $2r$ sauts finissant sur la fleur 0 correspond a un unique mot bien parenthésé. Ainsi il y a C_r séries de sauts.

Solution de l'exercice 10

Notons T_n le nombre de triangulations d'un polygone à n faces. On a $T_3 = 1$ et $T_4 = 2$.

On note les sommets $A_1, ..., A_n$ dans le sens des aiguilles d'une montre.

On considère alors l'arête $[A_1A_2]$. Si A_k est le troisième sommet du triangle alors il reste un polygone de $k-1$ sommets à droite (entre les sommets A_2 et A_k) et un polygone de $n-k+2$ à gauche (entre les sommets A_k et A_1). Donc si on fixe le triangle $A_1A_2A_k$, il existe $T_{k-1}T_{n-k+2}$ triangulations dans lesquelles il y a le triangle $A_1A_2A_k$.

On a donc la relation de récurrence (en posant $T_2 = 1$) :

$$T_n = \sum_{k=3}^{n} T_{k-1}T_{n-k+2}$$

Changeons alors l'ordre de sommation en choisissant $i = k+3$

$$T_n = \sum_{i=0}^{n-3} T_{i+2}T_{n-i-1}$$

On a donc que $T_n = C_{n-2}$, car $T_2 = T_3 = C_0 = C_1 = 1$ et

$$C_{n-2} = \sum_{i=0}^{(n-2)-1} C_{(i-2)+2}T_{(n-2)-(i-2)-1}$$

Remarque :

C'est pour résoudre ce problème que les nombres de Catalan ont été introduits pour la première fois au $18^{\text{ème}}$ siècle par Leonhard Euler. Eugène Charles Catalan fit le lien entre ce problème et celui des comptages de parenthèses. Historiquement les choses se sont donc déroulées à l'inverse de ce que l'on a présenté ici.

Solution de l'exercice 11

On a

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i^2j^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2(\sum_{j=1}^{n} j^2) = (\sum_{i=1}^{n} i^2)(\sum_{j=1}^{n} j^2) = (\frac{n(n+1)(2n+1)}{6})^2$$

Solution de l'exercice 12

On sépare en deux la deuxième somme car

$$\sum_{j=1}^{n} \min(i,j) = \sum_{j=1}^{i} \min(i,j) + \sum_{j=i+1}^{n} \min(i,j) = \sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} i = \frac{i(i+1)}{2} + i.(n-(i+1)+1)$$

On a donc

$$u_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \min(i,j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} + i(n-i) = \sum_{i=1}^{n} (n+\frac{1}{2})i - \frac{i^2}{2}$$

$$= (n+\frac{1}{2})\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Solution de l'exercice 13

Nous changeons l'ordre de la somme. Rassemblons les termes pour lesquels $p+q$ est constant. Posons donc $i = p+q$, on a donc :

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{p} p+q = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i+1} i = \sum_{i=0}^{n} i(i+1) = \sum_{i=0}^{n} i^2 + \sum_{i=0}^{n} i$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+4)}{6}$$

Solution de l'exercice 14

Regardons le polynôme $(1+x)^{n+m} = (1+x)^n.(1+x)^m$. Dans ce polynôme le coefficient de x^k peut être calculé de deux manières différentes. Avec la partie gauche de l'égalité on aboutit à $\binom{m+n}{k}$ et avec l'autre membre on aboutit à :

$$\sum_{p,r|\ p+r=k} \binom{n}{p}\cdot\binom{m}{r} = \sum_{i=0}^{m+n} \binom{n}{i}\cdot\binom{m}{n-k} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\cdot\binom{m}{k-i}$$

car on a choisi $\binom{n}{k} = 0$ quand $k > n$.

Solution de l'exercice 15

Pour chaque permutation ayant un seul cycle on peut lui associer son cycle exprimé comme un n-uplet dont le premier nombre est 1. A l'inverse pour chaque n-uplet qui commence par un 1 on peut lui associer la seule permutation ayant ce seul cycle. Il y a donc $(n-1)!$ permutations n'ayant qu'un cycle.

Solution de l'exercice 16

Pour avoir $p^{(i)}(1)$ il faut (et il suffit) que i soit un multiple de la longueur du cycle qui contient 1. Comme la somme de la longueur des cycles d'une permutation de longueur 11 est 11, alors l'ordre maximum est le PPCM maximum que l'on peut atteindre avec des nombres dont la somme vaut 11. Ce PPCM maximum est atteint pour 6 et 5. Donc l'ordre maximum d'une permutation de longueur 11 est $6 \times 5 = 30$.

Solution de l'exercice 17

Si pour toute permutation de longueur n on a $p^{(k)} = Id$ alors pour toute longueur $1 \leq i \leq n$ de cycle d'une permutation de longueur n le nombre k doit être un multiple de i.

Or tous les nombres de $i \in \{1, 2, ..., n\}$ peuvent être la longueur d'un cycle d'une permutation de longueur n. En effet, il suffit de prendre la permutation $(2, 3, ..., i-1, i, 1, i+1, i+2, ..., n)$ qui a comme cycle $(1, 2, 3, ..., i)$ qui est de longueur i.

Ce nombre est donc PPCM$(1, 2, ..., n)$. Si on note p_i le $i^{\text{ème}}$ nombre premier et α_i le plus grand entier tel que $p_i^{\alpha_i} \geq n$, on a donc que PPCM$(1, 2, ..., n) = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.\cdots.p_i^{\alpha_i}.\cdots$.

Solution de l'exercice 18

On va plutôt compter les permutations de taille n qui possèdent au moins un i tel que $p(i) = i$. Pour cela on va utiliser le principe d'inclusion et d'exclusion.

Notons A_i l'ensemble des permutations tels que $p(i) = i$. On a alors : Card$(A_i) = (n-1)!$ et pour une intersection de k ensembles A_i disctincts on a Card$(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = (n-k)!$. Donc avec la formule du principe d'inclusion et d'exclusion on a :

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \cdots + (-1)^{n-1}$$

Comme il y a $n!$ permutations, le nombre de dérangements est :

$$n! - (n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}n!}{n!} = n!(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!})$$

Solution de l'exercice 19

Soient $\mathfrak{A}$ l'ensemble des permutations qui possèdent la propriété $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{B}$ l'ensemble de celles qui ne possèdent pas la propriété $\mathfrak{P}$. Il nous suffit de trouver une injection φ de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$.

Soit p l'unique élément de $\{1, 2, ..., 2n\}$ tel que $x_p \equiv x_1 + n \pmod{2n}$. On a alors :

$$\varphi : (x_1, x_2, ..., x_{p-1}, x_p, x_{p+1}, ..., x_{2n}) \mapsto (x_2, ..., x_{p-1}, x_1, x_p, x_{p+1}, ..., x_{2n})$$

On remarque donc que tout élément $(y_1, ..., y_{2n})$ de l'image de φ vérifie $\mathfrak{P}$ car si on choisi $i = p - 1$, on a $|y_i - y_{i+1}| = |x_1 - x_p| = n$. Donc φ est injective. Donc $\text{Card}(\mathfrak{A}) \geq \text{Card}(\mathfrak{B})$.

Solution de l'exercice 20

Notons $f(n, r)$ le nombre de façons de former r couples compatibles.

Distinguons alors 2 cas :

- Si la fille F_n danse, il y a $r-1$ couples formé avec les $n-1$ premières filles et les $2n-3$ premiers garçons (car $F_1, ..., F_{n-1}$ ne connaissent que $G_1, ..., G_{2n-3}$). Il y a exactement $f(n-1, r-1)$ possibilités et pour chaque possibilité F_n peut danser avec $2n - r$ garçons différents. Donc il y a $(2n - r)f(n - 1, r - 1)$ possibilités si F_n danse.
- Si F_n ne danse pas, il y a $f(n - 1, r)$ façons de former les r couples.

Donc on a $f(n, r) = (2n - r)f(n - 1, r - 1) + f(n - 1, r)$. En outre, on a $f(n, 0) = 1$, $f(n, n + 1) = 0$ et $f(1, 1) = 1$.

On vérifie enfin que $\binom{n}{r}\frac{n!}{(n-r)!}$ est bien solution de cette récurrence.

Solution de l'exercice 21

On sait que $2008 = 24.72 + 99 - 4 + 99 - 6 + 99 - 7$. Considérons les 99 droites $y = 1$, $y = 2$, ... , $y = 24$ et $x = 1$, $x = 2$, ... , $x = 72$. Elles se rencontren en $72.24 = 1728$ points. La droite $y = x + 20$ coupe les droites précédentes mais les points $(1, 21)$, $(1, 22)$, $(1, 23)$ et $(1, 24)$ ont déjà été comptés dans le produit 72.24. Cette droite ajoute donc $99 - 4$ points d'intersections. De même les droites $y = x + 17$ et $y = x + 16$ ajoutent respectivement $99 - 6$ et $99 - 7$ nouveaux points d'intersections. On a donc bien construit 100 droites ayant 2008 points d'intersections.

Solution de l'exercice 22

Nous allons montrer qu'il existe strictement plus de coloriages que de coloriages contenant une progression arithmétique de 10 termes de même couleur. L'existence d'un coloriage tel que aucune progression arithmétique de 10 termes ne contienne que des nombres d'une seule couleur sera alors claire.

Il y a 4^{2008} coloriages avec 4 couleurs. Notons A le nombre de progressions arithmétiques de 10 termes dans $\{1, 2, ..., 2008\}$. Le nombre de coloriages contenant une progression arithmétique de 10 termes est donc $4.A.4^{2008-10}$. Il suffit donc de montrer que $A < 4^9$. Comptons le nombre de progressions arithmétiques de 10 termes qui commence par k, cela correspond à choisir la raison de cette suite et il y a exactement $\lfloor \frac{2008-k}{9} \rfloor$ choix possibles. On a donc :

$$A = \sum_{k=1}^{2008} \lfloor \frac{2008-7}{9} \rfloor < \frac{2007+2006+...+9}{9} = \frac{2007.2008}{2.9} < \frac{(2^{11})^2}{2.2^3} = 4^9$$

On a donc démontré le résultat.

Solution de l'exercice 23

On remarque immédiatement que $a_{2k-1} = 0$ car il faut nécessairement jouer un nombre pair de coups pour rejoindre le point E depuis A. On peut donc s'intéresser seulement aux positions tous les 2 coups.

On note alors (c_n) et (g_n) le nombre de parties aboutissant à E pour la première fois, en partant de C et G respectivement. Par symétrie on a $(c_n) = (g_n)$.

Si nous arrivons en E pour la première fois après $2n+2$ coups, alors après les 2 premiers coups ont peut soit être en A (après être passé par B ou F) soit en C ou soit en G. Donc on a la relation :

$$a_{2n+2} = 2a_{2n} + c_{2n} + g_{2n} = 2a_{2n} + 2c_{2n}$$

Ce qui équivaut à :

$$c_{2n} = \frac{a_{2n+2}}{2} - a_{2n} \tag{V.1}$$

De plus comme il est impossible de passer par E, en raisonnant comme avant on a :

$$c_{2n+2} = a_{2n} + 2c_{2n}$$

Nous éliminons les c_i dans cette équation avec (V.1). Nous avons donc :

$$a_{2n+4} - 4a_{2n+2} + 2a_{2n} = 0$$

Le polynôme caractéristique de cette suite récurrente linéaire d'ordre 2 est : $X^2 - 4X + 2$ dont les racines sont x et y défini comme dans l'énoncé. Il existe donc α et β tel que $a_{2n} = \alpha x^{n-1} + \beta y^{n-1}$. Comme on a $a_2 = 0$, $\alpha = -\beta$. Comme $a_4 = 2$, $\alpha = 1/\sqrt{2}$.

Donc enfin on a

$$a_{2n} = \frac{x^{k-1} - y^{k-1}}{\sqrt{2}}$$

2 Arithmétique, première partie

Pour s'échauffer

Quelques exercices relativement faciles, qui ne devraient pas poser trop de problèmes pour commencer.

Exercice 1 Montrer que parmi 2008 nombres, on peut toujours en trouver dont la somme est divisible par 2008 (une somme peut éventuellement n'être constituée que d'un seul nombre).

Exercice 2 Montrer que $11^{100} - 1$ est divisible par 1000.

Exercice 3 Combien peut-il y avoir de Vendredi 13 dans une année (non bissextile) ?

Exercice 4 Montrer que si (x, y, z) est un solution de l'équation suivante alors x ou y est un multiple de 2 :

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Pour réviser

Voici quelques résultats classiques qu'il est bon de savoir prouver.

Exercice 5 (le petit théorème de Fermat) Pour a premier avec n on a :

$$a^{\varphi(n)} = \pmod{n}$$

Exercice 6 (le théorème de Wilson) Un entier p strictement plus grand que 1, est un nombre premier si et seulement s'il divise $(p-1)! + 1$.

Exercice 7 (le théorème des restes chinois) Soit $n_1, n_2, \ldots, n_k$ des nombres premiers entre eux. Alors pour tous entiers $a_1, a_2, \ldots, a_k$ il existe un unique m tel que pour $N = n_1.n_2.\ldots.n_k$ on ait :

$$m = a_1 \pmod{N}$$

$$m = a_2 \pmod{N}$$

$$\ldots$$

$$m = a_k \pmod{N}$$

Pour chercher

Voici ce que vous attendiez tous : des exercices un peu plus sérieux.

Exercice 8 Montrer que le produit de 5 nombres consécutifs ne peut pas être un carré.

Exercice 9 Résoudre l'équation

$$28^x = 19^y + 87^z$$

Pour $x, y, z \in \mathbb{N}$.

Exercice 10 (un classique) Montrer qu'il existe un multiple de 2009 dont l'écriture décimale ne contient que des chiffres "1".

Exercice 11 Trouver huit entiers strictements positifs $n_1, n_2, ..., n_8$ ayant la propriété suivante :

pour tout entier k, $-2007 \leq k \leq 2007$, il existe huit entiers $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_8$ appartenant tous àă $\{-1, 0, 1\}$, tels que

$$k = \alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + ... + \alpha_8 n_8$$

Exercice 12 Déterminer toutes les solutions entières (x, y) de l'équation diophantienne

$$x^3 - y^3 = 2xy + 8$$

Exercice 13 Trouver toutes les paires de nombres (n, k) tel que dans le système décimal :
n^n s'écrit avec k chiffres,
k^k s'écrit avec n chiffres.

Exercice 14 Trouver tous les nombres A de trois chiffres tels que la moyenne des nombres obtenus en permutant les chiffres soit égale àă A.

Pour vérifier

Solutions à n'utiliser qu'après avoir réellement cherché àă résoudre les exercices proposés.
Solution de l'exercice 1 On note $a_1, a_2, ..., a_{2008}$ les nombres. On considère alors les sommes :
$S_1 = a_1$
$S_2 = a_1 + a_2$
$\vdots$
$S_{2008} = a_1 + a_2 + ... + a_{2008}$
Deux cas sont alors possibles :
– soit une de ces sommes est divisible par 2008, alors on a fini.
– sinon ces sommes ont au plus 2007 restes possibles par division euclidienne, alors il existe S_i et S_j différents (on suppose par exemple $i < j$), tel que $S_i \equiv S_j(\mathrm{mod}\ 2008)$. On a donc $S_j - S_i = s_{i+1} + ... + s_j \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2008)$ et on a donc le résultat souhaité.

Solution de l'exercice 2 D'après la formule du binôme de Newton :

$$11^{100} = (10+1)^{100} = \sum_{i=0}^{100} \binom{100}{i} 10^i = 1 + 10.\binom{100}{1} + 100.\binom{100}{2} + \sum_{i=3}^{100} \binom{100}{i} 10^i$$

Or on a que $\binom{100}{1} = 100$ et $\binom{100}{2} = \frac{100.99}{2} = 4950$. Donc on a :

$$11^{100} - 1 = 10.100 + 100.4950 + \sum_{i=3}^{100} \binom{100}{i} 10^i = 1000 \left(1 + 495 + \sum_{i=3}^{100} \binom{100}{i} 10^{i-3}\right).$$

Donc $11^{100} - 1$ est divisible par 1000.

Solution de l'exercice 3 Dans les jours de l'année les 13 de chaque mois occupent les rangs : 13, 44, 72, 103, 133, 164, 194, 225, 256, 286, 317, 347. Pour savoir à quel jour de la semaine chaque jour correspond il suffit alors de passer ces valeurs modulo 7 : 6, 2, 2, 5, 0, 3, 5, 1, 4, 6, 2, 4. Si le jour 1 de l'année (le 1er janvier) est un vendredi alors il n'y aura qu'un vendredi 13 en août. Si le jour 4 est un vendredi il y aura 2 vendredi 13, en septembre et en décembre, si le jour 2 est un vendredis alors il y aura 3 vendredis 13. D'autre part, on remarque qu'il est impossible qu'il n'y ait pas de vendredi 13 ou qu'il y en ait plus de 3.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Regardons l'équation modulo 4. Si x et y sont impairs alors on aurai $1+1=z^2 \pmod 4$ ce qui est impossible car un carré ne peut pas être congrue a 2 modulo 4.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Théorème classique à voir dans tout bon livre d'arithmétique.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> Théorème classique à voir dans tout bon livre d'arithmétique.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> Théorème classique à voir dans tout bon livre d'arithmétique.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> Supposons que a, b, c, d, e soient des entiers strictement positifs consécutifs tels que $a.b.c.d.e$ soit le carré d'un entier.

Si un des nombres contient un facteur premier supérieur à 5, alors, nécessairement ce facteur doit avoir un exposant pair, car il n'apparaît que dans un seul des nombres du produit. Ainsi selon la puissance des facteurs 2 et 3 dans chaque nombre, chacun des nombres a, b, c, d, e est :

1. un carré parfait ou,
2. deux fois un carré parfait ou,
3. trois fois un carré parfait ou,
4. six fois un carré parfait.

D'après le principe des tiroirs, il existe au moins 2 nombres dans la même catégorie. Si les deux nombres sont tous les deux dans le cas 2, 3 ou 4 alors leur différence est au moins 6, ce qui est impossible car a, b, c, d, e sont des entiers consécutifs. Si les deux nombres sont dans le cas 1, alors il sont tous les deux des carrés parfaits. Il est donc impossible que e dépasse 5 car les seuls carrés qui sont à une distance inférieure àă 5 sont 1 et 4, or $1.2.3.4.5 = 120$ et 120 n'est pas un carré. Il est donc impossible que le produit de 5 nombres consécutifs strictements positifs soit un carré parfait.

Remarque : Paul Erdös a montré que le produit de $k > 1$ nombres consécutifs n'est jamais un carré.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> Nous allons essayer de restreindre le plus possible l'ensemble des solutions.

Supposons que (x, y, z) soit une solution de l'équation.

Comme on a supposé que y et $z \geq 0$ on a donc nécessairement $x > 0$. De plus si $x = 1$ il faudrait que l'on ait $28 = 19^y + 87^z$ donc nécessairement $z = 0$ et il est impossible de trouver y pour satisfaire l'égalité, donc $x \geq 2$.

Comme $x \geq 2$ on a $19^y + 87^z = 28^x \equiv 0 \pmod{16}$, or on a $87^z \equiv 7^z \equiv 7$ ou $1 \pmod{16}$ selon la parité de z, et de plus $19^y \equiv 3^y \equiv 1, 3, 9$ ou $11 \pmod{16}$ pour respectivement $y \equiv 0, 1, 2$ ou $3 \pmod 4$. Ainsi la seule solution est que z soit impaire et $y \equiv 2 \pmod 4$.

Regardons maintenant modulo 9, l'équation devient : $1^x \equiv 1^y + 6^z \pmod 9$, donc z ne peut pas être égal à 0 ou à 1. Et comme z est impaire on a $z \geq 3$.

Comme $z \geq 3$ alors 87^z est divisible par $3^3 = 27$. Donc modulo 27 l'équation devient $1 \equiv 19^y \pmod{27}$, or on a $19^2 \equiv 10 \pmod{27}$ et $19^3 \equiv 1 \pmod{27}$. y est donc un multiple de 3 et comme $y \equiv 2 \pmod 4$, alors $y \equiv 6 \pmod{12}$.

Modulo 7 l'équation devient $0 \equiv 5^y + 3^z \pmod 7$, comme y est multiple de 6 et $5^6 \equiv 1 \pmod 7$, on a donc $3^z \equiv -1 \pmod 7$, ce qui impose que $z \equiv 3 \pmod 6$.

Enfin, regardons modulo 13, l'équation devient $2^x \equiv 6^y + 9^z \pmod{13}$. Comme y vérifie $y \equiv 6 \pmod{12}$ on a $6^y \equiv -1 \pmod{13}$. De plus, on sait que z est un multiple de 3, on a donc $9^z \equiv 1 \pmod{13}$. L'équation devient $2^x \equiv 0 \pmod{13}$, ce qui est impossible.

Il n'y a donc pas de solution entière à cette équation.

<u>*Solution de l'exercice 10*</u> La clef de cette solution est le principe des tiroirs (si vous n'y aviez pas pensé ne lisez pas la suite et réfléchissez encore un peu).

Considérons les nombres $a_1 = 1, a_2 = 11, a_3 = 111, a_4 = 1\ 111, ..., a_{2010} = 111\ 111\ 111...111$ (le dernier nombre contient 2010 fois le nombre 1). D'après le principe des tiroirs, deux de ces nombres ont le même reste par une division par 2009. Disons alors que a_p et a_q sont ces deux nombres (avec $p > q$). On a donc $a_p \equiv a_q \pmod{2009}$ d'où $a_p - a_q = 111...11100...00 \equiv 0 \pmod{2009}$. Or $a_p - a_q = 111...11100...00 = a_{p-q}.10^q$ or comme 2009 est premier avec 10 (et donc 10^q) et comme 2009 divise $a_{p-q}.10^q$ alors d'après le lemme de Gauss 2009 divise a_{p-q}.

<u>*Solution de l'exercice 11*</u>

On prend $n_i = 3^{i-1}$. Pour un nombre k tel que $0 \leq k \leq 3^8 - 1 = 6560$ la décomposition de k en base 3 nous donne l'existence de $\beta_1, ...\beta_8 \in \{0, 1, 2\}$ tels que $k = \beta_1 n_1 + ... + \beta_8 n_8$.

Si on soustrait à cette décomposition $3^0 + 3^1 + ... + 3^7 = 3280$ on a $k - 3280 = (\beta_1 - 1)n_1 + ... + (\beta_8 - 1)n_8$ et bien entendu $(\beta_1 - 1), ..., (\beta_8 - 1) \in \{-1, 0, 1\}$.

Donc pour $i = k - 3280$ tels que $-3280 \leq i = k - 3280 \leq 3280$ alors il existe $\alpha_1, ...\alpha_8 \in \{-1, 0, 1\}$ tels que $i = n_1\alpha_1 + ... + n_8\alpha_8$.

<u>*Solution de l'exercice 12*</u>

Soit (x, y) une solution.

Si $x = 0$ alors $-y^3 = 8$ et donc $y = -2$.

Si $y = 0$ alors $x^3 = 8$ et donc $x = 2$.

Distinguons 5 cas :

- Si $x = 0$ alors $-y^3 = 8$ et donc $y = -2$.
- Si $y = 0$ alors $x^3 = 8$ et donc $x = 2$.
- Si $x > 0$ et $y < 0$, on a $x^3 < 8$ car $x^3 = y^3 + 2xy + 8$, donc $x = 1$ donc $y^3 + 2y + 7 = 0$ mais cette équation n'a pas de solution entière, et donc ce cas est impossible.
- Si $x < 0$ et $y > 0$ alors on a $y^3 - x^3 = -2xy - 8 < -2xy$ et $y^3 - x^3 = y^3 + (-x)^3 > y^2 + (-x)^2 \geq -2xy$ ce qui est impossible.
- Si $xy > 0$, alors $x^3 - y^3 = 2xy + 8 > 0$, donc $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) > 0$ et ceci implique que $x - y > 0$. On distingue alors encore deux cas :
  - Si $x - y = 1$ alors
  $$2xy + 8 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^2 + xy + y^2 = (x - y)^2 + 3xy = 1 + 3xy$$
  et comme $x = y + 1$, alors :
  $$2(y + 1)y + 8 = 1 + 3(y + 1)y$$
  et donc $y^2 + y - 7 = 0$ or cette équation n'a pas de solution entière.
  - Si $x - y \geq 2$ alors
  $$2xy+8 = x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2) = (x-y)((x-y)^2+3xy) \geq 2(4+3xy) = 8+6xy$$
  On a donc que $2xy + 8 \geq 8 + 6xy$ et donc $xy \leq 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

Les seules solutions sont donc $(0,-2)$ et $(2,0)$.

<u>*Solution de l'exercice 13*</u> On suppose que (n,k) est une solution. Par symétrie on peut supposer $n \geq k$.

Si $n > k$ alors on a $n^n > k^k$ mais n^n a k chiffres et donc strictement moins de chiffres que k^k, ce qui est absurde. Donc $k = n$.

Il faut donc trouver les nombres n tels que n^n s'écrive avec n chiffres.

De plus si $n \geq 10$ on a $n^n \geq 10^n$ et comme 10^n s'écrit avec $n+1$ chiffres alors n^n ne peut pas s'écrire avec n chiffres. Donc $n < 10$.

On essaye alors les différentes valeurs entre 1 et 9 et on trouve que les seules solutions sont : $(1,1)$, $(8,8)$ et $(9,9)$.

<u>*Solution de l'exercice 14*</u> On écrit $A = 100a+10b+c$. Les nombres correspondants à une permutation des chiffres de A sont donc $100a+10b+c$, $100a+10c+b$, $100b+10a+c$, $100b+10c+a$, $100c+10a+b$ et $100c+10b+a$. La moyenne de ces chiffres est $\frac{1}{6}(222a+222b+222c) = 37(a+b+c)$.

Pour que le nombre soit égal à la moyenne des nombres obtenus par permutation des chiffres, il faut (et suffit) donc que

$$37(a+b+c) = 100a+10b+c$$

d'où

$$63a = 27b + 36c$$

et en divisant par 9 :

$$7a = 3b + 4c$$

De plus on a $a \in \{1,2,...,9\}$ et $b,c \in \{0,1,2,...,9\}$.

- Si $b = 0$ on a $7a = 4c$ et donc la seule solution est $a = 4$, $c = 7$.
- Si $b = 1$ on a $7a = 3 + 4c$ et les deux seules solutions sont alors $a = c = 1$ et $a = 5$, $c = 8$.
- Etc (pour b allant jusque 9).

Donc enfin les solutions sont 111, 222, 333, 370, 407, 444, 481, 518, 555, 592, 629, 666, 777, 888, 999.

3 Arithmétique, deuxième partie

Énoncés

Exercice 1 Montrer que les diviseurs premiers impairs des nombres de la forme x^2+1 sont de la forme $4k+1$.

Exercice 2 Montrer que si $a^n - 1$ divise $a^m - 1$ alors n divise m.

Exercice 3 Montrer qu'il existe une infinité de triplets $(m,n,p) \in \mathbb{Z}^3$ tels que $4mn - m - n = p^2 - 1$. Montrer qu'il n'existe pas de triplets $(m,n,p) \in \mathbb{Z}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$ tels que $4mn - m - n = p^2$.

Exercice 4 Trouver toutes les $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que $\forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$f(n) + f(m) | n + m$$

Exercice 5 Soit p un nombre premier. Montrer qu'il existe un diviseur premier de $p^p - 1$ qui est congru à 1 modulo p.

Exercice 6 Montrer que tout entier naturel n premier avec 10 possède un multiple dont la somme des chiffres est égale à n.

Exercice 7 Prouver qu'il n'existe pas d'entiers a et b strictement positifs tels que, pour tous nombres premiers distincts p et q strictement supérieurs a 1000, le nombre $ap + bq$ soit aussi premier.

Exercice 8 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe n entiers naturels consécutifs qui ne sont pas des puissances entières d'un nombre premier.

Solutions

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Si p divise x^2+1, alors $x^2 \equiv -1[p]$ donc $1 \equiv x^{p-1} = (x^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}$. Donc $\frac{p-1}{2}$ est pair, i.e $p = 4k+1$.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> On écrit $m = nq + r$ où $0 \leq r < m$. On a $a^m \equiv 1[a^n - 1]$ donc $(a^n)^q \times a^r = 1[a^n - 1]$ or $a^n \equiv 1[a^n - 1]$ donc $a^r \equiv 1[a^n - 1]$ donc $a^n - 1$ divise $a^r - 1$ donc $r = 0$ (car $0 \leq a^r - 1 < a^n - 1$ donc $a^r - 1 = 0$)

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Penser aux triplets $(3k^2, 1, 3k)$. Pour la deuxième équation, modulo $4m-1$, on a $p^2 = -m$ donc $(2p)^2 = -4m = -1$ d'où $4m-1$ divise $(2p)^2+1$ donc il existe un diviseur premier congru à -1 modulo 4 qui divise $4m-1$ donc p^2+1, impossible par l'exercice 1. (pour se convaincre de l'existence de ce diviseur premier, on suppose par l'absurde que tous les diviseurs premier de $4k-1$ étaient congrus à 1 modulo 4, on aurait $4k-1 \equiv 1[4]$, impossible).

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Pour $m = n$ on obtient que $f(n)$ divise n, et en particulier $f(n) \leq n$. Il y a une infinité de nombres premiers donc si n est un entier strictement positif, il existe $m > 0$ tel que $n + m = p$ et p premier. Or $f(m) + f(n)$ divise $m + n = p$ et $f(m) + f(n) \geq 1 + 1 = 2$ donc comme p est premier, $f(m) + f(n) = p$. Donc $f(n) = p - f(m) \geq p - m = n$ car $f(m) \leq m$. Donc $n \leq f(n) \leq n$ donc $f(n) = n$ et réciproquement l'identité est bien une solution.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> On note q un diviseur premier de $p^p - 1$. Alors on obtient que l'ordre de p modulo q divise p (cf propriété de l'ordre) donc est 1 ou p. Si il est égal à p, on a fini par le petit Théorème de Fermat car p divise $q-1$ toujours par la propriété de l'ordre. Supposons par l'absurde que pour tout q, l'ordre de p modulo q soit 1, donc que q divise $p-1$. Mais $p^p - 1 = (p-1)(p^{p-1} + p^{p-2} + ... + p + 1)$. Le terme de droite du facteur de droite est congru à p modulo $p-1$ donc est premier avec $p-1$, contradiction en considérant un diviseur premier q de $p^{p-1} + p^{p-2} + ... + p + 1$.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> On construit un nombre composé de '0' et de '1'. Ce nombre contient n '1'. La somme de ses chiffres est donc n. Il faut choisir les emplacements des '1' tels que le nombre soit divisible par n. (Le chiffre des unités de n est considéré comme étant à l'emplacement 0). On met alors les n '1' aux emplacements $k \times \phi(n)$ où $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$ où ϕ est l'indicatrice

d'Euler (donc le nombre obtenu est $\sum_{k=0}^{n-1} 10^{k\phi(n)}$). Alors ce nombre est congru à $1+1...+1$ (n fois) modulo n. D'où le résultat.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> Il y a deux preuves. Supposons par l'absurde qu'il existe a et b tels que la propriété soit vraie. Soient p et q premiers > 1000, avec $p > a$. On considère la suite définie par $p_0 = a$ et $p_{n+1} = ap_n + bq$. Alors on a immédiatement $p_n \equiv bq(1+a+a^2+...+a^{n-1}) = (a^n-1)\cdot(a-1)^{-1}[p]$. Contradiction pour $n = p-1$ par le petit théorème de Fermat.

Deuxième preuve : par le théorème de Dirichlet si m est premier avec a et b, il existe p premier assez grand de la forme $km+r$ et q de la forme $km-r'$ où $r \equiv a^{-1}[m]$ et $r' \equiv b^{-1}[m]$. Donc $ap \equiv 1[m]$ et $bq \equiv -1[m]$ contradiction car $ap+bq > m$ est premier.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> Une première preuve est due à Guillaume Conchon-Kerjan. On explicite une suite de n entiers qui vérifie la propriété de l'énoncé. On considère $N > 2n$ et les n entiers $N!+2$, $N!+3$, ..., $N!+(n+1)$. Pour $i \in \{2, 3, ..., n+1\}$, $N!+i = i\cdot(\frac{N!}{i}+1)$. Or dans $N!$ apparaît i et $2i$ donc i divise $\frac{N!}{i}$. Donc i et $\frac{N!}{i}+1$ sont premiers entre eux, donc $N!+i$ n'est pas une puissance d'un nombre premier (car il a *a fortiori* deux diviseurs premiers distincts).

Une deuxième solution est de considérer p_1, p_2, ..., p_n, etc... une énumération des nombres premiers. Et on prend x entier tel que p_1p_2 divise $x+1$, p_3p_4 divise $x+2$, ..., $p_{2n+1}p_{2n+2}$ divise $x+n$. On obtient l'existence par le Théorème des restes chinois. D'où le résultat par le même argument arithmétique de précédemment.

4 Inégalités

Énoncés

Exercice 1 Soient x, y, z des réels positifs tels que $x+y+z=3$. Montrer que $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \geq xy+yz+zx$.

Exercice 2 Soient x, $y > 0$ tels que $x+y=8$. Montrer que $(x+\frac{1}{y})^2+(y+\frac{1}{x})^2 \geq \frac{289}{8}$

Exercice 3 Soient x, y et z trois réels strictement positifs, tel que $x+y+z=1$. Montrer que : $\frac{x^{2011}+y^{2011}}{x^{2009}+y^{2009}}+\frac{y^{2011}+z^{2011}}{y^{2009}+z^{2009}}+\frac{z^{2011}+x^{2011}}{z^{2009}+x^{2009}} \geq \frac{1}{3}$.

Solutions

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> On a $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) = 9$ donc l'inégalité se réécrit $frm{-}e(sqrtx+\sqrt{y}+\sqrt{z})+x^2+y^2+z^2 \geq 9 = 3(x+y+z)$ On utilise l'IAG : $\frac{x^2+\sqrt{x}+\sqrt{x}}{3} \geq x$. D'où le résultat en sommant.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> D'après l'inégalité quadratique-arithmétique, $(x+\frac{1}{y})^2+(y+\frac{1}{x})^2 \geq 2(x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y})^2 \geq 2(8+4\frac{1}{x+y})^2 = 2(8+\frac{1}{2})^2 = \frac{289}{8}$.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Voici une solution due à Alexander Thomas (on remplace 2011 par n).

On suppose sans perte de généralité (l'inégalité est symétrique de x, y et z) que $x \leq y \leq z$. On va a par l'inégalité de Tchebychev appliquée aux suites (x^{n-2}, y^{n-2}) et (x^2, y^2), $\frac{x^n+y^n}{2} \geq \frac{x^{n-2}+y^{n-2}}{2}\cdot\frac{x^2+y^2}{2}$. Donc $\frac{x^n+y^n}{x^{n-2}+y^{n-2}} \geq \frac{x^2+y^2}{2}$. En sommant toutes ces inégalités, on obtient $\frac{x^n+y^n}{x^{n-2}+y^{n-2}}+$

$\frac{y^n+z^n}{y^{n-2}+z^{n-2}} + \frac{x^n+z^n}{x^{n-2}+z^{n-2}} \geq x^2+y^2+z^2 \geq \frac{(x+y+z)^2}{3} = \frac{1}{3}$ d'où le résultat (la dernière inégalité étant un case particulier de celle de Cauchy-Schwarz).

5 Géométrie

Énoncés

Exercice 1 Soit ABC un triangle isocèle en A, $M \in [AB]$, $N \in [AC]$. On note P le point d'intersection de (BN) et (CM). Montrer que les droites (MN) et (BC) sont parallèles ssi $\widehat{APM} = \widehat{APN}$.

Exercice 2 Soit $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ un hexagone. Pour $i \in [\![1,6]\!]$, on pose A_i' l'isobarycentre du triangle $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ (avec les conventions $A_0 = A_6$, $A_7 = A_1$). Montrer que l'hexagone $A_1'A_2'A_3'A_4'A_5'A_6'$ a ses côtés opposés parallèles et égaux.

Exercice 3 Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles de rayons respectifs r_1 et r_2 se coupant en deux points A et B. Soit (Δ) une droite quelconque passant par A ; on appelle C et D ses points d'intersection respectifs avec Γ_1 et Γ_2. Calculer le rapport BC/BD.

Exercice 4 (Droite de Simson). Soit ABC un triangle, M un point. On appelle I, J et K ses projections respectives sur (BC), (AC) et (AB). Montrer que I, J et K sont alignés ssi M se trouve sur le cercle circonscrit à ABC.

Exercice 5 Soit ABC un triangle ; soit H sont orthocentre, O le centre de son cercle circonscrit, R le rayon de son cercle circonscrit. Soit A' le symétrique de A par rapport à (BC), B' le symétrique de B par rapport à (AC), C' le symétrique de C par rapport à (AB). Montrer que A', B', C' sont alignés ssi $OH = 2R$.

Exercice 6 Soit ABC un triangle ; soit $A'B'C'$ un triangle directement semblable à ABC tel que $A \in [B'C']$, $B \in [C'A']$, $C \in [A'B']$. Soit O le centre du cercle circonscrit à ABC, H son orthocentre et H' celui de $A'B'C'$. Montrer que $OH = OH'$.

Exercice 7 (Théorème de Pascal). Soit $ABCDEF$ un hexagone inscrit dans un cercle. On note G l'intersection des droites (AB) et (DE), H l'intersection de (BC) et (EF), I l'intersection de (CD) et (FA). Montrer que les points G, H, I sont alignés. Peut-on affaiblir l'hypothèse sur $ABCDEF$?

Exercice 8 (Théorème de Sylvester). Soit E un ensemble de n points dans le plan. On suppose qu'il n'existe aucune droite qui contient exactement 2 de ces points. Montrer que les points sont alignés.

Solutions

Solution de l'exercice 1 Le sens direct est évident par symétrie.

Première version. Soit A' un point situé sur la droite (AP) de l'autre côté du point P. Alors on a $\widehat{APM} = \widehat{APN} = \widehat{A'PC} = \widehat{A'PB}$, et la somme de ces angles fait moins de 2π ; donc chacun de ces angles est aigu. Or $\widehat{APB}$ et $\widehat{APC}$ sont les supplémentaires respectifs de $\widehat{A'PB}$ et $\widehat{A'PC}$, donc ils sont égaux et obtus. D'autre part, $AB = AC$, et le côté AP est en commun ; on en déduit que les triangles APB et APC sont égaux. Par symétrie, on peut alors conclure.

Deuxième version. On suppose, sans perte de généralité, que P et B sont situés du même côté par rapport à l'axe de symétrie du triangle. On considère alors le symétrique de P par rapport à cet axe, qu'on appelle Q. P est alors à l'intérieur de ABQ, d'où $\widehat{ABP} \geq \widehat{ABQ}$ et $\widehat{BAP} \geq \widehat{BAQ}$. Comme $\widehat{APB} = \widehat{APC} = \widehat{AQB}$, on a en fait égalité, d'où $P = Q$, et on conclut par symétrie.

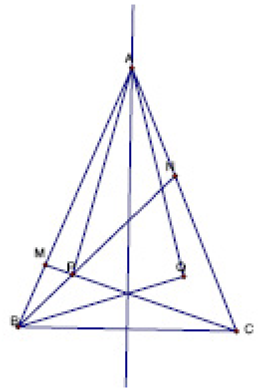


FIG. 1 – Exercice 1

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> On choisit une origine O, et on pose, pour tout i, $\vec{u_i} = \vec{OA_i}$ et $\vec{v_i} = \vec{OA'_i}$. On a alors, pour tout i (en prenant les i modulo 6) :

$$\begin{aligned}
\vec{v_{i+1}} - \vec{v_i} &= \frac{1}{3}\left(\vec{u_i} + \vec{u_{i+1}} + \vec{u_{i+2}}\right) - \frac{1}{3}\left(\vec{u_{i-1}} + \vec{u_i} + \vec{u_{i+1}}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\vec{u_{i+2}} - \vec{u_{i-1}}\right) \\
&= -\left(\vec{v_{i+4}} - \vec{v_{i+3}}\right)
\end{aligned}$$

soit $\vec{A'_iA'_{i+1}} = \vec{A'_{i+4}A'_{i+3}}$, d'où le résultat.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Soit (Δ_0) la perpendiculaire à (AB) passant par A, C_0 et D_0 ses points d'intersection respectifs avec Γ_1 et Γ_2. Alors BC_0 et BD_0 sont les diamètres de ces cercles. D'autre part, on a $\widehat{BCD} = \widehat{BC_0D_0}$ et $\widehat{BDC} = \widehat{BD_0C_0}$ (attention, il faut distinguer des ces selon les positions de C et D sur le cercle), donc les triangles BCD et BC_0D_0 sont semblables. Finalement, $\frac{BC}{BD} = \frac{BC_0}{BD_0} = \frac{r_1}{r_2}$.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Les points M, I, J et C sont cocycliques, d'où $(IJ, IM) = (CJ, CM) = (CA, CM)$. De même $(IK, IM) = (BA, BM)$. Or les points I, J et K sont alignés ssi $(IJ, IK) = 0$, donc ssi $(CA, CM) = (BA, BM)$, ce qui équivaut à A, B, C, M cocycliques.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Soit H l'orthocentre de ABC. Soit $\widehat{A}\widehat{B}\widehat{C}$ le triangle tel que la droite $(\widehat{B}\widehat{C})$ soit perpendiculaire à (HA') en A', et qui vérifie les conditions analogues pour B' et C'.

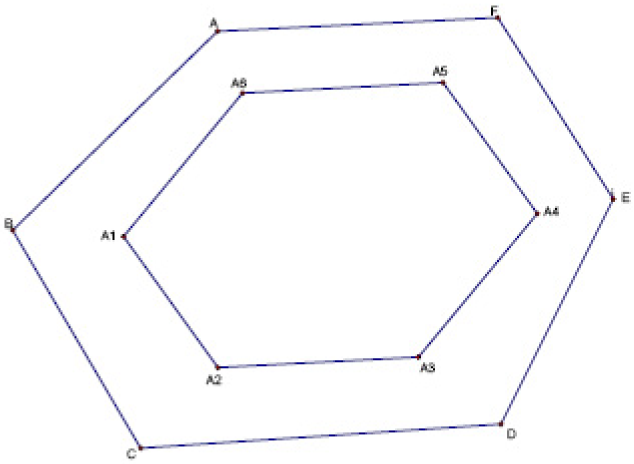


FIG. 2 – Exercice 2

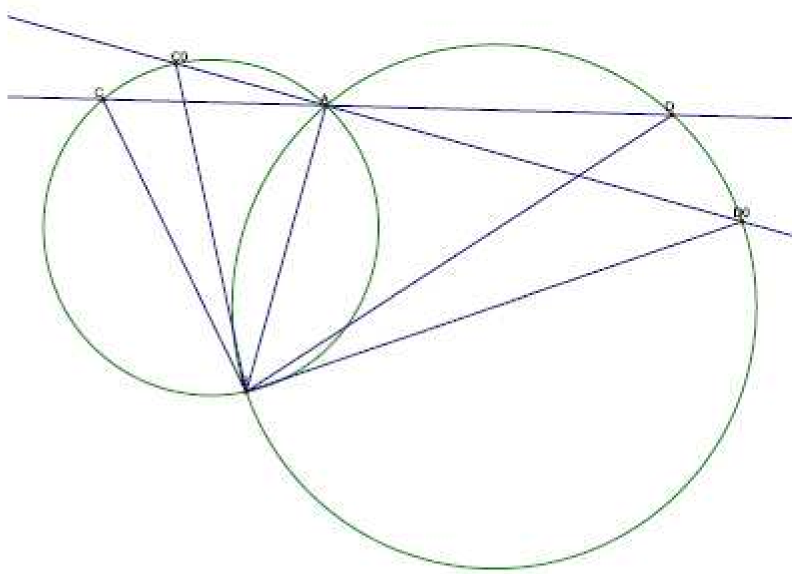


FIG. 3 – Exercice 3

La droite (BC) est parallèle à $(\widehat{B}\widehat{C})$; en notant $d(X, y)$ la distance d'un point X à une droite y, on a alors $d(A, (\widehat{B}\widehat{C})) = AA' = 2d(A, (BC))$. Soit G le centre de gravité du triangle ABC ; alors $d(G, (BC)) = \frac{1}{3}d(A, (BC))$, d'où $d(G, (\widehat{B}\widehat{C})) = 4d(G, (BC))$. On a la même chose pour les deux autres côtés, d'où on déduit que $\widehat{A}\widehat{B}\widehat{C}$ est l'image de ABC par l'homothétie de centre G et de rapport 4.

On note $\widehat{O}$ le centre du cercle circonscrit à $\widehat{A}\widehat{B}\widehat{C}$. Par définition, A', B' et C' sont les projetés de H sur les côtés de ce triangle, donc, par la droite de Simson, ils sont alignés ssi $\widehat{O}H = 4R$. Or $\widehat{O}$ est l'image de O par l'homothétie de centre G et de rapport 4 ; d'autre part, il est bien connu que les points O, G et H sont alignés dans cet ordre, avec $OH = 3OG$. Un rapide calcul montre

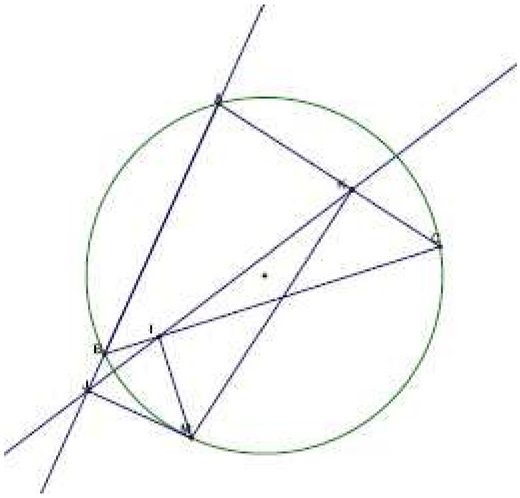


Fig. 4 – Exercice 4

alors $\widehat{O}H = 2OH$. Donc A', B' et C' sont alignés ssi $OH = 2R$.

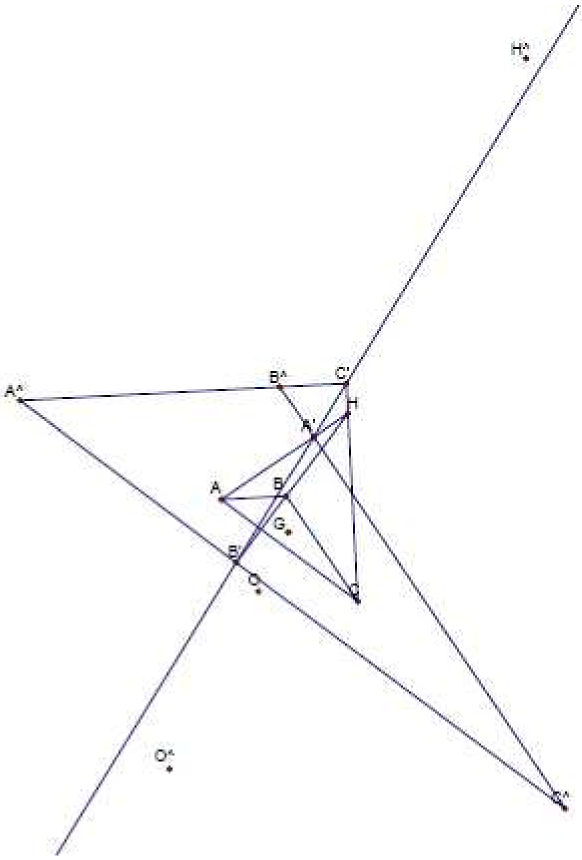


Fig. 5 – Exercice 5

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> Soit O' le centre du cercle circonscrit à $A'B'C'$. Une figure suggère de montrer que les points H et O' sont confondus (bien qu'on ne sache pas encore à quoi -cela peut

servir). Comme on a $\widehat{BHC} = \pi - \widehat{BAC} = \pi - \widehat{BA'C}$, les points B, H, C, A' sont cocycliques. De plus le rayon du cercle circonscrit à ces points est égal à celui du cercle circonscrit à ABC : en effet, le symétrique de H par rapport à (AB) se trouve sur ce deuxième cercle, donc les deux cercles sont symétriques par rapport à (BC). De même, les points A, H, B, C' sont cocycliques et le rayon du cercle passant par ces points est toujours le même. On en déduit $HA' = HC'$ (cf. l'exercice 3). On montre de même $HA' = HB'$, donc $H = O'$.

Montrer $OH = OH'$ revient à montrer que le triangle HOH' est isocèle en O. Soit P la projection de O sur HH', cela revient encore à montrer que P est le milieu de HH'. Les triangles ABC et $A'B'C'$ étant semblables, il existe une similitude s envoyant ABC sur $A'B'C'$. Soit k le rapport de s et α sont angle. On a $HP = HO\cos\alpha$ et $H'H = H'O' = kHO$. On cherche donc à montrer la relation $k = 2\cos\alpha$.

Pour montrer cette relation qui ne dépend que de la construction initiale des triangles, on va complètement oublier les points H, O, H' pour revenir aux seuls côtés des triangles. Soient A'' et C''' les projetés de A et C sur $A'C'$. L'angle entre les droites (AC) et $(A'C')$ valant α, on a $A''C''' = AC\cos\alpha$. Or on a $A'C' = kAC$, donc il suffit de montrer que $2A''C''' = A'C'$.

Soit B'' la seconde intersection du cercle circonscrit à ABC avec la droite $(A'C')$. Par cocyclicité des points A, B, C, B'' on a (voir sur la figure pour la position relative des points) la relation $\widehat{AB''C'} = \widehat{ACB} = \widehat{AC'B''}$, donc le triangle $AB''C'$ est isocèle en A. Par conséquent on a $A''C' = A''B''$ et on montre de même $C'''A' = C'''B''$. La relation recherchée s'obtient par somme de ces deux dernières égalités.

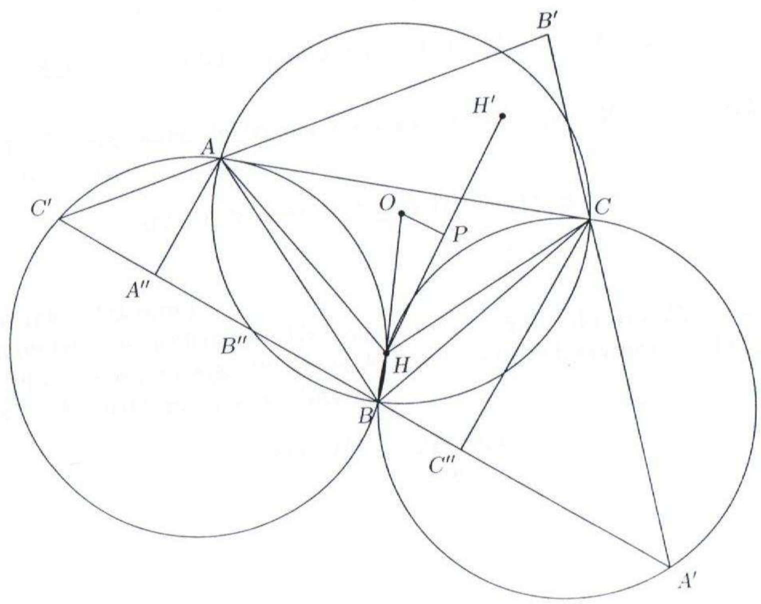


FIG. 6 – Exercice 6

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> On appelle Γ le cercle circonscrit à l'hexagone. Soit Γ' le cercle circonscrit au triangle CFI ; on note J (resp. K) le point d'intersection de (BC) (resp. (FE)) avec Γ'. On a alors $(BC, BE) = (FC, FE) = (FC, FK) = (JC, JK)$, d'où $(BE) /\!/ (JK)$. On montre d'une façon similaire $(AB) /\!/ (IJ)$ et $(ED) /\!/ (IK)$. Donc les triangles GBE et IJK sont semblables.

Le centre de la similitude qui envoie l'un sur l'autre appartient aux deux droites (BJ) et (EK) ; c'est donc le point H, et il appartient donc aussi à la droite (GI).

On remarque que l'énoncé est complètement projectif, sauf la condition sur $ABCDEF$. Le théorème est donc encore vrai si les sommets de l'hexagone se trouvent sur une conique quelconque : il suffit de la ramener sur un cercle par une transformation projective.

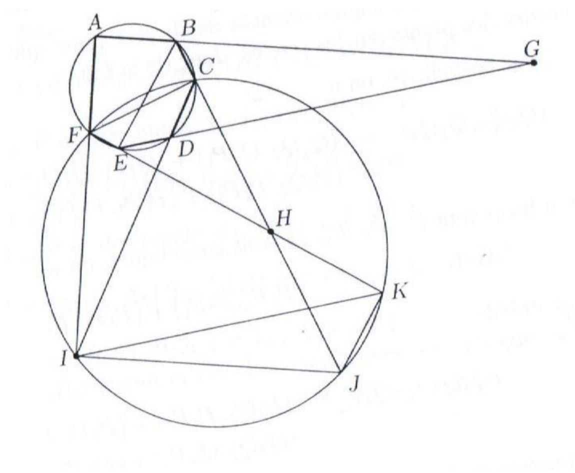


FIG. 7 – Exercice 7

Solution de l'exercice 8 Considérons l'ensemble des droites qui contiennent au moins 2, donc au moins 3 points de E. Comme par deux points distincts passe une et une seule droite, cet ensemble est fini. Il existe donc un point X et une droite (d) tel que la distance entre X et (d) soit minimale (parmi toutes les distances non nulles) ; on appelle I le projeté orthogonal de X sur (d). La droite (d) contient au moins trois points, il y en a donc au moins deux qui se trouvent du même côté par rapport à I (éventuellement en étant confondu avec I) : appelons-les A et B, de telle sorte que $B \in [AI]$. Alors $B \not\in (AX)$, mais il n'est pas difficile de vérifier que la distance de B à (AX) est strictement plus petite que la distance de X à (AB). On obtient donc une contradiction.

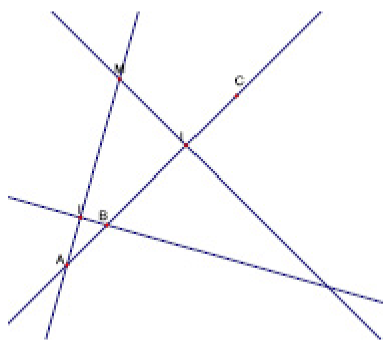


FIG. 8 – Exercice 8

6 Équations fonctionnelles

Les exercices qui suivent n'ont pas été posés en cours, mais nous les joignons ici pour que le lecteur puisse s'entraîner.

Énoncés

Exercice 1 Trouver toutes les $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ telles que $\forall m, n$:

$$f(f(m)^2 + 2f(n)^2) = m^2 + 2n^2.$$

Exercice 2 Trouver toutes les $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que f est continue et $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$f(f(z)) = exp(z).$$

Exercice 3 Trouver toutes les $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que f est monotone et $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x$:

$$f^n(x) = -x$$

Exercice 4 Trouver toutes les $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que $\forall (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$f(n) + f(m) | n + m$$

Exercice 5 Trouver toutes les $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ telles que $\forall\ x,\ y > 0$,

$$f(x)f(yf(x)) = f(x + y)$$

Exercice 6 Soient P et Q deux polynômes tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(Q(x)) = Q(P(x))$. Montrer que si $P(x) = Q(x)$ n'a pas de solutions, alors $P(P(x)) = Q(Q(x))$ n'a pas de solutions.

Exercice 7 Trouver $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que pour tout p premier et n naturel,

$$f(n)^p \equiv n[f(p)]$$

Exercice 8 Find all $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ such that $f(n + 1) > f(n)$ and

$$f(f(n)) = 3n$$

Exercice 9 Trouver toutes les $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ tels que $\forall\ m,\ n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(m^2 + f(n)) = f(m)^2 + n$$

Exercice 10 Trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R}_+^* \to [1, +\infty[$ telles que $\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+^*$,

$$\prod_{k=1}^n f(kx) < 2010n^{2010}$$

Exercice 11 Trouver toutes les $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que $\forall\ n \geq 1$,

$$(\text{i}) f(n) + f(n + 1) = f(n + 2)f(n + 3) - 11$$
$$(\text{ii}) f(n) \geq 2$$

Solutions

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> L'idée est d'écrire un nombre de la forme $a^2 + 2b^2$ de deux façons différentes pour obtenir une équation. On "remarque que" $(n+4)^2 + 2(n+1)^2 = n^2 + 2(n+3)^2$. Comme f est injective (évident), on obtient $f(n+4)^2 + 2f(n+1)^2 = f(n)^2 + 2f(n+3)^2$. Montrons par récurrence forte que $f(n) = n$. En effet on obtient facilement $f(1) = 1$ puis par récurrence, $f(n+4)^2 = n^2 + 2(n+3)^2 - 2(n+1)^2 = (n+4)^2$ donc $f(n+4) = n+4$.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> **Lemme** 1 : $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$.
Preuve : il est clair que $\mathbb{C}^* \subset f(\mathbb{C})$ car $exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$. Et si $f(0) = 0$ alors $0 = f(f(0)) = exp(0)$ impossible donc si $\exists c$ tel que $f(c) = 0$, $c \neq 0$ et alors $c = f(x)$ pour un certain x, donc $0 = f(c) = exp(x) \neq 0$ impossible.

Lemme 2 : $f(z + 2i\pi) = f(z)$.
Preuve : On a $f(f(f(z))) = f(exp(z)) = exp(f(z))$ et $exp(f(z+2i\pi)) = f(exp(z+2i\pi)) = f(exp(z)) = exp(f(z))$ donc il existe une fonction $k : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{Z}$ tel que $f(z+2i\Pi) = f(z) + 2i\pi k(z)$. Donc k est continue mais comme k prend des valeurs entières, k est constante, et on doit avoir $k = 0$, parce que sinon on peut trouver z tel que $f(z) = -2i\pi k(z)$ (par le lemme 1) et donc $f(z + 2i\pi) = 0$ contradiction par le lemme 1.

Maintenant, par le lemme 1 on peut trouver $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $f(a) = 2i\pi$ et $f(b) = 4i\pi$. Par le lemme 2 on peut supposer que $Im(a), Im(b) \in [0, 2\pi[$. Alors $exp(a) = f(f(a)) = f(f(b)) = exp(b)$ par le lemme2 (car $b = a + 2i\pi$). Donc $a - b \in 2i\pi\mathbb{Z}$ contradiction.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Nécessairement, n est impair (car f^2 est croissante car f monotone). Soit x fixé et $U_k = f^{2k}(x)$. Alors $U_{nk} = x$. Or si $g = f^2$, g croissante et $U_{k+1} = g(U_k)$ d'où U monotone donc U est constante et vaut x. D'où $f(f(x)) = x$. On écrit $n = 2k+1$. On a $f^n = f(f^{2k}) = f$. Donc la seule solution est $f(x) = -x$.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Pour $m = n$ on obtient que $f(n)$ divise n, et en particulier $f(n) \leq n$. Il y a une infinité de nombres premiers donc si n est un entier strictement positif, il existe $m > 0$ tel que $n + m = p$ et p premier. Or $f(m) + f(n)$ divise $m + n = p$ et $f(m) + f(n) \geq 1 + 1 = 2$ donc comme p est premier, $f(m) + f(n) = p$. Donc $f(n) = n - f(m) \geq n - m = n$ car $f(m) \leq m$. Donc $n \leq f(n) \leq n$ donc $f(n) = n$ et réciproquement l'identité est bien une solution.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Trouver toutes les $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ telles que $\forall\ x, y > 0$,

$f(x)f(yf(x)) = f(x+y)$Remarque préliminaire : $\frac{f(x+y)-f(x)}{y} = f(x)(\frac{(f(yf(x))-1}{y})$ donc en supposant f C^1 prolongeable en 0 et en faisant tendre y vers 0 on obtient $f'(x) = af(x)^2$ donc $f(x) = \frac{1}{1+ax}$, on peut donc conjecturer la forme des solutions.

Premièrement, on montrer que $\forall x$, $f(x) \leq 1$. En effet, si $f(x) > 1$ pour un x on prend y tel que $x + y = yf(x)$, i.e $y = \frac{x}{f(x)-1}$ (bien défini car $f(x) - 1 > 0$). D'où $f(x) = 1$, contradiction.

Conséquence : $f(x) \leq f(x+y)$ donc f décroissante.

Deuxièmement, si il existe x_0 tel que $f(x_0) = 1$, montrons que f est la fonction constante 1. En effet, en prenant $x = x_0$, on obtient f x_0 - périodique et décroissante, donc constante d'où le résultat.

Finalement, si $\forall x$, $f(x) < 1$, f est strictement décroissante (car $f(x) < f(x+y)$) donc a fortiori injective. Symétrisons le terme de droite : $y = \frac{z}{f(x)}$ d'où $f(x)f(z) = f(x + \frac{z}{f(x)}) = f(z + \frac{x}{f(z)})$ d'où le résultat par injectivité.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> Comme P et Q sont continues, par le théorème des valeurs intermédiaires on a $(\forall x, P(x) > Q(x))$ ou $(\forall x, P(x) < Q(x))$. Sans perte de généralité, $\forall x\ P(x) > Q(x)$. D'où : $\forall x,\ P(P(x)) > Q(P(x)) = P(Q(x)) > Q(Q(x))$ d'où le résultat.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> 3. Pour $n = p$ premier dans l'équation initiale, on obtient que $f(p)$ divise p donc $f(p) = p$ ou $f(p) = 1$. Soit A l'ensemble des p premiers tels que $f(p) = p$.

Si $A = \emptyset$, alors réciproquement toute fonction valant 1 en les nombres premiers est clairement solution.

Sinon, si $A \neq \emptyset$, distinguons deux cas : $A = \{2\}$ et $A \neq \{2\}$.

Si $A \neq \{2\}$, soit $p \in A$ et supposons par l'absurde que A est fini. Alors à partir d'un certain rang tous les nombres premiers q vérifient $f(q) = 1$. On sait que $\forall n$, $\forall p \in A$, $f(n)^p \equiv n[p]$ donc par le petit théorème de Fermat, p divise $f(n) - n$. En particulier pour $n = q$ premier assez grand, on a p divise $q - f(q) = q - 1$. Donc tous les premiers à partir d'un certain rang sont congru à 1 modulo p, ce qui n'est pas possible. (Immédiat par le théorème de Dirichlet, mais on peut s'en passer). En effet soit B l'ensemble des nombres premiers non congrus à 1 modulo p. Il suffit de montrer que B es infini. Déjà, B est non vide (en effet si tous les diviseurs premiers de $p - 1 > 1$ étaient congrus à 1 modulo p on aurait $p - 1 \equiv 1[p]$ impossible). Supposons B fini : $B = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$. Alors considérons $N = p \times p_1 p_2 ... p_n - 1 \equiv -1[p]$. Il existe un diviseur premier q de N non congru à 1 modulo p (comme pour la non vacuité de B). Mais alors $q = p_i$ pour un i, impossible car p_i est premier avec N. D'où une contradiction, donc B infini, d'où A infini. Or on a vu que $\forall p \in A$, p divise $f(n) - n$ donc $f(n) - n = 0$ donc $f(n) = n$ qui est réciproquement une solution.

Si $A = \{2\}$, la seule condition qu'on doit avoir sur f est que $f(n)$ et n ont même parité, et que $\forall p > 2$ (p premier) $f(p) = 1$, et réciproquement de telles f vérifient bien l'équation car 1 et p ont la même parité pour $p > 2$ premier.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que $f(n+1) > f(n)$ et

$$f(f(n)) = 3n$$

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> Premièrement, f est injective : $f(a) = f(b) \Longrightarrow f(m^2 + f(a)) = f(m^2 + f(b)) \Longrightarrow f(m)^2 + a = f(m)^2 + b \Longrightarrow a = b$.

Ensuite, on pose $n = f(a) + b^2$ dans l'équation initiale, et il vient : $f(m^2 + f(b)^2 + a) = f(m)^2 + f(a) + b^2$. On symétrise le membre de droite : on pose $b = f(c)$ et il vient $f(m^2 + f(f(c))^2 + a) = f(m)^2 + f(a) + f(c)^2 = f(c^2 + f(f(m))^2 + a)$ donc par injectivité $f(f(m))^2 = m^2 + k$ où $k \in \mathbb{Z}$ constante. Cela implique que pour tout m, $m^2 + k$ est un carré, donc $k = 0$. Donc $f(f(n)) = n$.

Enfin, on a $f(n+1) = f(f(f(n)) + 1^2) = f(n) + f(1)^2 = n + a$ où $a = f(1)^2$. Donc f est affine et réciproquement on obtient $f = Id$.

<u>*Solution de l'exercice 10*</u> Montrons que f est la fonction constante 1. En effet supposons qu'il existe $a > 0$ tel que $f(a) > 1$. Alors pour u assez proche de 1, $ua \leq x \leq a \Longrightarrow f(x) > c > 1$ où c est une constante (telle que $f(a) > c > 1$). On prend dans l'inégalité initiale $x = \frac{a}{n}$. Alors pour k tel que $kx > ua$, i.e $k \geq nu$, on a $f(kx) > c$ donc $\prod_{k=1}^{n} f(kx) \geq c^{n-[nu]} > 2010n^{2010}$ pour n assez grand, contradiction.

<u>*Solution de l'exercice 11*</u> Montrons que pour tout $n \geq 1$, $f(n+2) = f(n)$. En effet, en écrivant l'équation fonctionnelle au rang n et au rang $n+1$, on obtient en faisant la différence des deux

équations : $f(n+2)-f(n) = f(n+3)(f(n+4)-f(n+2))$. Soit $g(n) = \|f(n+2)-f(n)\|$: $g(n) = f(n+3)f(n+3+2)...f(n+3+2(k-1))g(n+2k)$. Si les $g(n+2k)$ sont non nuls, alors comme $f(i) \geq 2$, $g(n)$ n'est pas défini (tend vers l'infini en fait), impossible. Donc $g(n) = 0$ donc $f(n+2) = f(n)$. On pose $f(1) = a$, $f(2) = b$, donc $f(3) = f(1) = a$, et on a : $a+b = ab-11$. D'où $(a-1)(b-1) = 12$ donc $(a,b) \in \{(13,2),(7,3),(5,4),(2,13),(3,7),(4,5)\}$.

3 Exercices du jour

1 Énoncés

Jeudi 19 août

Exercice 1 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que pour tout m et tout n, entiers strictement positifs,

$f(m^2 + f(n)) = f(m)^2 + n.$

Exercice 2 Soit B un point situé sur un segment $[AC]$, E et F respectivement deux points tels que les triangles AEB et BFC soient isocèles en E et F respectivement, M le milieu de $[EF]$. Montrer que si $AM = CM$, alors B est le milieu de $[AC]$.

Vendredi 20 août

Exercice 3 On choisit $n+2$ entiers entre 1 et $2n$. Montrez qu'on peut en prendre trois tels que l'un soit la somme des deux autres.

Exercice 4 L'ensemble $S = \{2, 5, 13\}$ a une propriété amusante : si on prend deux distincts x et y, alors le nombre $(xy-1)$ est un carré parfait. Montrez que si on ajoute n'importe quel entier n à cet ensemble, alors la propriété n'est plus verifiée.

Samedi 21 août

Exercice 5 De combien de façon peut on colorier les faces d'un tétraèdre avec $n \geq 1$ couleurs, chaque face étant coloriée d'une seule couleur ?

Exercice 6 Trouver toutes les $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ telles que $\forall\ x,\ y > 0$,

$$f(x)f(yf(x)) = f(x+y)$$

Dimanche 22 août

Exercice 7 Soit p un nombre premier, qu'on écrit $p = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_0}$ en base 10. Soit P le polynôme $P(x) = a_x x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Lundi 23 août

Exercice 8 Montrer que les nombres $1, 2, ..., 2008$ peuvent être coloriés de 4 couleurs différentes de sorte que aucune progression arithmétique de 10 termes ne contienne que des nombres d'une seule couleur.

2 Solutions

Jeudi 19 août

Solution de l'exercice 1 Premièrement, f est injective : $f(a) = f(b) \Longrightarrow f(m^2 + f(a)) = f(m^2 + f(b)) \Longrightarrow f(m)^2 + a = f(m)^2 + b \Longrightarrow a = b$.

Ensuite, on pose $n = f(a)+b^2$ dans l'équation initiale, et il vient : $f(m^2+f(b)^2+a) = f(m)^2+f(a)+b^2$. On symétrise le membre de droite : on pose $b = f(c)$ et il vient $f(m^2 + f(f(c))^2 + a) = f(m)^2 + f(a) + f(c)^2 = f(c^2 + f(f(m))^2 + a)$ donc par injectivité $f(f(m))^2 = m^2 + k$ où $k \in \mathbb{Z}$ constante. Cela implique que pour tout m, $m^2 + k$ est un carré, donc $k = 0$. Donc $f(f(n)) = n$.

Enfin, on a $f(n + 1) = f(f(f(n)) + 1^2) = f(n) + f(1)^2 = n + a$ où $a = f(1)^2$. Donc f est affine et réciproquement on obtient $f = Id$.

Solution de l'exercice 2 Soient E', F' et M' les projetés orthogonaux respectifs de E, F et M sur la droite (AC) ; ce sont alors les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$ et $[E'F']$. La condition $AM = CM$ se traduit également par $AM' = M'C$. Or, algébriquement, on a $AM' = AE' + E'M' = AE' + \frac{1}{2}E'F' = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}(E'B + BF') = \frac{3AB+BC}{4}$, et de même $M'B = \frac{AB+3BC}{4}$. On en déduit $AB = BC$.

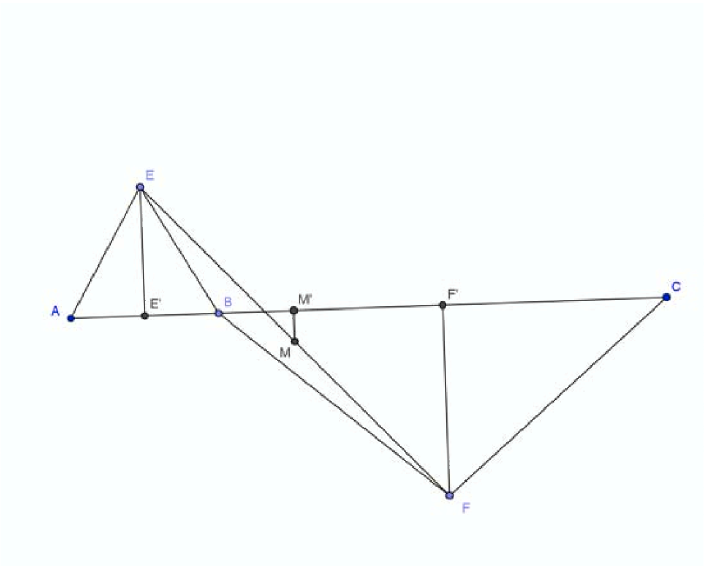


FIG. 9 – Exercice du jeudi 19 août.

Vendredi 20 août

Solution de l'exercice 3 Montrons ce résultat par récurrence. Pour $n = 2$ il faut choisir 4 entiers entre 1 et 4. Ça ne fait pas beaucoup de choix, il faut tous les prendre, et on a par exemple le triplet $(1, 2, 3)$ qui vérifie la condition.

Maintenant choisissons $n + 3$ entiers entre 1 et $2n + 2$. S'il y en a $n + 2$ ou plus qui sont inférieurs à $2n$, alors par l'hypothèse de récurrence on peut trouver parmi ceux-là 3 qui vérifient que l'un est la somme des deux autres. S'il y a seulement $n+1$ entre 1 et $2n$, cela signifie que les entiers $2n+1$ et $2n+2$ ont tous les deux été choisis. C'est surtout $2n+1$ qui va nous intéresser. On regroupe les $2n$ premiers entiers par couples dont la somme fait $2n+1$, on obtient n couples. Comme on pioche $n+1$ entiers inférieurs à $2n$, par le principe des tiroirs il y a un couple dont les deux membres ont été piochés. Ces deux membres avec $2n + 1$ constituent un triplet adéquat.

Solution de l'exercice 4 Par l'absurde, supposons qu'il existe un entier n qui conserve la propriété. Notons

$$x^2 = 2n - 1,\ y^2 = 5n - 1,\ z^2 = 13n - 1$$

Nous allons nous intéresser aux parités de tout ce petit monde : x est clairement impair. Ensuite, $2n = x^2 + 1$ est congru à 2 modulo 4, donc n est aussi impair. Donc y et z sont pairs tous les deux. On peut donc écrire $y = 2y_1$ et $z = 2z_1$. Finalement,

$$z_1^2 - y_1^2 = \frac{z^2 - y^2}{4} = 2n = x^2 + 1 \equiv 2\ (mod 4)$$

Il est impossible d'avoir une différence de carrés qui soit congrue à 2 mod 4, on a la contradiction souhaitée.

Samedi 21 août

Solution de l'exercice 5 Voir exercice 7 du TD de combinatoire

Solution de l'exercice 6 Remarque préliminaire : $\frac{f(x+y)-f(x)}{y} = f(x)(\frac{(f(yf(x))-1}{y})$ donc en supposant f C^1 prolongeable en 0 et en faisant tendre y vers 0 on obtient $f'(x) = af(x)^2$ donc $f(x) = \frac{1}{1+ax}$, on peut donc conjecturer la forme des solutions.

Premièrement, on montrer que $\forall x$, $f(x) \leq 1$. En effet, si $f(x) > 1$ pour un x on prend y tel que $x + y = yf(x)$, i.e $y = \frac{x}{f(x)-1}$ (bien défini car $f(x) - 1 > 0$). D'où $f(x) = 1$, contradiction. Conséquence : $f(x) \leq f(x + y)$ donc f décroissante.

Deuxièmement, si il existe x_0 tel que $f(x_0) = 1$, montrons que f est la fonction constante 1. En effet, en prenant $x = x_0$, on obtient f x_0 - périodique et décroissante, donc constante d'où le résultat.

Finalement, si $\forall x$, $f(x) < 1$, f est strictement décroissante (car $f(x) < f(x+y)$) donc a fortiori injective. Symétrisons le terme de droite : $y = \frac{z}{f(x)}$ d'où $f(x)f(z) = f(x + \frac{z}{f(x)}) = f(z + \frac{x}{f(z)})$ d'où le résultat par injectivité.

Dimanche 22 août

Solution de l'exercice 7 On va montrer l'énoncé plus généralement pour une base $b \geq 3$.

Lemme 3.1. Soit α une racine de $a_0+a_1X+a_2X^2+...+a_nX^n = 0$ avec $a_0+a_1b+a_2b^2+...+a_nb^n = a$ l'écriture en base b d'un entier naturel a premier alors $Re(\alpha) < \frac{1+\sqrt{4b-3}}{2}$.

Démonstration. Supposons par l'absurde que $Re(\alpha) \geq \frac{1+\sqrt{4b-3}}{2}$ alors $|\alpha| \geq Re(\alpha) > 1$. D'autre part :

$$|\alpha + \frac{a_{n-1}}{a_n}| = \frac{1}{|\alpha|} \times |\frac{a_{n-2}}{a_n} + \frac{a_{n-3}}{a_n}.\frac{1}{\alpha} + ... + \frac{a_1}{a_n} \times \frac{1}{\alpha^{n-3}} + \frac{a_0}{a_n} \times \frac{1}{\alpha^{n-2}}|.$$

Or pour tout indice i , $0 \leq \frac{a_i}{a_n} \leq b-1$ et $\frac{1}{|\alpha|-1} < \frac{2}{\sqrt{4b-3}-1}$. On en déduit :

$$|\alpha + \frac{a_{n-1}}{a_n}| < \frac{b-1}{|\alpha|} \times (1 + \frac{1}{|\alpha|} + \frac{1}{|\alpha|^2} ... + \frac{1}{|\alpha|^{n-2}} + ...) < \frac{b-1}{|\alpha|-1} < \frac{2(b-1)}{\sqrt{4b-3}-1}.$$

Mais, d'autre part :

$$|\alpha + \frac{a_{n-1}}{a_n}| \geq Re(\alpha + \frac{a_{n-1}}{a_n}) \geq Re(\alpha) \geq \frac{1+\sqrt{4b-3}}{2}.$$

Donc $\dfrac{1+\sqrt{4b-3}}{2} < \dfrac{2(b-1)}{\sqrt{4b-3}-1}$ soit $4b-4 < 4b-4$; contradiction. □

Maintenant, on suppose par l'absurde que $P = QR$ où Q et R à coefficients entiers (en effet, comme vu en cours, un polynôme à coefficients entiers est irréductible dans $\mathbb{Q}$ si, et seulement si, il est irréductible dans$\mathbb{Z}$). Comme $P(10) = Q(10)R(10)$ et que $P(10)$ est premier, sans perte de généralité, $\|Q(10)\| = 1$. Soit α une racine de Q. Par le lemme $Re(\alpha) < \frac{1+\sqrt{4b-3}}{2}$ donc $b - Re(\alpha) > 1$ donc $Re(b-\alpha) > 1$ donc a fortiori $\|b-\alpha\| > 1$ donc $\|Q(10)\| > 1$.

Lundi 23 août

Solution de l'exercice 8 Nous allons montrer qu'il existe strictement plus de coloriages que de coloriages contenant une progression arithmétique de 10 termes de même couleur. L'existence d'un coloriage tel que aucune progression arithmétique de 10 termes ne contienne que des nombres d'une seule couleur sera alors claire.

Il y a 4^{2008} coloriages avec 4 couleurs. Notons A le nombre de progressions arithmétiques de 10 termes dans $\{1, 2, ..., 2008\}$. Le nombre de coloriages contenant une progression arithmétique de 10 termes est donc inférieur à $4.A.4^{2008-10}$. Il suffit donc de montrer que $A < 4^9$. Comptons le nombre de progressions arithmétiques de 10 termes qui commence par k, cela correspond à choisir la raison de cette suite et il y a exactement $\lfloor \frac{2008-k}{9} \rfloor$ choix possibles. On a donc :

$$A = \sum_{k=1}^{2008} \lfloor \frac{2008-7}{9} \rfloor < \frac{2007+2006+...+9}{9} = \frac{2007.2008}{2.9} < \frac{(2^{11})^2}{2.2^3} = 4^9$$

On a donc démontré le résultat.

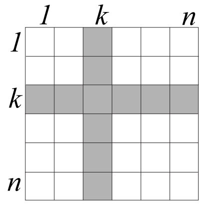
4 Tests

1 Test de Combinatoire et Polynômes (3h)

Énoncés

Exercice 1 On considère un tableau carré de taille $n \times n$.

On veut remplir ce tableau avec les entiers 1 à $2n-1$ de sorte que pour tout entier k compris entre 1 et n, dans la croix formée par la réunion de la k-ième ligne et de la k-ième colonne (voir dessin ci-contre), il n'apparaisse pas deux fois le même nombre.



Prouver que ceci est possible lorsque n est une puissance de 2.

Exercice 2 Trouver tous les polynômes $P(x)$ à coefficients réels tels que pour tout réel x on ait :

$$(x-16)P(2x) = 16(x-1)P(x).$$

Exercice 3 On considère un rectangle $M \times N$ (avec M lignes et N colonnes) subdivisé en MN carrés identiques avec $N > M$. On place des étoiles dans certains de ces carrés et on suppose que chaque ligne et chaque colonne contient au moins une étoile. Montrer qu'il existe un carré contenant une étoile tel que le nombre d'étoiles sur sa ligne est strictement plus grand que le nombre d'étoiles sur sa colonne.

Exercice 4 Soit n un entier strictement positif. Notons $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des bijections de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ sur lui-même. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$; on dit que (i, j) (pour $1 \leq i, j \leq n$) est une inversion de σ si $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$. On dit aussi que i (pour $1 \leq i \leq n$) est un record de σ si pour tout j avec $1 \leq j \leq i-1$ on a $\sigma(j) < \sigma(i)$ (ainsi, 1 est toujours un record). Finalement, notons $\mathrm{inv}(\sigma)$ le nombre d'inversions de σ et $\mathrm{rec}(\sigma)$ son nombre de records.

Calculer la somme suivante :

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} 2^{\mathrm{inv}(\sigma)+\mathrm{rec}(\sigma)}.$$

Solutions

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Cet exercice est commun avec les débutants, allez voir le corrigé là-bas.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Commençons d'abord par chercher des racines évidentes. En considérant $x = 1$ on a

$$-15 \cdot P(2) = 16 \cdot 0 \cdot P(1) = 0$$

donc $P(2) = 0$. En faisant la même chose avec successivement $x = 2, 4$ et 8 :

$$-14 \cdot P(4) = 16 \cdot 1 \cdot P(2) = 0 \quad \text{donc} \quad P(4) = 0$$

$$-12 \cdot P(8) = 16 \cdot 3 \cdot P(4) = 0 \quad \text{donc} \quad P(8) = 0$$
$$-8 \cdot P(16) = 16 \cdot 7 \cdot P(8) = 0 \quad \text{donc} \quad P(16) = 0$$

Nous voila donc avec 4 racines, $P(x)$ est donc divisible par $(x-2)(x-4)(x-8)(x-16)$.

Ensuite considérons le coefficient dominant $a_n x^n$ de $P(x)$. En regardant les coefficients dominant de chaque côté de l'égalité on obtient $a_n 2^n x^{n+1} = 16 a_n x^{n+1}$. Il y a deux possibilités : soit $a_n = 0$ et P est le polynôme nul, soit $a_n \neq 0$ et alors $n = 4$. Comme on a déjà 4 racines pour P, on a toutes les solutions :

$$P(x) = \lambda(x-2)(x-4)(x-8)(x-16) \quad \text{avec } \lambda \text{ un reel}$$

Pour finir la preuve, il faut montrer que toutes ces solutions vérifient l'équation, ce qui n'est pas très dur.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Raisonnons par l'absurde. Si on numérote toutes les cases étoilées $E_1, E_2, \ldots, E_p$ et que pour chaque case E_i on note c_i le nombre de cases étoilées dans sa colonne et l_i dans sa ligne. Supposons que pour tout i, $c_i \geq l_i$. On va considérer les deux sommes

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{c_i} \leq \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{l_i}$$

Étudions la première somme :

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{c_i} = \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{E_i \in k^e \text{ colonne}} \frac{1}{c_i} \right)$$

et pour toutes les cases sur la k^e colonne, c_i = nombre d'étoiles sur la k^e colonne. Donc $\sum_{E_i \in k^e \text{ colonne}} \frac{1}{c_i} = 1$. Et comme chaque colonne contient au moins une étoile,

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{c_i} = N$$

On fait de même pour la somme avec les $\frac{1}{l_i}$ et

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{c_i} = N > M = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{l_i}$$

ce qui contredit notre hypothèse et achève notre raisonnement par l'absurde. Il existe donc un i tel que $l_i > c_i$.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> On va calculer cette somme par recurrence. Commençons par construire une correspondance entre $\mathfrak{S}_{n+1}$ et $\mathfrak{S}_n \times \{1, \ldots, n+1\}$. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$, on note $k = \sigma(1)$ l'image de 1 et on regarde σ' la permutation de $\{1, \ldots, n\}$ obtenue en enlevant 1 et son image. Plus rigoureusement :

$$\sigma'(i) = \begin{cases} \sigma(i+1) & \text{si } \sigma(i+1) < k \\ \sigma(i+1) - 1 & \text{si } \sigma(i+1) > k \end{cases}$$

Je vous laisse le loisir de montrer que l'on obtient bien un permutation et que la correspondance est bijective. Ensuite il faut exprimer le nombre d'inversions et de records de σ en fonction de k et σ'. Vérifiez que :

- si $k=1$, alors σ a 1 record de plus que σ' (celui en 1) et le même nombre d'inversions.
- si $k>1$, alors σ a $k-1$ inversions de plus que σ', toutes celles en prenant 1 et j avec $\sigma(j)<k$, et le même nombre de records. D'où :

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n+1}} 2^{inv(\sigma)+rec(\sigma)} &= \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_n} 2^{inv(\sigma)+rec(\sigma)} \\
&= \sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_n}\left(2^{inv(\sigma')+(rec(\sigma')+1)}\sum_{k=2}^{n+1}2^{(inv(\sigma')+k-1)+rec(\sigma')}\right) \\
&= (2+2+2^2+2^3+\cdots+2^n)\cdot\left(\sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_n}2^{inv(\sigma')+rec(\sigma')}\right) \\
&= 2^{n+1}\left(\sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_n}\right)2^{inv(\sigma')+rec(\sigma')}
\end{aligned}$$

On a enfin réussi à obtenir notre formule de récurrence. Ensuite on calcule la somme pour $n=1$ et on trouve 2. Il est facile de montrer que la somme finale vaut $2^{1+2+\cdots+(n+1)}$.

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} 2^{inv(\sigma)+rec(\sigma)} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

2 Test d'arithmétique et d'inégalités (3h)

Énoncés

Exercice 1 Montrer que pour tout a, b, $c>0$ tels que $abc=1$ on a :

$$(a^2+1)(b^3+2)(c^6+5)\geq 36.$$

Exercice 2 Existe-t-il un sous-ensemble infini A de $\mathbb{N}$ qui vérifie la propriété suivante : toute somme finie d'éléments distincts de A n'est jamais une puissance d'un entier (c'est-à-dire un entier de la forme a^b avec a et b entiers supérieurs ou égaux à 2) ?

Exercice 3 Trouver toutes les fonctions $f:\{1,2,3,\ldots\}\to\{1,2,3,\ldots\}$ telles que pour tout nombre premier p et tout entier strictement positif n on ait :

$$f(n)^p\equiv n \quad \text{modulo } f(p).$$

Exercice 4 Trouver tous les nombres réels strictement positifs c tels pour tous réels positifs x,y,z on ait :

$$\frac{x^4}{(y^2+1)(z^2+1)}+\frac{y^4}{(x^2+1)(z^2+1)}+\frac{z^4}{(x^2+1)(y^2+1)}+\frac{6}{1+c(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+z\sqrt{z})^{4/3}}>3.$$

Solutions

Solution de l'exercice 1 On a par l'IAG : $a^2 + 1 \geq 2a$, $b^3 + 2 = b^3 + 1 + 1 \geq 3b$ et $c^6 + 5 = c^6 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \geq 6c$ donc $(a^2 + 1)(b^3 + 2)(c^6 + 5) \geq 36abc = 36$.

Solution de l'exercice 2 La réponse est oui. Construisons un tel ensemble. On considère (p_i) la suite des nombres premiers. On pose $q_i = \frac{\prod_{k=0}^{i} p_k^2}{p_i}$. Alors l'ensemble des q_i est une solution au problème : $\displaystyle\sum_{i\in I} q_i$ est divisible par $p_{min\,I}$ et pas par $(p_{min\,I})^2$.

Solution de l'exercice 3 Pour $n = p$ premier dans l'équation initiale, on obtient que $f(p)$ divise p donc $f(p) = p$ ou $f(p) = 1$. Soit A l'ensemble des p premiers tels que $f(p) = p$.

Si $A = \emptyset$, alors réciproquement toute fonction valant 1 en les nombres premiers est clairement solution.

Sinon, si $A \neq \emptyset$, distinguons deux cas : $A = \{2\}$ et $A \neq \{2\}$.

Si $A \neq \{2\}$, soit $p \in A$ et supposons par l'absurde que A est fini. Alors à partir d'un certain rang tous les nombres premiers q vérifient $f(q) = 1$. On sait que $\forall n$, $\forall p \in A$, $f(n)^p \equiv n[p]$ donc par le petit théorème de Fermat, p divise $f(n) - n$. En particulier pour $n = q$ premier assez grand, on a p divise $q - f(q) = q - 1$. Donc tous les premiers à partir d'un certain rang sont congru à 1 modulo p, ce qui n'est pas possible. En effet soit B l'ensemble des nombres premiers non congrus à 1 modulo p. Il suffit de montrer que B est infini. Déjà, B est non vide (en effet si tous les diviseurs premiers de $p - 1 > 1$ étaient congrus à 1 modulo p on aurait $p - 1 \equiv 1[p]$ impossible). Supposons B fini : $B = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$. Alors considérons $N = p \times p_1 p_2 ... p_n - 1 \equiv -1[p]$. Il existe un diviseur premier q de N non congru à 1 modulo p (comme pour la non vacuité de B). Mais alors $q = p_i$ pour un i, impossible car p_i est premier avec N. D'où une contradiction, donc B infini, d'où A infini. Or on a vu que $\forall p \in A$, p divise $f(n) - n$ donc $f(n) - n = 0$ donc $f(n) = n$ qui est réciproquement une solution.

Si $A = \{2\}$, la seule condition qu'on doit avoir sur f est que $f(n)$ et n ont même parité, et que $\forall p > 2$ (p premier) $f(p) = 1$, et réciproquement de telles f vérifient bien l'équation car 1 et p ont la même parité pour $p > 2$ premier.

Solution de l'exercice 4 Tout d'abord, lorsque l'on voit ce genre d'exercices où il faut déterminer une constante, c'est toujours une bonne idée de regarder les cas qui ont l'air extrêmes. Ici, il s'agit du cas $x = y = z$, certains exercices sont avec le cas $x > 0$, $y = z = 0$. Faute d'idée c'est une bonne stratégie de regarder ces deux cas. Je saute le cas $y = z = 0$, puisqu'ici il ne donne pas de bonne information. Passons au cas $x = y = z$, l'inégalité devient :

$$\frac{3x^4}{(x^2+1)^2} + \frac{6}{1 + 3^{4/3}cx^2} - 3 > 0$$

Pour alléger les notations je vais écrire $d = 3^{4/3}c$. On simplifie le terme de gauche par 3 et on met tout au même dénominateur :

$$\frac{x^4(dx^2+1) + 2(x^2+1)^2 - (x^2+1)^2(dx^2+1)}{(x^2+1)^2(dx^2+1)}$$

Le dénominateur est toujours positif et n'influe pas sur le signe de la fraction, on peut donc le laisser tomber et se concentrer sur le numérateur :

$$dx^6 + x^4 + 2x^4 + 4x^2 + 2 - (dx^6 + (2+d)x^4 + (2d)x^2 + 1) = (1-d)x^4 + (2-2d)x^2 + 1$$

On voit que si $d > 1$, alors le coefficient dominant est négatif, donc pour x suffisamment grand cette expression est négative, et si $d \leq 1$ (c-à-d $c \leq 3^{-4/3}$) alors l'expression est toujours strictement positive. À présent on a une bonne idée de la réponse, et une condition nécessaire.

Pour la suite, rappelons la notation suivante :

$$M(p) = \left(\frac{x^p + y^p + z^p}{3}\right)^{1/p}$$

la moyenne d'ordre p.

Passons à la condition suffisante. Plutôt que de manipuler le terme dégueulasse rempli de puissance 3/2 on se concentre sur les trois termes symétriques. On peut supposer que $x \geq y \geq z$ et on applique Tchebitcheff avec les deux suites $x^4 \geq y^4 \geq z^4$ et $\frac{1}{(y^2+1)(z^2+1)} \geq \frac{1}{(x^2+1)(z^2+1)} \geq \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)}$:

$$\begin{aligned}(*) &= \frac{x^4}{(y^2+1)(z^2+1)} + \frac{y^4}{(x^2+1)(z^2+1)} + \frac{z^4}{(x^2+1)(y^2+1)} \\ &\leq \frac{1}{3}(x^4+y^4+z^4)\left(\frac{1}{(y^2+1)(z^2+1)} + \frac{1}{(x^2+1)(z^2+1)} + \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)}\right)\end{aligned}$$

Commencons par le terme avec les fractions. Il est assez facile de tout mettre au même dénominateur, alors attelons-nous-y :

$$\frac{1}{(y^2+1)(z^2+1)} + \frac{1}{(x^2+1)(z^2+1)} + \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)} = \frac{3 + x^2 + y^2 + z^2}{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}.$$

On utilise ensuite l'inégalité arithmético-géométrique sur le dénominateur :

$$(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1) \leq \left(\frac{3 + x^2 + y^2 + z^2}{3}\right)^3 = (1 + M(2)^2)^3$$

L'un des termes $(1 + M(2)^2)$ se simplifie avec le numérateur et il reste

$$\frac{1}{(y^2+1)(z^2+1)} + \frac{1}{(x^2+1)(z^2+1)} + \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)} \geq \frac{3}{(1 + M(2)^2)^2}$$

On s'attaque ensuite à l'autre terme :

$$\frac{1}{3}(x^4 + y^4 + z^4) = M(4)^4 \geq M(2)^4$$

par l'inégalité des moyennes généralisée.

On peut maintenant regrouper les deux termes et on obtient :

$$(*) \geq \frac{3M(2)^4}{(M(2)^2+1)^2} = 3 - \frac{6}{(M(2)^2+1)} + \frac{1}{(M(2)+1)^2}$$

donc en passant $\frac{6}{(M(2)^2+1)}$ de l'autre côté, et utilisant $M(2) \geq M(3/2)$:

$$(*) + \frac{6}{(M(3/2)^2+1)} \geq (*) + \frac{6}{(M(2)^2+1)} > 3$$

et le terme le plus à gauche est le terme de l'énoncé avec $c = 3^{-4/3}$, on a donc la condition suffisante.

Enfin, comme le terme de gauche est décroissant en c, cela signifie que toutes les valeurs inférieures à $3^{-4/3}$ marchent aussi. La bonne réponse est :

$$c \in]0, 3^{-4/3}].$$

3 Test de Géométrie (4h)

Énoncés

Exercice 1 Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soient $E \in [AB]$, $F \in [BC]$, $G \in [CD]$, $H \in [DA]$ tels que $AE = DG$, $EB = GC$, $AH = BF$, $HD = FC$. Montrer que $(BH) \cap (DE)$, $(EG) \cap (FH)$ et C sont alignés.

Exercice 2 Soient $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ quatre cercles. On suppose que, pour $i = 1, 2, 3$ ou 4, Γ_i coupe Γ_{i+1} en deux points P_i et Q_i (en posant $\Gamma_5 = \Gamma_1$). Montrer que tous les P_i sont cocycliques ssi tous les Q_i sont cocycliques.

Exercice 3 Soit ABC un triangle. Soient $A' \in [BC]$ $B' \in [AC]$ et $C' \in [AB]$ tels que (AA') soit une bissectrice du triangle ABC et tels que les droites (AA'), (BB') et (CC') soient concourantes. Soient finalement $X = (BB') \cap (A'C')$ et $Y = (CC') \cap (A'B')$. Montrer que $\widehat{XAB} = \widehat{YAC}$.

Exercice 4 Soit ABC un triangle, H son orthocentre. Soit $M \in [AB]$, $N \in [AC]$. Les cercles de diamètres BN et CM se coupent en deux points distincts P et Q. Montrer que les points P, Q et H sont alignés.

Exercice 5 Les droites a, b, c, d forment un quadrilatère convexe $\mathcal{C}$. Pour $x, y \in \{a, b, c, d\}$ distincts, on note b_{xy} la bissectrice des droites x et y qui ne rencontre pas l'intérieur de $\mathcal{C}$. Montrer que $b_{ab} \cap b_{cd}$, $b_{ac} \cap b_{bd}$ et $b_{ad} \cap b_{bc}$ sont alignés.

Solutions

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> On se place dans le plan projectif. Les droites (AB), (HF) et (DC) sont parallèles : leur intersection est un point à l'infini qu'on appellera I_1. De même, les droites (AD), (EG) et (BC) sont parallèles : leur intersection est un autre point à l'infini qu'on appellera I_2. On applique alors le théorème de Pappus aux points E, B, I_1 d'un côté, et aux points H, D, I_2 de l'autre. On obtient que les points $(BH) \cap (DE)$, $(DI_1) \cap (BI_2)$ et $(EI_2) \cap (HI_1)$ sont alignés. Or $(DI_1) \cap (BI_2) = C$ et $(EI_2) \cap (HI_1) = (EG) \cap (FH)$, d'où le résultat.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> On travaille avec des angles orientés, de sorte que le raisonnement est valable quelle que soit la disposition précise des points sur la figure.

On suppose que les P_i sont cocycliques. On a alors :

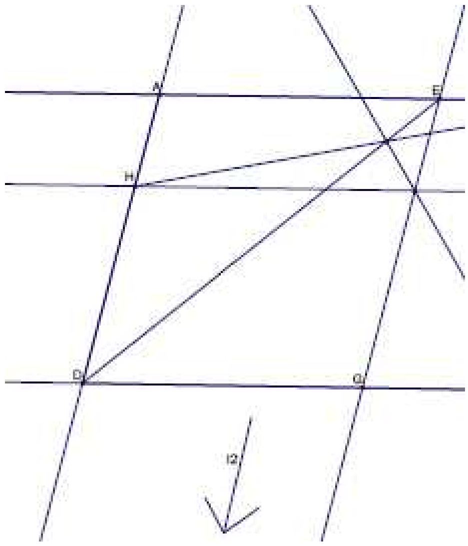


FIG. 10 – Exercice 1

$$\begin{aligned}
(Q_1Q_2, Q_1Q_4) &= (Q_1Q_2, Q_1P_1) + (Q_1P_1, Q_1Q_4) \\
&= (P_2Q_2, P_2P_1) + (P_4P_1, P_4Q_4) \\
&= (P_2Q_2, P_2P_3) + (P_2P_3, P_2P_1) + (P_4P_1, P_4P_3) + (P_4P_3, P_4Q_4) \\
&= (P_2Q_2, P_2P_3) + (P_4P_3, P_4Q_4) \\
&= (Q_3Q_2, Q_3P_3) + (Q_3P_3, Q_4Q_4) \\
&= (Q_3Q_2, Q_3Q_4)
\end{aligned}$$

Donc tous les Q_i sont cocycliques. On montre la réciproque de la même façon.

Solution de l'exercice 3 On appelle (Δ) la bissectrice extérieure passant par A, et Z le point d'intersection de (AA'), (BB') et (CC'). On effectue une transformation projective de toute la figure, de telle sorte que ABC devienne équilatéral et que Z se retrouve au centre. Les droites (Δ), (AB), (AA') et (AC) sont harmoniques avant la transformation, donc elles le sont encore après, et (Δ) reste la bissectrice extérieure. Par symétrie, on a alors clairement $\widehat{XAB} = \widehat{YAC}$, donc les droites (Δ), (AX), (AA') et (AY) sont harmoniques. Cela signifie qu'elles étaient déjà harmoniques avant la transformation, donc $\widehat{XAB} = \widehat{YAC}$ dans la figure d'origine.

Solution de l'exercice 4 Soient H_B et H_C les pieds des hauteurs issues respectivement de B et C, I_B et I_C les symétriques respectifs de H par rapport à ces deux points. Il est bien connu (une chasse aux angles élémentaires le montre) que I_B et I_C se trouvent sur le cercle circonscrit à ABC. D'autre part, comme $\widehat{MH_BB} = \frac{\pi}{2}$, H_B appartient au cercle de diamètre (BN), et de même pour H_C et (CM). On en déduit, en utilisant la puissance d'un point par rapport à un cercle :

$$HC \cdot HH_C = \frac{1}{2} HC \cdot HI_C = \frac{1}{2} HB \cdot HI_B = HB \cdot HH_B$$

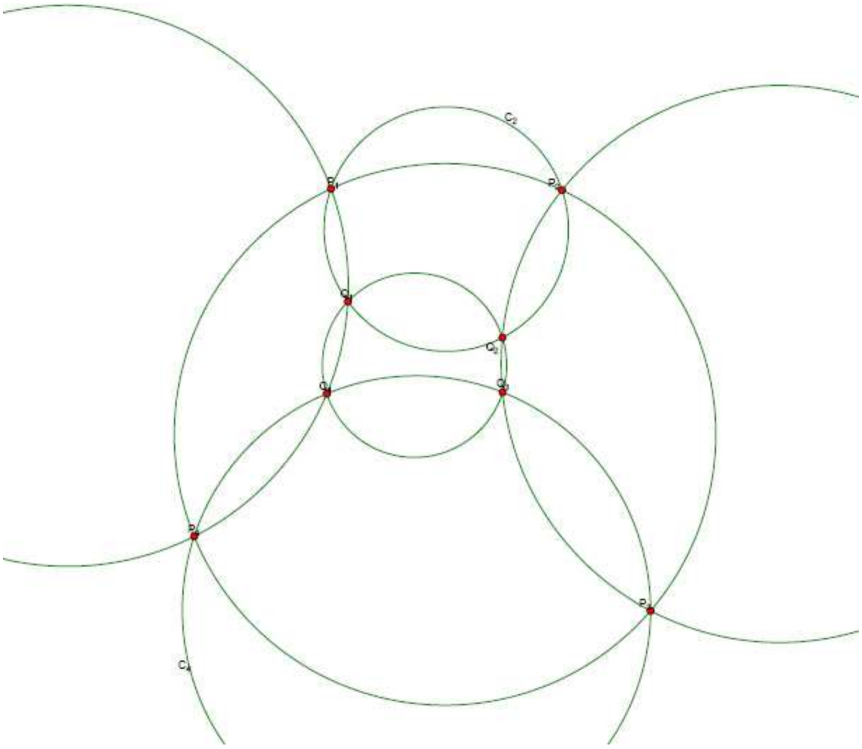


FIG. 11 – Exercice 2

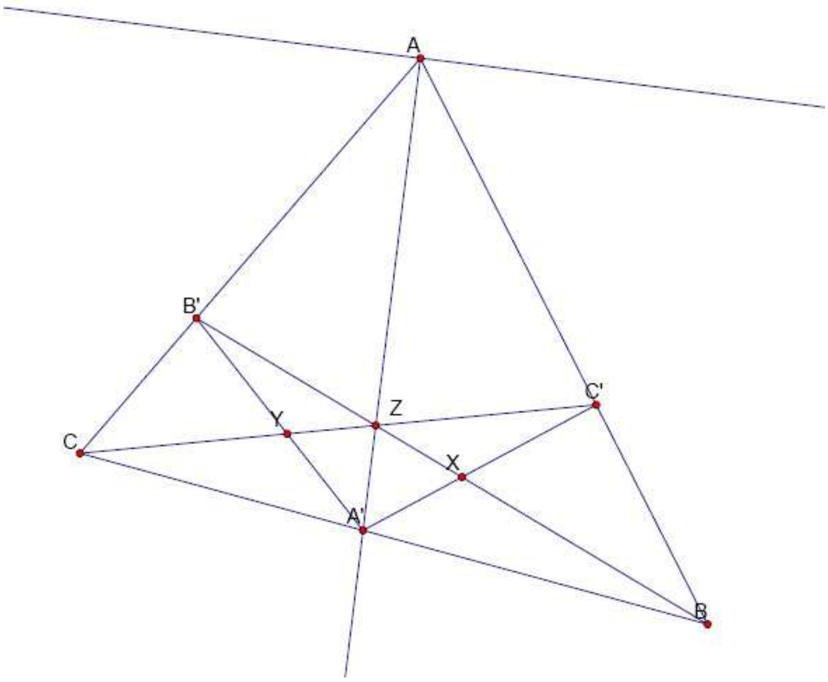


FIG. 12 – Exercice 3

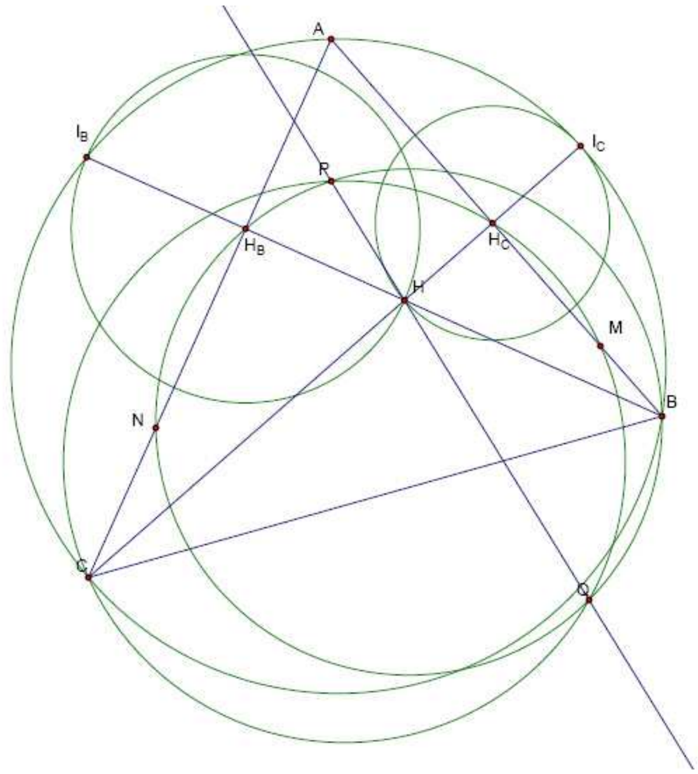


FIG. 13 – Exercice 4

Donc H appartient à l'axe radical des cercles de diamètres (BN) et (CM), soit $H \in (PQ)$.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u>

Épigraphe : « Quand tu ne sais pas résoudre un exercice de géométrie projective, demande à ton copain sorcier. »- Proverbe bas-saxon.

On va commencer par démontrer un résultat plus simple :

Lemme 4.1. Soit ABC un triangle, (b_A), (b_B) et (b_C) ses bissectrices extérieures, $A' = (b_A) \cap (BC)$, $B' = (b_B) \cap (AC)$, $C' = (b_C) \cap (AB)$. Alors ces trois points sont alignés.

Démonstration. En utilisant la loi des sinus, on montre facilement que $\frac{A'B}{A'C} = \frac{AB}{AC}$. De même, $\frac{B'A}{B'C} = \frac{AB}{BC}$ et $\frac{C'A}{C'B} = \frac{AC}{BC}$. On conclut par le théorème de Ménélaüs. □

Considérons alors le problème dual. Pour chaque $x \in a, b, c, d$, on note X le dual de x, et pour chaque x et y, on note M_{XY} le dual de b_{xy}. D'après le lemme, on sait que les points $b_{ab} \cap c$, $b_{bc} \cap a$ et $b_{ca} \cap b$ sont alignés, donc les droites $(M_{AB}C)$, $(M_{BC}A)$ et $(M_{CA}B)$ sont concourantes. On appelle M_{ABC} leur point d'intersection. On peut définir de même M_{ABD}, M_{ACD} et M_{BCD}.

Avec ses conditions, on peut alors choisir quatre coefficients w_A, w_B, w_C et w_D de telle sorte que pour tous X, Y et Z, M_{XY} soit le barycentre de X et Y avec les poids w_X et w_Y. En effet, on peut d'abord choisir w_A, w_B et w_C de sorte à avoir l'égalité pour M_{ABC} ; alors on aura aussi l'égalité pour M_{AB}, M_{AC} et M_{BC}. Comme $M_{ABD} \in (M_{AB}D)$, on peut ensuite choisir w_D de sorte à avoir l'égalité pour M_{ABD} ; un moment de réflexion convaincra le lecteur qu'on aura alors l'égalité pour tous les autres points.

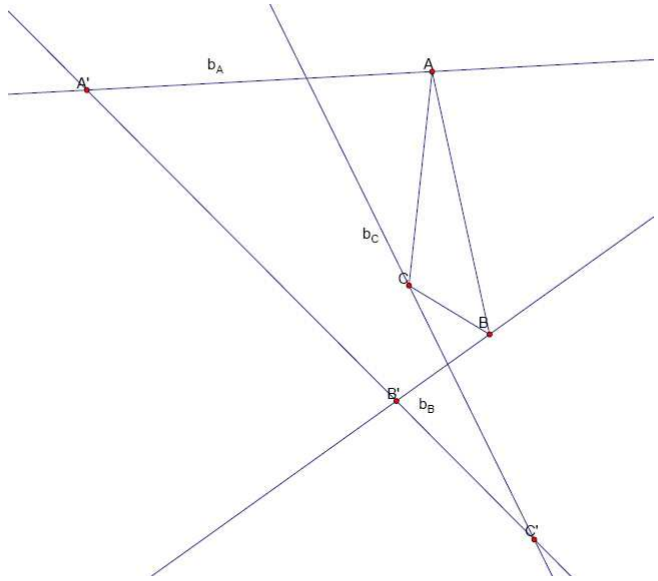


FIG. 14 – Lemme de l'exercice 5.

Soit alors M_{ABCD} le barycentre des quatre points avec les quatre poids. Alors les droites $(M_{AB}M_{CD})$, $(M_{AC}M_{BD})$ et $(M_{AD}M_{BC})$ passent toutes les trois par ce point, donc elles sont concourantes.

En repassant au dual, on obtient la conclusion.

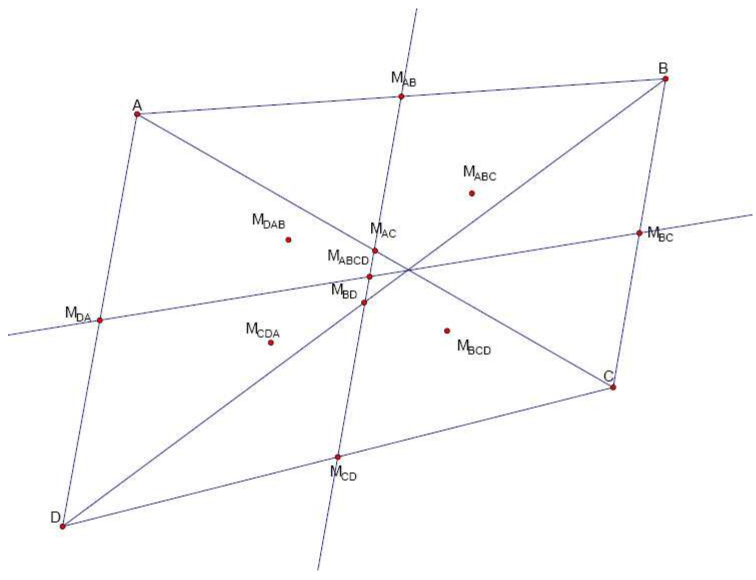


FIG. 15 – Exercice 5, dans le cas dégénéré où les 4 poids sont égaux.

VI. Conférence : Les polytopes réguliers en dimension quatre, par Ilia Smilga

Ceci est une transcription de l'exposé sur les polytopes réguliers convexes en dimension 4, que j'ai préparé en automne 2007 pour le Séminaire Mathématique des Elèves de Louis-le-Grand. Ce document ne se suffit pas à lui-même, il est prévu pour aller avec les transparents que j'ai également préparés - ils contiennent toutes les figures, et j'y renvoie constamment.

Ces transparents sont joints tout à la fin de ce polycopié.

Les transparents tous seuls ne suffisent pas non plus - ils ont souvent besoin d'explications, et il y a des choses que je mentionne à l'oral (et ici) qui n'ont aucune trace sur les transparents. Mais il y a nécessairement beaucoup de redondance entre les deux. J'ai essayé de transcrire le plus fidèlement possible ce que j'ai dit au tableau, mais j'ai sans doute détaillé un peu plus sur le papier. Pour le lecteur qui voudrait découvrir ce sujet sans avoir assisté à l'exposé, je conseillerais de parcourir les transparents, et en parallèle, de lire ce texte en diagonale, en s'attardant uniquement sur les explications qui lui paraîtraient nécessaires ou les digressions qui n'apparaîtraient pas dans les transparents.

Vous êtes sans doute familiers avec les cinq solides platoniciens : le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre. Ce sont ce qu'on appelle les polytopes réguliers convexes en trois dimensions. Je vais vous parler aujourd'hui des polytopes réguliers convexes en quatre dimensions. Je vais commencer par un rappel sur les solides platoniciens, puis définir proprement tout ce dont je vais parler par la suite, et enfin vous décrire les objets que j'ai promis.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

On appelle *polyèdre régulier* un solide délimité par plusieurs faces, en forme de polygones réguliers, toutes égales, et tel que tous ses sommets sont entourés de la même façon. En d'autres termes, il faut que chaque face soit un p-gone et que chaque sommet soit entouré par q. D'autre part, étant donné p et q, si le polyèdre correspondant existe, alors il est uniquement déterminé par ces valeurs. On le note alors $\{p\ q\}$: c'est ce qu'on appelle le *symbole de Schläfli* du polyèdre.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Pour que le polyèdre $\{p\ q\}$ existe, il faut que la somme des angles de tous les angles qui bordent un sommet soit strictement inférieure à un tour complet. D'autre part, on a les contraintes $p \geq 3$ (un "digone" n'existe pas), et $q \geq 3$ (si on essaye de mettre deux faces autour d'un sommet, les deux se retrouvent confondues). On peut donc énumérer toutes les valeurs possibles de p et q :

– L'angle d'un triangle régulier vaut 60ř, on peut donc disposer 3, 4, ou 5 triangles autour d'un sommet du polyèdre.
– L'angle d'un carré vaut 90ř, on peut donc disposer seulement 3 carrés autour d'un sommet.
– L'angle d'un pentagone régulier vaut 108ř, on peut donc disposer 3 pentagones.
– L'angle d'un hexagone régulier vaut 120ř, il est donc impossible de construire un polyèdre avec des hexagones. Si on prend des polygones encore plus grands, l'angle sera encore plus obtus et ce sera évidemment toujours impossible.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

On a donc cinq valeurs possibles pour p et q ; reste à s'assurer que tous ces polyèdres existent effectivement. En voici la construction :
– Le $\{3\ 3\}$, c'est le *tétraèdre* : une pyramide à base triangulaire. Il a 4 sommets, 6 arêtes et 4 faces.
– Le $\{3\ 4\}$, c'est l'*octaèdre* ; on peut le construire de deux façons : comme une bipyramide à base carrée (c'est-à-dire deux pyramides accolées par leur base), ou comme un antiprisme à base triangulaire. Pour obtenir un antiprisme sur une base donnée, on prend deux de ces bases, situées dans des plans parallèles, de sorte que les sommets de l'une soient en face des arêtes de l'autre et vice-versa, et on relie tous ces sommets en zigzag. L'octaèdre a 6 sommets, 12 arêtes et 8 faces.
– Le $\{3\ 5\}$, c'est l'*icosaèdre* ; pour le construire, il faut prendre un antiprisme à base pentagonale, et surmonter ses deux bases d'une pyramide. Il a 12 sommets, 30 arêtes et 20 faces.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

– Le $\{4\ 3\}$, c'est le *cube* : un prisme à base carrée. Il a 8 sommets, 12 arêtes et 6 faces.

Les plus perspicaces d'entre vous auront remarqué que le fait d'inverser p et q semble échanger le nombre de sommets avec le nombre de faces, et ne pas modifier le nombre d'arêtes. Ce n'est pas un hasard, et comme on peut s'y attendre, le $\{5\ 3\}$ est un solide qui a 20 sommets, 30 arêtes et 12 faces ; il s'appelle le *dodécaèdre*. Cependant, c'est plus difficile d'en donner une construction directe que pour les quatre précédents. Pour montrer qu'il existe, on va utiliser une notion fondamentale que je vais introduire tout de suite : la *dualité*.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Pour construire le *dual* d'un polyèdre, on commence par placer un sommet au milieu de chacune de ces faces. Ensuite, on relie par des arêtes les sommets situés sur des faces adjacentes, de sorte que chaque arête du dual traverse une arête du polyèdre original. Enfin, chaque sommet de l'original se retrouve ainsi encerclé par un circuit d'arêtes, sur lequel on tend une face. Par exemple, sur la figure, on fait correspondre le sommet rouge à la face rouge, l'arête verte à l'arête verte et la face bleue au sommet bleu.

Vous pouvez vérifier que la dualité est une opération involutive, c'est-à-dire que le dual du dual d'un polytope, c'est le polytope lui-même. De plus, le dual d'un polytope régulier est encore régulier. Plus précisément, $\{p\ q\}$ se transforme en $\{q\ p\}$. En effet, à chaque face p-gonale correspond un sommet dont partent p arêtes, donc qui est entouré par p faces - et vice-versa.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Ainsi, le dual d'un tétraèdre est un autre tétraèdre, inscrit dans le premier. Le dual d'un octaèdre est un cube. Le dual d'un icosaèdre est un dodécaèdre, et on justifie ainsi l'existence de ce dernier.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Voici une dernière construction que je voudrais mentionner, car elle me servira pour les figures en 4D. Imaginez que je prends un cube, et que je colorie un sommet sur deux en noir et un sommet sur deux en blanc, de sorte qu'une arête relie toujours des sommets de couleur différente. C'est possible : la figure indique comment le faire. Que se passe-t-il si on garde uniquement les sommets blancs ? Il reste alors 4 sommets, dont deux quelconques sont situés dans les coins opposés d'une face ; comme toutes les diagonales sont égales, ces 4 points sont donc disposés aux sommets d'un tétraèdre régulier. Ainsi, le tétraèdre est un "demi-cube" !

Cela veut dire aussi qu'on peut prendre deux tétraèdres réguliers égaux, et les superposer de telle sorte que les sommets occupent tous les sommets d'un cube. La figure obtenue est plus symétrique que chaque tétraèdre tout seul : elle a toutes les symétries d'un cube. Cette figure de deux tétraèdres interpénétrés a été découverte par Kepler ; il l'a appelée *stella octangula* - "étoile à huit angles".

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Avant de passer à la suite, je voudrais m'attarder brièvement sur la notion générale d'espace à quatre dimensions - un concept avec lequel tout le monde n'est pas forcément à l'aise.

Pour cela, je vais d'abord parler de Flatland - un monde qui a non pas quatre, non pas trois, mais seulement deux dimensions. Imaginez que vous êtes un habitant de Flatland ; vous connaissez la notion d'espace à zéro dimensions (le point), d'espace à une dimension (la droite), d'espace à deux dimensions (le plan dans lequel vous vivez), et c'est tout. Imaginez maintenant que quelqu'un essaye de vous parler de notre espace à trois dimensions. Vous seriez évidemment incapables de visualiser cet espace, car votre cerveau ne disposerait pas des "logiciels" pour voir en 3D, et vous pourriez même douter de son existence. Mais un habitant de notre monde à nous pourra vous convaincre qu'il n'y a aucune raison que la suite "point, droite, plan" s'arrête là, et qu'on peut très bien imaginer un espace où on peut tracer trois axes deux à deux perpendiculaires. Vous ne pourriez sans doute jamais voir directement les objets à trois dimensions, mais vous pourriez quand même les étudier en raisonnant sur leurs projections, leurs patrons, leurs coupes par un plan etc., ou alors simplement par analogie.

Mais alors pourquoi s'arrêter à trois ? Pourquoi ne pas imaginer un monde où on peut tracer quatre, cinq, six axes deux à deux perpendiculaires ? Il n'y a aucune raison pour avoir des angoisses existentielles face à ces espaces : s'ils sont difficiles à voir, ils ne sont pas plus difficiles à définir que l'espace à trois dimensions qu'on connaît. Et pour étudier les objets en 4D, comme on ne peut pas les visualiser directement, on doit également trouver des figures en 3D qui permettent de les décrire.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

On va à présent poser les définitions des objets qu'on va décrire. Un *polytope*, c'est la généralisation de la notion de polygone ou polyèdre à n dimensions. L'idée intuitive qu'on peut en avoir sera suffisante pour suivre le reste de l'exposé, mais par principe, on va quand même le définir prorprement.

On définit un polytope par récurrence :
- L'unique polytope de dimension -1, c'est l'ensemble vide, qu'on appelle dans ce contexte le *nullitope*.
- L'unique polytope de dimension 0, c'est le point ; on considère qu'il contient le nullitope.
- Un polytope de dimension n, avec $n > 0$, est la donnée d'un certain nombre (fini et non nul) de polytopes de dimensions inférieures, disposés dans l'espace euclidien à n dimensions, de telle sorte que :
  - chaque polytope de dimension $n-2$ (appelé aussi *crête* du grand polytope) soit contenu dans exactement deux polytopes de dimension $n-1$ (appelés aussi *facettes* du grand polytope).

    Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

  - deux crêtes ne soient jamais coïncidentes (sinon, on a du mal à déterminer comment s'agencent les facettes autour).
  - deux facettes adjacents n'appartiennent jamais au même hyperplan (sinon, le polytope est dégénéré).
  - aucun sous-ensemble propre du polytope ne forme lui-même un polytope.

Ainsi, avec cette définition, un polytope de dimension 1 est constitué d'un certain nombre de points, non confondus (à cause de la deuxième restriction), et tels que chaque nullitope soit partagé par exactement deux points. Comme le nullitope est unique, on obtient donc un couple de points distincts, soit un segment. De même, on peut vérifier qu'en dimension 2 et 3, on retombe sur la définition usuelle d'un polygone et d'un polyèdre.

On commence à voir ici l'utilité du nullitope, dont l'introduction peut paraître artificielle au premier abord. Une autre conséquence est que la formule d'Euler (qu'on ne va pas démontrer ici) s'écrit alors beaucoup plus joliment :

$$\sum_{i=-1}^{n} (-1)^i N_i = 0,$$

où N_i est le nombre d'éléments de dimension i - en comptant le nullitope et le polytope tout entier.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

On introduit ensuite la notion de *symétrie* d'un polytope : il s'agit d'une isométrie de l'espace ambiant qui laisse invariant le polytope. Ces symétries forment alors un groupe. On définit alors récursivement un *polytope régulier* :
- on convient que le nullitope est régulier ;
- on dit qu'un polytope de dimension $n \geq 0$ est régulier si toutes ses facettes sont régulières, égales et si son groupe de symétries est transitif sur ses sommets (c'est-à-dire que pout tout couple de sommets, il existe une symétrie du polytope qui transforme l'un en l'autre).

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Une conséquence immédiate de cette définition est que tout polytope régulier est inscriptible dans une hypersphère. En effet, soit O le centre du polytope, c'est-à-dire l'isobarycentre de ses sommets. Comme toute symétrie permute les sommets, elle laisse O invariant. Ensuite, si on se donne deux sommets A et B, il existe une symétrie qui transforme A en B. Enfin, toute symétrie conserve les distances, d'où $OA = OB$. Ainsi, tous les sommets sont situés à la même distance du centre, donc sur une hypersphère de centre O.

Ceci permet de projeter un polytope régulier sur sa sphère circonscrite, et d'obtenir un pavage régulier de la sphère. Cet objet est parfois plus agréable à étudier que le polytope lui-même.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Ainsi, le dual d'un polytope (qu'on peut définir, dans le cas général, d'une façon similaire au cas de la dimension 3) est en fait défini seulement à une homothétie près - alors que pour un polytope projeté sur une hypersphère, cette ambiguïté n'existe plus.

La dernière notion que je voudrais introduire est celle de *polytope convexe*. Pour cela, on doit aussi définir l'intérieur d'un polytope convexe ; on définit ces deux notions simultanément par récurrence :

- On convient que le nullitope est convexe, et que son intérieur est vide.
- On convient que le point est convexe, et que son intérieur, c'est le singleton qui contient le point lui-même.
- Pour qu'un polytope de dimension $n > 1$ soit convexe, on demande d'abord que toutes ses facettes soient convexes et d'intérieurs disjoints. A partir de là, on admet que la réunion des intérieurs des facettes délimite une partie bornée de l'espace, qu'on définit comme étant l'intérieur du polytope. On dit alors que le polytope est convexe si son intérieur est convexe, c'est-à-dire que tout segment dont les extrémités sont contenues dans le polytope est aussi contenu dans le polytope.

Maintenant qu'on a définit tous les termes, je vais, comme promis, parler des polytopes réguliers convexes en dimension 4. Cependant, c'est un sujet assez restrictif, et je vais d'abord vous présenter - très rapidement - quelques objets qui dépassent le cadre de cet exposé, mais s'en rapprochent, en espérant qu'ils éveilleront votre curiosité.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Voici le petit dodécaèdre étoilé. C'est un polyèdre régulier, mais non convexe - et oui, ça existe ! Ses faces sont 12 pentagrammes (ou étoiles à 5 branches), qui s'entrecroisent, de telle sorte que la partie centrale de chaque face est cachée à l'intérieur.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Le cuboctaèdre. C'est un polyèdre uniforme, c'est-à-dire que son groupe de symétries est transitif sur ses sommets et que ces faces sont régulières, mais pas nécessairement égales.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Une section 3D du "Grand Prismosaure" - un polytope uniforme non convexe en 4D.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Le pavage régulier du plan par des hexagones, avec son symbole de Schläfli : chaque sommet est entouré par 3 hexagones.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Un pavage régulier du plan hyperbolique par des triangles, où chaque sommet est entouré par 7 triangles réguliers. Je n'en dis pas plus.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Un polygone régulier à 18 côtés, mais non planaire.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Un composé régulier. Le groupe de symétries est transitif sur les sommets, toutes les faces sont régulières et égales, mais ce n'est pas un polyèdre : il se décompose en 5 morceaux en forme de tétraèdre. (La stella octangula est un autre objet du même genre).

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

On en vient enfin au sujet annoncé. Un *polychore*, c'est simplement un raccourci pour désigner un polytope en 4D. C'est donc un objet à quatre dimensions délimité par un certain nombre de sommets, d'arêtes, de faces (qui sont des polygones) et de *cellules* (qui sont des polyèdres).

Dans un polychore régulier, toutes les cellules sont régulières et égales, et tous les sommets sont équivalents. On en déduit que toutes les arêtes et toutes les faces sont aussi équivalentes. Ainsi, autour de chaque arête, il y aura r cellules, avec $r \geq 3$. Si chaque cellule est un $\{p\ q\}$, on note le polychore obtenu $\{p\ q\ r\}$; comme précédemment, on peut reconstruire sans ambiguïté l'objet à partir de ces trois valeurs (pourvu qu'il existe). Et comme précédemment, une condition nécessaire pour que l'objet existe est que la somme des angles diédraux autour de chaque arête soit strictement inférieure à 2π.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

La notion de dualité s'étend naturellement à la dimension 4. Les sommets correspondent alors aux cellules, et les arêtes aux faces. C'est toujours une opération involutive, qui préserve la dualité et qui transforme $\{p\ q\ r\}$ et $\{r\ q\ p\}$.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Comme précédemment, on cherche toutes les valeurs théoriquement possibles de p, q et r. Pour cela, il faut calculer l'angle diédral entre les faces adjacentes de chaque solide platonicien. Voici, par exemple, comment on procède pour un tétraèdre ; on prend 1 pour la longueur de ses arêtes. L'angle qu'on cherche, c'est l'angle α sur la figure, qui se trouve dans le triangle formé par deux sommets et le milieu de l'arête opposée. C'est un triangle isocèle, dont les deux côtés égaux sont les hauteurs des faces, donc font $\frac{\sqrt{3}}{2}$, et dont la base fait 1. On peut alors exprimer α par la formule que vous voyez ici, puis calculer sa valeur numérique - environ $7032'$. Pour les autres polyèdres, le calcul est à peine plus difficile ; je ne vais pas le détailler, mais seulement donner directement les valeurs numériques auxquelles je vais vous demander de croire sur parole.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Avec les valeurs qu'on trouve, on constate qu'on peut caser 3, 4 ou 5 tétraèdres autour d'une arête, mais au maximum 3 cubes, au maximum 3 octaèdres, au maximum 3 dodécaèdres, et on ne peut rien faire avec des icosaèdres, ce qui donne six possibilités : $\{3\ 3\ 3\}$, $\{3\ 3\ 4\}$, $\{3\ 3\ 5\}$, $\{4\ 3\ 3\}$, $\{3\ 4\ 3\}$ et $\{5\ 3\ 3\}$.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Voilà pour la partie théorique ; à présent, nous allons enfin découvrir à quoi ressemblent concrètement les polychores réguliers convexes. Pour construire les plus simples d'entre eux, on va raisonner par analogie. On va commencer par le *pentachore* $\{3\ 3\ 3\}$, qu'on peut aussi appeler *hypertétraèdre*.

Comment construit-on un tétraèdre ? La façon la plus logique consiste à partir d'un triangle équilatéral de côté 1 (en noir sur la figure), trouver un point dans l'espace qui est à la distance 1 de chaque sommet du triangle (en rouge sur la figure), et le relier à chaque sommet (en gris sur la figure). On peut ainsi compter ses faces, arêtes et sommets :

- les trois sommets du triangle de départ, plus le sommet qu'on a rajouté, font 4 ;
- les trois côtés du triangle de départ, plus les trois lignes qui relient le nouveau sommet aux anciens, font 6 arêtes ;
- le triangle de départ, plus les trois nouveaux qui ont pour base les côtés de l'ancien et pour sommet le point rajouté, font 4 faces.

Et d'ailleurs, qu'est-ce qu'un triangle équilatéral ? On peut l'obtenir en prenant un segment de longueur 1 (en noir sur la figure), en trouvant un point dans le plan qui est à la distance 1 de chaque extrémité (en rouge sur la figure) et en le reliant à ces extrémités (en gris sur la figure).

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

On peut répéter la même procédure en dimension 4 : on part d'un tétraèdre d'arête 1 (en noir sur la figure), on trouve un point, dans l'espace à quatre dimensions, qui est à la distance 1 de chacun des sommets (en rouge sur la figure), et on le relie à tous les sommets (en gris sur la figure). Certains pourraient rétorquer que le point rouge se trouve certes à la même distance de tous les autres, mais que cette distance vaut seulement $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ et pas 1. Mais il ne faut pas oublier que ce que vous voyez ici, ce n'est qu'une projection du pentachore dans l'espace à 3 dimensions ; le point rouge, ce n'est pas le centre du tétraèdre, mais il est décalé dans la 4-ième dimension (c'est là qu'il faut faire un effort d'imagination).

Combien le pentachore a-t-il d'éléments ?

- le tétraèdre a 4 sommets, et on en rajoute 1, ce qui fait 5 au total ;
- il y a deux types d'arêtes : les arêtes du tétraèdre (noires), au nombre de 6, et les arêtes qui relient les sommets du tétraèdre au nouveau sommet (grises), au nombre de 4 (une par sommet), soit 10 au total ;
- il y a deux types de faces : les faces du tétraèdre, en forme de triangles équilatéraux et au nombre de 4, et les faces qui ont pour base une arête noire et pour sommet le sommet rajoutée, également en forme de triangles équilatéraux et au nombre de 6 (une par arête), soit 10 au total ;
- il y a le tétraèdre original, et 4 autres cellules, également en forme de tétraèdre régulier, qui ont pour base une des faces originales et pour sommet le nouveau sommet, soit 5 au total. Cela justifie son nom : tout comme "tétraèdre" signifie "quatre faces" en grec, "pentachore" signifie "cinq cellules".

Par ailleurs, on peut vérifier qu'autour de chaque arête - qu'elle soit noire ou grise - il y a toujours exactement 3 cellules, ce qui justifie que ce polychore est régulier et qu'il s'agit bien du {3 3 3}.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Je vais maintenant vous présenter l'*hypercube*. On l'appelle aussi parfois *tesséracte* - un joli nom qu'on trouve souvent en anglais, mais que je n'ai jamais vu employé en français, ce que je trouve bien dommage.

Comment construit-on un cube ? On part d'un carré de côté 1 (en bleu), et on le translate pour obtenir un deuxième carré (en rouge) qui est à la distance 1 du premier, et enfin on relie les sommets correspondants des deux carrés (en gris). On peut construire un carré de la même façon : on part du segment bleu, on le translate pour obtenir le segment rouge et on relie les deux par les côtés gris.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

On peut faire la même chose en 4D : on part d'un cube (en bleu), on le translate dans la quatrième dimension pour obtenir un deuxième cube (en rouge), et on relie les sommets correspondants (en gris). Ses éléments sont les suivants :

- chacun des deux cubes a 8 sommets, ce qui fait 16 sommets au total ;
- chacun des deux cubes a 12 arêtes, et il y a 8 arêtes grises (une par sommet de chaque cube), ce qui fait 32 arêtes au total ;
- chacun des deux cubes a 6 faces, et il y a aussi les 12 faces délimitées par une arête bleue, une arête rouge correspondante et deux arêtes grises, soit 24 faces au total.
- on a les deux cubes de départ, et une cellule cubique pour chaque paire de faces correspondantes, soit 8 cellules au total.

Il est clair que ce polychore est régulier. On peut vérifier qu'autour de chaque arête (bleue, rouge ou grise), il y a toujours 3 cellules : c'est donc le {4 3 3}.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Si vous avez essayé de compter les cellules autour de chaque arête, vous avez peut-être constaté que la figure de l'hypercube qu'on a jusque là n'est pas très lisible. Posons-nous d'abord la question, comment représenter un cube d'une façon qui est claire pour un habitant de Flatland ? La figure en haut à droite offre une solution possible : c'est une projection du cube en perspective, comme si on le voyait à travers une de ses faces devenue transparente. On voit ici très clairement la face rouge - le "fond de la boite" - entourée des quatre faces latérales ; seule la face bleue - le "couvercle" - se superpose aux autres.

En bas à droite, j'ai présenté une projection similaire du tesséracte. On voit ici la cellule rouge - le "fond de l'hyperboite" - entourée des six cellules "latérales" ; seul le "couvercle" (bleu) se superpose aux autres sur ce dessin. Sur cette figure, il est beaucoup plus facile de visualiser comment les différents sommets, arêtes, faces et cellules s'agencent les uns par rapport aux autres.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

La vue en projection, c'est bien pour avoir une vision globale de l'objet, mais pour faire des raisonnements un peu plus détaillés et précis, on aura besoin de l'aborder d'une autre façon : en examinant ses coupes par des hyperplans. Mais comment trouver à quoi ressemblent ces coupes ? Comme précédemment, on va d'abord chercher à trouver les coupes d'un cube.

Si on pose le cube horizontalement sur une table, alors tout est clair : ses sommets sont répartis entre deux plans horizontaux, celui de la face bleue, et celui de la face rouge. Mais essayons maintenant de couper le cube par des plans perpendiculaires à sa grande diagonale ; autrement dit, essayons d'examiner le cube comme s'il était accroché au plafond par une ficelle attachée à l'un de ses sommets. Si on voit bien en 3D, on voit tout de suite que les sommets se répartissent entre 4 plans horizontaux : un sommet tout seul, trois sommets disposés en forme de triangle équilatéral, trois sommets disposés en forme de triangle équilatéral dans l'autre sens et le dernier sommet tout seul. Mais si on n'est pas capable de voir directement en 3D, comment le trouver ?

Une solution consiste à déterminer séparément dans quelles couches se trouvent les sommets du carré bleu, puis ceux du carré rouge. On sait que les sommets d'un carré orienté de cette façon se répartissent en trois couches : un sommet tout seul, la diagonale, et un sommet tout seul. Mais comme les deux carrés sont inclinés par rapport à la verticale, chaque section successive est légèrement décalée. Enfin, pour des raisons de symétrie, on sait que le sommet supérieur du carré bleu est dans la même couche que la diagonale du carré rouge. La figure de droite montre comment on peut rassembler toutes ces informations pour retrouver les sections successives du cube.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Maintenant qu'on sait décomposer un cube de cette façon, on peut faire le même travail pour l'hypercube. On obtient quatre couches : un sommet tout seul, puis quatre sommets disposés en tétraèdre régulier, six sommets disposés en octaèdre régulier (deux triangles parallèles en sens opposés), encore un tétraèdre mais dans l'autre sens, et un sommet tout seul.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

On en vient maintenant à l'équivalent de l'octaèdre. Pour construire un octaèdre, on prend un carré (en vert), un point en dessous (en bleu), un point au-dessus (en rouge), et on relie chacun de ces deux points à chaque sommet du carré (en gris). De même, pour construire un carré, on part de sa diagonale (en vert), on prend un point en dessous (en bleu), un point au-dessus (en rouge), et on relie chacun des deux à chaque extrémité (en gris).

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

On peut faire la même chose en 4D : on part d'un octaèdre (en vert), on rajoute deux points qui sont situés de part et d'autre dans la quatrième dimension (en bleu et en rouge), et on les relie à chaque sommet de l'octaèdre (en gris). Voici ses éléments :

– les 6 sommets de l'octaèdre, et les 2 points rajoutés, ce qui fait 8 au total ;
– les 12 arêtes (vertes) de l'octaèdre, et les 12 arêtes grises (deux pour chaque sommet de l'octaèdre), ce qui fait 24 au total ;
– les 8 faces de l'octaèdre, et les 24 faces obtenues en prenant une des arêtes vertes pour base et le point bleu ou rouge pour sommet, ce qui fait 32 faces au total - toutes triangulaires.
– toutes les cellules obtenues en prenant une des faces de l'octaèdre pour base, et le point bleu ou rouge pour sommet ; il y en a donc 16, et elles sont toutes tétraédriques.

On peut vérifier qu'autour de chaque arête (verte ou grise), il y a quatre cellules. C'est un polychore régulier : l'*hexadécachore*, ou hyperoctaèdre, de symbole de Schläfli {3 3 4}. C'est donc le dual du tesséracte.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Tout comme l'octaèdre peut alternativement être vu comme un antiprisme triangulaire, l'hyperoctaèdre a aussi une interprétation similaire. On peut l'obtenir en prenant deux tétraèdres situés dans des hyperplans parallèles et en sens opposés, et en reliant deux à deux tous les sommets de ces deux tétraèdres sauf les couples de sommets correspondants. Il y a plusieurs façons de le voir : par exemple, on peut examiner attentivement la figure que je viens de décrire et constater que c'est aussi un polychore régulier avec 4 cellules tétraédriques autour de chaque arête ; ou alors on peut essayer de voir ce qui se passe quand on découpe l'hexadécachore par des hyperplans parallèles à une cellule.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Enfin, voici une dernière observation dont on aura besoin pour la suite. On a vu que si on prenait un sommet sur deux sur un cube (de sorte à ne retenir qu'une extrémité de chaque arête), on obtenait un tétraèdre. Que se passe-t-il si on fait la même chose pour le tesséracte ? Un rapide coup d'oeil à la figure vous convaincra que ces sommets forment précisément un hyperoctaèdre ; on peut donc décomposer un hypercube en deux hyperoctaèdres.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Considérons maintenant un hypercube superposé à son hyperoctaèdre dual, de sorte que les deux soient inscrits dans une même hypersphère. On vient de voir que l'hypercube peut se décomposer en deux hyperoctaères, ce qui en fait 3 au total. Appelons l'hyperoctaèdre dual (1), et les deux "demi-hypercubes" (2) et (3) ; ils sont représentés sur la figure en "vue éclatée" - couche par couche.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Maintenant que se passe-t-il si, au lieu de réunir (2) et (3), on réunit (1) et (2), ou (1) et (3) ? En regardant la figure, on reconnaît la vue éclatée d'un hypercube, dans le sens de sa grande diagonale ; ainsi, chacune des trois paires d'hyperoctaèdres forme un hypercube. Il n'est pas difficile de se convaincre que le troisième hyperoctaèdre est alors toujours son dual. En d'autres termes, (1), (2) et (3) jouent des rôles complètement symétriques.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

La question qui vient naturellement est alors : que se passe-t-il si on réunit les trois hyperoctaèdres ? On obtient un ensemble de points qui a une symétrie extrêmement riche : non seulement toute symétrie de l'hypercube le préserve, mais en plus, il y a aussi des rotations qui permutent (1), (2) et (3) entre eux. Mais avant de dire que c'est un polychore régulier, il faut encore trouver ses arêtes, ses faces et ses cellules.

L'objet en 3D qui se rapproche le plus de celui qu'on cherche à construire est ce qu'on appelle le *dodécaèdre rhombique*. Ses sommets sont ceux d'un cube et de son octaèdre dual réunis, ses arêtes relient chaque sommet de l'octaèdre à chacun des quatre sommets de la face correspondante du cube, et ses faces sont des losanges qui ont pour diagonales une arête du cube et une arête correspondante de l'octaèdre. Mais ce polyèdre-là n'est pas régulier : il a deux types de sommets bien distincts (les sommets du cube sont entourés par 3 faces alors que ceux de l'octaèdre sont entourés par 4 faces), et ses faces sont des losanges et pas des carrés. La situation est beaucoup plus jolie en 4D.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

De même que précédemment, on relie par une arête chaque sommet de l'hyperoctaèdre à chacun des sommets de la cellule correspondante de l'hypercube dual, mais on garde aussi les arêtes de l'hypercube. (Remarquez que les extrémités de chaque arête se trouvent toujours dans deux hyperoctaèdres différents parmi (1), (2) et (3) !) Comme faces, on prend tous les triangles qu'on peut construire en prenant un sommet de l'hyperoctaèdre pour sommet et une arête de la cellule correspondante de l'hypercube pour base. Enfin, comme cellules, on prend tous les octaèdres construits avec une face de l'hypercube et l'arête correspondante de l'hyperoctaèdre - voir la figure.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Cette fois-ci, tout marche bien : toutes les arêtes ont la même longueur, les cellules sont toutes régulières, et autour de chaque arête, il y a toujours 3 cellules. C'est un polychore régulier : le $\{3\ 4\ 3\}$; j'ai essayé de représenter sur cette figure l'agencement des cellules autour d'un des sommets. Comptons ses éléments :
- 3 groupes de 8 sommets, soit 24 au total ;
- les 32 arêtes de l'hypercube, et les arêtes qui relient chacun des 8 sommets de l'hyperoctaèdre à chacun des 8 sommets de la cellule correspondante, soit 96 au total ;
- une face pour chacun des 8 sommets de l'hyperoctaèdre et chacune des 12 arêtes qui sont autour, soit 96 au total ;
- une cellule par face de l'hypercube, ou par arête de l'hyperoctaèdre - soit 24 au total.

Son nom est donc le *tétracosachore*. Comme il n'a qu'un équivalent imparfait en 3D, on ne peut pas vraiment l'appeler "hyper-quelque chose". Comme si la symétrie de cet objet n'était pas déjà assez riche, il est, en plus, son propre dual.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Si vous avez bien suivi, on a construit pour le moment 4 polychores, et on a vu qu'il y avait 6 possibilités. J'aurais adoré construire les deux autres : ces objets sont encore plus beaux et plus riches que tout ce qu'on a vu jusque là. Malheureusement, ils sont aussi beaucoup plus complexes, et leur présentation détaillée prendrait trop de temps : je vais devoir me contenter de les évoquer brièvement.

D'abord, il y a l'*hexacosichore* $\{3\ 3\ 5\}$, équivalent de l'icosaèdre. Il n'a pas moins de 120 sommets, 720 arêtes, 1200 faces (triangulaires) et 600 cellules (tétraédriques). J'ai représenté ici une infime partie de ce monstre : l'agencement des cellules autour d'un sommet donné.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Voici - sans justification évidemment - une vue éclatée de l'hexacosichore. Dans l'ordre : un point, un icosaèdre, un dodécaèdre, un icosaèdre un peu plus grand, un icosidodécaèdre, puis la même chose dans l'ordre inverse.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Voici une projection de tout l'objet dans le plan, pour donner une idée de sa complexité.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Enfin, il y a son dual : l'*hécatonicosachore* $\{5\ 3\ 3\}$, équivalent du dodécaèdre. Je n'ai pas mis d'image, car de toute façon, on n'y verrait pas grand chose. Il a donc 600 sommets, 1200 arêtes, 720 faces (pentagonales) et 120 cellules (dodécaédriques).

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Voici les références dont je me suis servi et inspiré pour préparer cet exposé, mais que je vous conseille aussi si vous voulez en savoir plus. Le livre de François Lo Jacomo est une excellente introduction en la matière. Celui de Coxeter est un classique, très complet, mais aussi très long à lire. *Flatland* est en fait un roman, écrit au XIXème siècle ; mais c'est aussi un excellent texte de vulgarisation, qui, même s'il n'a pas de véritable contenu mathématique, introduit très bien la notion d'espace à plusieurs dimensions et permet de s'y habituer. George Olshevski est un mathématicien contemporain, dont le but dans la vie est d'énumérer tous les polytopes uniformes en dimension 4. L'image du "grand prismosaure" provient de son site internet. Il contient beaucoup d'informations très intéressantes - c'est notamment là que j'ai trouvé la définition propre d'un polytope et celle d'un polytope régulier. Enfin, les deux grandes encyclopédies mathématiques en ligne - Wikipedia et Wolfram Mathworld - contiennent aussi un certain nombre de renseignements ; c'est là que j'ai pris la plupart des images en couleur pour la partie "culturelle" de l'exposé.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Je tiens à remercier M. Yves Duval, l'organisateur du Séminaire Mathématique des Elèves de Louis-le-Grand, qui était également mon professeur de mathématiques en MP, et sans qui cet exposé n'aurait sans doute jamais vu le jour. Merci à tous pour votre attention !

VII. Activités ludiques

1 Énigmes du jour

1 Énoncés

Jeudi 19 août

Exercice 1 On dispose d'un briquet et de deux cordelettes (pas forcément identiques). Lorsqu'on allume n'importe quelle cordelette, celle-ci met une heure à brûler intégralement. Comment chronométrer quarante-cinq minutes ?

Vendredi 20 août

Exercice 2 Un alpiniste se trouve en haut d'une falaise de 100m de hauteur, mais ne dispose que d'une corde de 75m. Heureusement, il y a une branche située à 50m de hauteur.

Que faire pour arriver (vivant) en bas ?

Samedi 21 août

Exercice 3

Quarante quatre stagiaires ont été enlevés par le diabolique François qui, dans sa grande bonté, leur laisse une chance de se sortir de son piège. Il les fait entrer un par un dans une grande pièce qui contient 44 tiroirs, chacun de ces tiroirs contenant le nom d'un stagiaire (les noms sont supposés deux à deux distincts). Si en ouvrant moins de 22 tiroirs le mathématicien trouve son nom il passe dans une autre pièce où il doit attendre ses amis. Sinon, François tue tout le monde. Trouver une stratégie qui confèrent aux mathématiciens au moins 30% de chance de survivre.

Dimanche 22 août

Exercice 4 On dispose de 13 poids, dont un seul est de poids différent des 12 autres. Comment, en trois pesées, déterminer lequel est différent des autres ?

Lundi 23 août

Exercice 5 Après l'échec de son premier plan diabolique l'incorrigible François a une nouvelle idée. Il a réussi à rattraper les 42 stagiaires (un d'eux a réussi à s'échapper) et les soumet à une nouvelle épreuve machiavélique.

Il les enferme chacun dans une cellule (une fois l'épreuve commencée, ils ne peuvent plus communiquer), et les fait passer dans un ordre aléatoire (et à des temps aléatoires) dans une petite pièce contenant un interrupteur (dont ils ne connaissent pas la position initiale), ayant deux positions : gauche et droite (c'est la seule information qu'ils peuvent laisser dans la pièce et donc la seule information qu'ils peuvent transmettre).

Pour être libérés il faut que l'un d'entre eux affirme qu'ils sont déjà tous passés dans la pièce et qu'il ait raison, s'il se trompe il sont exécuté par une injection létale de géométrie projective.

Ils peuvent se concerter avant le début du "jeu", quelle stratégie peuvent ils adopter ?

2 Solutions

Jeudi 19 août

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> La remarque fondamentale pour résoudre cette énigme est que si on allume une corde de durée de vie t aux deux extrémités simultanément, au moment où la corde est complètement consommée, le temps écoulé est $\frac{t}{2}$. Ainsi on effectue les opérations suivantes : on allume la première corde aux deux extrémités et au même moment on allume la deuxième corde à une extrémité. Quand la première corde est consommée on allume la deuxième extrémité de la deuxième corde (il s'est alors passé 30 minutes). Quand la deuxième corde est consommée, il s'est passé 30+15=45 minutes. D'où le résultat.

Vendredi 20 août

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> On coupe 25 mètres de la corde, que l'on accroche en haut de la falaise. On descend ensuite de 25 mètres, puis on fait une boucle à l'extrémité de la corde de 25 mètres, dans laquelle on fait passer la corde de 50 mètres. On se sert des deux parties de la corde pendantes de 50 mètres pour descendre de 25 mètres, jusqu'à l'arbre, puis on tire une des parties de la corde, pour la faire sortir de la boucle. Il ne reste plus qu'à l'attacher à l'arbre et descendre le reste de la falaise.

Samedi 21 août

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>

On numérote les stagiaires et les tiroirs. Le système des tiroirs correspond donc à une permutation. On note donc $p(i)$ le contenus du tiroir i.

Le mathématicien i ouvre le tiroir i. S'il n'y est pas, il ouvre le tiroir $p(i)$ et il continue ainsi et donc le $k^{\text{ème}}$ tiroir qu'il ouvre est le tiroir $p^{(k)}(i)$. Si la permutation n'a que des cycles de longueur plus petite que 22, les stagiaires survivent.

Cherchons quelle est la probabilité qu'une permutation ait un cycle de longueur supérieure à 22. Il y exactement

$$\binom{42}{k}(42-k)!(k-1)!$$

permutation qui ont un cycle de longueur k car il y a $(k-1)!$ permutation de k nombres.

Et on a :

$$\frac{1}{42!}\sum_{k=22}^{42}\binom{42}{k}(42-k)!(k-1)! = \sum_{k=22}^{42}\frac{1}{k} < 0,68$$

Et donc la probabilité de s'en sortir pour les stagiaires est supérieure à $1 - 0,68 = 0,32$.

Dimanche 22 août

Solution de l'exercice 4 La difficulté de la chose est que l'on ne sait pas si le poids différent est plus lourd ou plus léger que les autres, ce qui force à être très astucieux.

1. On fait deux tas de 4 poids, que l'on appelle A et B, et un tas de 5, que l'on appelle C. On compare ensuite A et B. Si A et B sont de même poids, aller en 2, sinon, aller en 5.
2. Le poids différent est donc parmi C. On prend 3 poids quelconques de C, que l'on compare avec trois poids normaux (provenant de A ou B). Si les poids sont égaux, aller en 3, sinon, aller en 4.
3. Le poids différent est parmi les deux poids restants de C. On en compare un avec un poids normal. Si les poids sont différents, alors le poids recherché est celui que l'on vient de peser, sinon c'est le dernier poids.
4. Supposons par exemple que nos trois poids sont plus lourds que trois poids normaux. On en déduit deux choses : le poids recherché est parmi ces trois, et est plus lourd qu'un poids normal. On compare deux poids parmi nos trois suspects, si les poids sont différents, le poids recherché est le plus lourd des deux, sinon, c'est le dernier suspect non pesé.
5. Supposons par exemple que le groupe A et plus lourd que le groupe B. On en déduit plusieurs choses : le poids différent est dans A ou B, s'il est dans A il est plus léger qu'un poids normal, et s'il est dans B il est plus lourd. On met de chaque côté de la balance deux poids de A et un poids de B. Si les poids sont égaux, aller en 6, sinon, aller en 7.
6. Le poids cherché est parmi les deux non pesés de B, on compare l'un d'eux avec un poids normal (par exemple venant de C). Si les poids sont différents, alors le poids recherché est celui que l'on vient de peser, sinon c'est le dernier poids.
7. Disons que le côté gauche de la balance est plus lourd. Il n'y a que trois possibilités pour le poids recherché : soit il est du côté gauche de la balance, alors c'est un des deux poids de A, soit il est à droite de la balance, et c'est le poids de B. On compare enfin les deux poids suspects de A. Si les poids sont différents, le plus lourd est le poids recherché, sinon, c'est le suspect de B.

Il existe une autre solution pour l'étape 5, qui est peut-être plus simple à trouver, mais qui nécessite d'avoir 5 poids normaux, ce qui a le mauvais goût de ne plus fonctionner si on ne commence qu'avec 12 poids...

Lundi 23 août

Solution de l'exercice 5 L'idée principale est de désigner au départ une personne, qui va essayer de compter les passages de tous les autres. Appelons A cette personne. Une idée naturelle est de dire que les personnes autres que A basculent l'interrupteur à gauche, et que A compte 1 à chaque fois qu-il trouve l'interrupteur en position gauche, puis le remet en position droite. Malheureusement, cela ne marche pas : comme A ne connait pas la position de départ de l'interrupteur, il ne peut pas déterminer si quelqu'un a basculé ou non l'interrupteur avant son premier passage. Il faut donc ruser. Une des solutions possibles est de dire que A change à chaque passage la position de l'interrupteur, et que les autres le basculent de gauche à droite à condition qu'ils aient déjà vu l'interrupteur bouger, et ce une seule fois pendant l'épreuve. Je vous laisse vous convaincre que cette solution fonctionne.

2 Chasse au trésor

1 Règles de la chasse au trésor

François Lo-Jack le pirate à dissimulé un trésor de guerre sur les terres de son château. Vous venez d'être recrutés pour lui extirper cette merveille. Comme François est très joueur il a décidé de vous laisser une chance pour trouver son trésor si vous résolvez assez d'énigmes et d'exercices qui sont cachés sur ses terres. Pour corser le jeu François a décidé de faire des équipes de débutants et des équipe d'avancés et de vous donner des exercices en fonction de votre niveau (donc les plus difficiles possible...).

Pour avoir une chance de réussir cette mission vous devez avoir :

- Du papier et un crayon
- Une carte du domaine
- Un pantalon long (manches longues)
- Beaucoup de courage

Vous allez devoir résoudre des énigmes et des exercices qui vous permettront de connaître l'emplacement des prochaines énigmes et vous permettront peut-être d'atteindre le fabuleux trésor. Le but du jeu est de collecter un maximum de points.

- Vous allez trouver des énigmes dans le domaine du château (vous devrez laisser en place les énigmes). Une fois que vous avez trouvé une solution, vous devez la donner à un des animateurs qui sont dans la salle des profs. Une bonne réponse rapportera 5 points ; plus vous vous éloignerez de la réponse optimale, plus votre note diminuera (l'animateur ne vous dira pas si votre est correcte ou non). Une fois que vous avez répondu (juste ou non) à l'énigme, l'animateur vous donnera un exercice.
- La solution de l'exercice est un nombre entier qui vous indiquera la position de votre prochaine énigme. La valeur correcte rapporte 3 points, une solution rédigée rapporte 7 points supplémentaires. Les solutions sont à rendre avant 18 heures (les solutions rendues plus tard ne seront pas acceptées).
- La première équipe à répondre aux 8 énigmes gagne automatiquement 15 points. Les équipes suivantes qui répondent aux 8 énigmes gagnent 10 points.

2 Énoncés

Énigmes communes

Exercice 1 On possède dix pièces d'or, dont deux sont fausses. On dispose d'une machine telle que si on lui en montre trois, elle en indique une selon le principe suivant :

1. s'il y a au moins une pièce fausse parmi les trois proposées, elle montre une des pièces fausses parmi les trois.
2. s'il n'y a pas de pièce fausse, elle en montre une au hasard.

Quel est le nombre minimal de mesures qu'il faut pour trouver les deux pièces fausses ?

Exercice 2 Combien de livres de maths de dimensions $20 \times 20 \times 10$ peut-on mettre dans une boite de taille $30 \times 30 \times 30$? -> 6, T29

Exercice 3 On dispose de trois pichets de contenance respectives $7, 9, 16$ litres. Celui de 16 litres est rempli de rhum et les autres sont vides. À chaque étape, on a le droit de transvaser dy rhum entre deux pichets. Comment obtenir la configuration suivante :

1. le pichet de 16 litres contenant 8 litres de rhum,
2. le pichet de 9 litres contenant 8 litres de rhum,
3. le pichet de 7 litres vide ?

Exercice 4 Quatre pirates essaient de traverser un pont fragile dans l'obscurité grâce à une lampe torche. Le pont s'écroule s'il y a strictement plus de deux personnes dessus. Ces pirates mettent respectivement $1, 2, 5, 10$ minutes à traverser le pont. Un groupe de personnes ne peut avancer que s'il dispose de la lampe. Quel est le temps minimal nécessaire pour qu'ils atteignent tous l'autre côté du pont ?

Exercice 5 Trois gentils organisateurs (GO) et trois élèves sont du même côté d'une rivière et veulent traverser grâce à un petit radeau qui ne peut supporter strictement plus de deux personnes dessus. Si, d'un côté ou de l'autre de la rivière, se trouvent strictement plus d'élèves que de GO, ces élèves s'enfuient dans les champs pour regarder les étoiles et attraper des tiques. De plus, les élèves étant méphistophéliques, ceux-ci ne s'enfuient que si au moins un GO est présent. Par ailleurs, le radeau ne peut traverser que si au moins une personne l'utilise. Quel est le nombre minimal de traversées nécessaires ?

Exercice 6 Le stage olympique 2050 se déroule au château de Grésillon, qui comporte 15 étages. Les élèves, gourmands, ont arraché deux noix de coco (identiques) à un palmier situé dans le parc du château. Ils veulent savoir à partir de quel étage les noix de coco se cassent si on les lance par la fenêtre. On suppose qu'une noix de coco lancée et non cassée est identique à une noix de coco non lancée. Combien de lancers, dans le pire des cas, doivent-ils effectuer, en sachant qu'il ne sert à rien de relancer une noix de coco cassée ?

Exercice 7 On pose 100 pièces d'or sur une table, 80 d'entre elles en position pile, les 20 autres en position face. Il est impossible de déterminer dans quel sens est une pièce à l'aide du toucher seulement. Est-il possible de séparer ces pièces en deux tas, contenant chacun le même nombre de pièces en position pile, avec les yeux bandés ?

Exercice 8 Deux élèves, A et B rentrent au château de Grésillon après un jogging. A inspecte B pour savoir si B a une tique, puis B inspecte A pour savoir si A a une tique. Pendant et après l'inspection, A ne dit rien à B et on suppose que si B a une tique, A la trouve. Ensuite, François convoque A et B dans deux pièces différentes (ainsi, A et B ne communiquent pas et n'entendent pas ce qui se passe en dehors de leur pièce). Il demande d'abord à A si A a une tique, puis va dans l'autre pièce et demande à B si B a une tique. Un élève ayant donné une mauvaise réponse est privé de son dessert (un bol d'avoine). Heureusement, ils ont mis au point une stratégie pour qu'au moins un des deux ait son dessert (ensuite, ils se le partagent). Quelle est cette stratégie ?

Exercices débutants

Exercice 9 Combien y a-t-il de zéros dans le nombre :

$$1234567891011121314151617181920212 2...200820092010?$$

Allez chercher une énigme à la case correspondant à ce nombre de zéros.

Exercice 10 Un groupe de pirates s'est emparé de 2048 pièces d'or et se réunit au château de Grésillon chez Lo Jac' pour leur assemblée pirate. À chaque tour :

- si l'un d'eux possède au moins la moitié des pièces d'or, chaque autre pirate lui vole autant de pièces d'or qu'il a déjà en sa possession,

- si deux pirates ont chacun 1024 pièces d'or, l'un des ces deux individus vole toutes les pièces de l'autre,
- et si aucune des deux éventualités précédentes n'est réalisée, rien ne se passe et les pirates repartent chez eux.

Quel est le plus grand nombre de tours possible ? Allez chercher une énigme à la case correspondant à ce nombre au carré.

Exercice 11 On a un damier de côté 99. Il y a une tique sur chaque case. En une étape, chaque tique doit se déplacer d'exactement une case, en diagonale (plusieurs tiques peuvent alors se retrouver sur une même case). Après une étape, quel est le nombre minimal de cases libres ? Allez chercher une énigme à la case correspondant à ce nombre.

Exercice 12 2010 pirates voyagent dans un bus avec deux contrôleurs à son bord. Au départ, aucun des pirates n'a de billet et chaque pirate n'achète un billet qu'après la troisième fois qu'on le lui demande. Les contrôleurs choisissent à tour de rôle un passager sans billet et lui demandent d'en acheter un. Ils procèdent ainsi jusqu'à ce que tous les pirates aient un titre de transport. Combien de billets le deuxième contrôleur est-il sûr de vendre (le but du premier contrôleur étant de vendre le plus de billets) ? Allez chercher une énigme à la case correspondant à l'entier le plus proche de la réponse divisée par 5.

Exercice 13 On a 2010 lampes numérotées de 1 à 2010, commandées chacune par un interrupteur portant le même numéro. Au départ toutes les lampes sont éteintes, puis on réalise les opérations suivantes : on commence par basculer tous les interrupteurs, puis ceux multiples de 2, puis ceux multiples de 3, etc... jusqu'à celui multiple de 2010. Cette opération effectuée, quel est le numéro de la plus grande lampe allumée ? Allez chercher une énigme à la case correspondant aux trois premier chiffres de ce numéro.

Exercice 14 À l'arrêt du bus, N personnes attendent avec des billets pour des places numérotées de 1 à N. Hélas, la personne possédant le billet numéro 1 est un vieux pirate, et lorsque le bus arrive, il s'installe à une place prise au hasard. Le passager numéro 2 s'installe alors à la place 2 si elle est libre, et à n'importe quelle place libre prise au hasard sinon. Et ainsi de suite pour tous les passagers suivants, dans l'ordre de leur numéro. Quelle est la probabilité p_N pour que la dernière personne se retrouve assise à sa place ? Allez chercher une énigme à la case correspondant à l'entier le plus proche de $1/p_{2010}$.

Exercice 15 Trouver le nombre minimal m de reines telles que, si on les place de manière quelconque sur un échiquier 8×8, chacune d'elles soit en prise avec au moins une autre. Allez chercher une énigme à la case correspondant à :

$$\frac{m \times a \times b \times c \times d}{e \times f \times g \times h},$$

où :

- a est la pointure d'Igor,
- b est le nombre de pièces de la maison d'Emmanuel
- c est le nombre formé par les deux derniers chiffres du téléphone portable de Pierre,

- d est le nombre d'oreilles de François,
- e est l'index téléphonique du pays d'origine d'Ilia,
- f est le nombre de frères ou soeurs d'Antoine,
- g est le nombre de cours/TD/TND donnés par Bodo lors de ce stage,
- h est le numéro de la classe où Louis était en deuxième année de Classes Préparatoires.

Exercice 16 Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle de centre O. Soit P le point d'intersection de (AC) et (BD). Les cercles circonscrits aux triangles ABP et CDP se recoupent en Q. On suppose que O, P, Q sont distincts et on note x la valeur du plus petit angle formé par les deux droites (OQ) et (PQ). Que vaut x ? Allez chercher une énigme à la case correspondant à x (x étant exprimé en degrés).

Exercices avancés

Exercice 17 M est un sous-ensemble de $\{1, 2, ..., 15\}$ tel que le produit de 3 éléments distincts de M ne soit jamais un carré. Trouver le nombre x maximal d'éléments que peut avoir M. Que vaut x ?

Allez chercher une énigme à la case correspondant au nombre (les angles sont en degrés) :

$$\frac{15\left\lfloor 10\sin\left(\left\lfloor \frac{13x^3+4x+2}{3x+3} + 10\right\rfloor\right)\right\rfloor^2 + 7\left\lfloor \frac{20x^3+1}{x^4+2x}\right\rfloor^{\lfloor\sqrt{2x}/12\rfloor^5 - \lfloor 10\sin(\sqrt{21x})\rfloor}}{2}.$$

Exercice 18 Soit n un entier strictement positif. Une suite de n entiers strictement positifs est dite *fort sympathique* si elle vérifie la condition suivante : pour tout entier positif $k \geq 2$, si le nombre k apparaît dans la suite, alors il en est de même pour $k-1$ et, de plus, la première apparition de $k-1$ apparaît avant la dernière apparition de k. Combien y a-t-il de suites fort sympathiques de longueur 8 ? Allez chercher une énigme à la case correspondant à la partie entière de la racine de ce nombre.

Exercice 19 Trouver la plus grande valeur M que peut prendre l'expression $7x+10y+z$ lorsque x, y, z sont des nombres réels vérifiant $x^2+2x+\frac{1}{5}y^2+7z^2=6$. Quels sont les cas où cette valeur est atteinte ? Allez chercher une énigme à la case correspondant à M.

Exercice 20 À l'intérieur d'un triangle équilatéral ABC, on construit des points P, Q, R tels que :

$$\begin{aligned}\widehat{QAB} = \widehat{PBA} = 15^\circ\\ \widehat{RBC} = \widehat{QCB} = 20^\circ\\ \widehat{PCA} = \widehat{RAC} = 25^\circ.\end{aligned}$$

Trouver les angles du triangle PQR. Allez chercher une énigme à la case correspondant au nombre (les angles sont en degrés) $\widehat{RPQ} + \widehat{QRP}$.

Exercice 21 Trouvez le plus petit entier strictement positif n vérifiant les deux propriétés suivantes :

1. n a exactement 144 diviseurs strictement positifs distincts,
2. parmi les diviseurs strictement positifs de n, il y a dix entiers consécutifs.

Allez chercher une énigme à la case correspondant à la partie entière de $\sqrt{n}$.

Exercice 22 Soit n un entier strictement positif. Soit m_n le plus grand réel vérifiant la propriété suivante : « Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des entiers deux à deux différents. Pour tout polynôme $F(x)$ unitaire de degré n à coefficients entiers, au moins un des nombres $|F(x_0)|, |F(x_1)|, \ldots, |F(x_n)|$ est supérieur ou égal à m_n. ».

Allez chercher une énigme à la case correspondant à la partie entière de m_9.

Exercice 23 Déterminer les 10 premiers chiffres après la virgule de

$$(5+\sqrt{26})^{100}$$

Soit s la somme de ces 10 chiffres.

Allez chercher une énigme à la case correspondant à :

$$\frac{s \times a \times b \times d \times f \times e}{c \times g \times h},$$

où :

- a est la pointure d'Igor,
- b est le nombre de pièces de la maison d'Emmanuel
- c est le nombre formé par les deux derniers chiffres du téléphone portable de Pierre,
- d est le nombre d'oreilles de François,
- e est l'index téléphonique du pays d'origine d'Ilia,
- f est le nombre de frères ou soeurs d'Antoine,
- g est le nombre de cours/TD/TND donnés par Bodo lors de ce stage,
- h est le numéro de la classe où Louis était en deuxième année de Classes Préparatoires.

Exercice 24 Lo Jac' le pirate possède un tapis rectangulaire de dimensions inconnues. Malheureusement, une tique a kidnappé sa règle et il n'a pas d'autre appareil pour mesurer des longueurs. Toutefois, il remarque qu'il peut placer son tapis (à plat) dans deux pièces rectangulaires de son château de Grésillon de sorte que chaque coin de tapis touche un mur différent des pièces. Il sait aussi que les longueur et largeur de son tapis sont un nombre entier de pieds, que les largeurs de ces deux pièces sont respectivement 38 pieds et 50 pieds et que les longueurs de ces deux pièces sont les mêmes (la valeur exacte est inconnue). Allez chercher une énigme à la case correspondant à la longueur de son tapis.

3 Solutions

Énigmes communes

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>

1. Deux élèves traversent.
2. Un élève revient.
3. Un élève et un GO traversent.
4. Un GO revient.
5. Deux GO traversent.
6. Un élève revient.
7. Un élève et un GO traversent.
8. Un élève revient.
9. Deux élèves traversent.

Solution de l'exercice 2 Il faut que A dise l'état de B (il dit oui si B a une tique, et non sinon), et que B dise le contraire de l'état de A. Alors, si A et B sont dans le même état, A aura raison (et B aura tort), et si A et B sont dans des états différents, c'est B qui aura raison (et A aura tort).

Solution de l'exercice 3 On appelle A, B, C et D les personnes de vitesse respectives 1, 2, 5 et 10. L'idée est de faire traverser ensemble les personnes les plus lentes, C et D, pour ne pas avoir à faire de trajet de 5 minutes. On procède comme suit :

1. On fait traverser A et B, on a utilisé 2 minutes.
2. A revient avec la torche, on a utilisé 3 minutes.
3. C et D traversent ensemble, on a utilisé 13 minutes.
4. B revient avec la torche, on a utilisé 15 minutes.
5. A et B traversent le pont, on a terminé, en 17 minutes.

Solution de l'exercice 4 Il suffit de mettre à part un tas de 80 pièces, et de retourner toutes les pièces de ce tas. En effet, si le petit tas de 20 pièces contient a piles, alors le gros tas en contient $80 - a$, et donc $80 - (80 - a) = a$ après retournement.

Solution de l'exercice 5 On appelle A, B et C, les pichets contenant respectivement 16, 9 et 7 litres.

1. On vide A dans B. $A = 7$, $B = 9$ et $C = 0$.
2. On vide B dans C. $A = 7$, $B = 2$ et $C = 7$.
3. On vide C dans A. $A = 14$, $B = 2$ et $C = 0$.
4. On vide B dans C. $A = 14$, $B = 0$ et $C = 2$.
5. On vide A dans B. $A = 5$, $B = 9$ et $C = 2$.
6. On vide B dans C. $A = 5$, $B = 4$ et $C = 7$.
7. On vide C dans A. $A = 12$, $B = 4$ et $C = 0$.
8. On vide B dans C. $A = 12$, $B = 0$ et $C = 4$.
9. On vide A dans B. $A = 3$, $B = 9$ et $C = 4$.
10. On vide B dans C. $A = 3$, $B = 6$ et $C = 7$.

11. On vide C dans A. $A = 10$, $B = 6$ et $C = 0$.
12. On vide B dans C. $A = 10$, $B = 0$ et $C = 6$.
13. On vide A dans B. $A = 1$, $B = 9$ et $C = 6$.
14. On vide B dans C. $A = 1$, $B = 8$ et $C = 7$.
15. On vide C dans A. $A = 8$, $B = 8$ et $C = 0$.

Solution de l'exercice 6 La réponse est 6, malheureusement elle est difficile à visualiser sans dessin. L'idée est de former une sorte de coin avec trois livres, puis un autre, et d'emboîter ces deux coins. Au final, il doit rester trois cubes de côté 1 libres dans le gros cube : un au centre, et deux dans deux coins opposés, là où l'on a mis les groupements de trois libres.

Solution de l'exercice 7 On essaie de lancer la première noix de coco à partir des étages 5, 9, 12, 14 et 15, en s'arrêtant bien sûr dès qu'elle casse. Si par exemple elle a cassé quand lancée de l'étage 9, on sait que l'étage limite est entre 6 et 9, et pour le déterminer, on lance la seconde noix de coco depuis les étage 6, 7 puis 8. On procède de la même manière pour les autres cas.

Solution de l'exercice 8 On teste trois groupes de tests disjoint, que l'on nomme A, B et C. La machine montre 3 pièces. On teste ces trois pièces. Il est facile de se convaincre que la pièce montrée est fausse. Supposons par exemple que cette pièce appartient au groupe A. Il n'y a plus que 5 pièces pouvant être fausses : les deux autres pièces du groupe A, la pièce montrée du groupe B, la pièce montrée du groupe C, et la dernière pièce. On montre 3 quelconques de ces pièces à la machine, qui montre une pièce, et on montre à la machine cette pièce, avec les deux dernières pièces suspectes. La pièce montrée est toujours la deuxième fausse pièce.

Exercices débutants

Solution de l'exercice 9 Commençons par compter le nombre de 0 dans les unités : il y en a $\frac{2010}{10} = 201$. Calculons le nombre d'entiers du type $x0y$ avec $x \neq 0$: il y en a $9 \times 10 = 90$. Calculons maintenant le nombre d'entiers de type $1y0z$: il y en a $10 \times 10 = 100$. De même le nombre d'entiers de la forme $10xz$ est 100. Enfin il y a 21 zéros (différents des dizaines) de 2000 à 2010. En tout il y a donc $201 + 90 + 100 + 100 + 21 = 512$ zéros.

Solution de l'exercice 10

Montrons que le nombre de maximal de tours est 11. Déjà le nombre maximal est ≤ 11. En effet par récurrence, au tour i, 2^i divise chaque butin. Donc $i \leq 11$. Réciproquement, si il y a 2 pirates dont un a 1 pièce et l'autre a 2047 pièces. Comme $2048 = 2^{11}$ il y a exactement 11 tours.

Solution de l'exercice 11

La réponse est 99. En effet, une méthode pour obtenir 99 cases libre est de considérer les diagonales du damier. Chaque tique échange sa place avec la tique dans la direction Sud-Est pour les diagonales avec un nombre pair de cases et de même pour les diagonales avec un nombre impair de cases, sauf qu'une case devient vide et une autre contient deux tiques. Réciproquement, il suffit de colorier les colonnes en deux couleurs (disons noir et blanc). Les tiques initialement sur une colonne noire vont sur une colonne blanche et réciproquement. Il y a 50 colonnes noires et 49 blanches. Les tiques initialement blanches vont devoir occuper les 50 colonnes noires, donc au moins $99 \times (50 - 49) = 99$ cases seront libres.

Solution de l'exercice 12
Le deuxième contrôleur est sûr de tout vendre. En effet, si une personne a été désignée deux fois, il la choisit et sinon il contrôle une personne qui n'a jamais été désignée. Il peut toujours appliquer cette stratégie car 2010 est pair.

Solution de l'exercice 13
Le numéro de la lampe cherchée est le plus grand entier inférieur ou égal à 2010 ayant un nombre impair de diviseurs. Or si un nombre est de la forme $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$, son nombre de diviseur est $(\alpha_1+1)(\alpha_2+2)...(\alpha_k+1)$ donc est impair si et seulement si les α_i sont pairs, c'est à dire n est un carré parfait. Or le plus grand carré parfait inférieur ou égal à 2010 est $44^2 = 1936$ d'où le numéro cherché est 1936.

Solution de l'exercice 14
La probabilité cherchée est $\frac{1}{2}$. En effet, pour $N = 2$, clairement le passager numéro 2 a une chance sur 2 de s'assoir à sa place. Supposons donc par récurrence forte que la probabilité cherchée est $p_{n-i} = \frac{1}{2}$ pour $i \in \{1, ..., n-1\}$. Alors le vieux pirate a 1 chance sur n de s'assoir à la place 1, à la place 2, ..., à la place n. Si le vieux pirate s'assoit à la place i, la probabilité que la dernier s'assoit à sa place est p_{n-i} (car les personnes entre 1 et $i-1$ s'assoient à leur place, et si le i s'assoie à la place de 1 (place du vieux pirate initialement), il ne gène personne donc on est ramené à une situation au rang $n-i$ où i joue le rôle du vieux pirate). Donc $p_n = \frac{1}{n}p_{n-1} + \frac{1}{n}p_{n-2} + ... + \frac{1}{n}p_1 = (\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2}) \cdot n = \frac{1}{2}$ d'où le résultat.

Solution de l'exercice 15
La réponse est 44 reines. En effet, une reine menace 21 cases au minimum donc si il y a strictement plus que $(64-21) = 43$ reines, chaque reine menace au moins une autre. Réciproquement, on trouve une situation de 43 reines où une reine ne menace aucune autre : on place une reine dans le coin en haut à gauche, on ne place aucune reine dans les endroits menacés par cette reine (i.e la première ligne et la première colonne ainsi que la diagonale Sud-Est). Cette première reine ne menace aucune autre.

Solution de l'exercice 16
On a $\widehat{AQD} = \widehat{AQP} + \widehat{PQD} = \widehat{ABP} + \widehat{ACD} = 2\widehat{ABP} = \widehat{AOD}$. Par conséquent les points A, O, Q et D sont cocycliques, d'où $\widehat{OQP} = \widehat{OQA} + \widehat{AQP} = \widehat{ODA} + \widehat{ABD} = \widehat{ODA} + \frac{1}{2}\widehat{AOD} = \frac{\pi}{2}$ car le triangle AOD est isocèle en O, d'où la conclusion.

Exercices avancés

Solution de l'exercice 17 Le produit de 3 éléments de $\{1,4,9\}$, $\{2,6,12\}$, $\{3,5,15\}$ et $\{7,8,14\}$ est un carré donc aucun d'eux ne peut être un sous-ensemble de M. Comme ils sont disjoint, on a Card(M)≤ 11.

Si $10 \notin M$ alors $|M| \leq 10$. Sinon $10 \in M$. Dans ce cas, aucun des ensembles $\{2,5\}$, $\{6,15\}$, $\{1,4,9\}$, $\{7,8,14\}$ n'est un sous-ensemble de M. Si 3 ou 12 ne sont pas dans M, on a $|M| \leq 10$. Sinon $\{3,12\} \subseteq M$ et donc $1 \notin M$. Enfin, $M \leq 10$.

Ainsi, dans tous les cas $M \leq 10$. Et finalement on vérifie que $\{1,4,5,6,7,10,11,12,13,14\}$ a la propriété désirée. Donc la valeur maximal de $|M|$ est 10.

<u>*Solution de l'exercice 18*</u> Notons $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, n\}$ et F_n l'ensemble des suites fort sympathiques de longueur n. On construit une bijection entre $\mathfrak{S}_n$ et F_n comme suit.

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et construisons une suite fort sympathique à partir de σ. On pose d'abord $a_{\sigma(1)} = 1$. Ensuite, si $a_{\sigma(j)} = i$ et $\sigma(j+1) < \sigma(j)$, on pose $a_{\sigma(j+1)} = i$ et dans le cas contraire on pose $a_{\sigma(j+1)} = i + 1$. On vérifie que par construction $a_1, \ldots, a_n$ est fort sympathique.

Réciproquement, partons d'une suite fort sympathique $a_1, \ldots, a_n$ et construisons une permutation. On commence par ranger dans l'ordre décroissant les positions des entiers égaux à 1 dans la suite fort sympathique, qu'on fait suivre par les positions, rangées dans l'ordre décroissant, des entiers égaux à 2 dans la suite fort sympathique, et ainsi de suite. On obtient bien une permutation de longueur n.

Le lecteur se convaincra que ces deux opérations sont inverses l'une de l'autre, et donc sont des bijections, ce qui établit à fortiori l'égalité des cardinaux.

<u>*Solution de l'exercice 19*</u> La contrainte peut se réécrire $(x+1)^2 + \frac{1}{5}y^2 + 7z^2 = 7$. On va utiliser Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} (7(x+1) + 10y + z)^2 &\leq \left(7^2 + 5 \cdot 10^2 + \frac{1}{7}\right)\left((x+1)^2 + \frac{1}{5}y^2 + 7z^2\right) \\ &= \left(549 + \frac{1}{7}\right) \cdot 7 = 3844 = 62^2. \end{aligned}$$

le maximum est atteint lorsque $((x+1), \frac{1}{\sqrt{5}}y, \sqrt{7}z)$ est proportionnel à $(7, 10\sqrt{5}, \frac{1}{\sqrt{7}})$ où la constante de proportionnalité est choisie pour que (x, y, z) vérifie la contrainte imposée. On trouve alors $M = 62 - 7 = 55$, avec un unique cas d'égalité : $(x, y, z) = (-13/62, 175/31, 1/62)$.

<u>*Solution de l'exercice 20*</u> (Solution d'Andrea Bianchi) Soient I, J, K, L, M, N les points d'intersection des droites (CQ), (CP), (BP), (BR), (AR), (AQ) respectivement avec les côtés du triangle ABC (voir figure).

On remarque que $\widehat{IBP} = 15 = \widehat{ICP}$, donc $IBCP$ est inscriptible. Pour la même raison, $JACQ$, $KABR$, $LCBP$, $MCAQ$ et $NBAR$ sont tous inscriptibles. On a donc : $\widehat{PIQ} = \widehat{PIC} = \widehat{PBC} = 45 = \widehat{QAC} = \widehat{QJC} = \widehat{QJP}$, donc $IJPQ$ est lui aussi inscriptible, de même que, par un calcul analogue, $KLRP$ et $MNQR$. Dans le triangle IBC, $\widehat{BIC} = 100$, et dans le cercle circonscrit à $IJPQ$, $\widehat{QIJ} + \widehat{QPJ} = 180$, si bien que $\widehat{QPC} = 80$. Or $\widehat{BPC} = 100$, donc $\widehat{BPQ} = 20$. De même, $\widehat{AQP} = 10$, $\widehat{ARP} = 30$, $\widehat{CPR} = 20$, $\widehat{CQR} = 10$, $\widehat{BRQ} = 30$. Il en résulte que $\widehat{PQR} = \widehat{AQC} - \widehat{AQP} - \widehat{CPR} = 75$ et, de même, $\widehat{QRP} = 45$ et $\widehat{RPQ} = 60$.

<u>*Solution de l'exercice 21*</u> Parmi 10 entiers consécutifs il y a forcément un multiple de 8, un de 9, un de 5 et un de 7. Donc n est au moins divisible par $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Écrivons la factorisation en facteurs premiers de n :

$$n = 2^{\alpha_2} 3^{\alpha_3} 5^{\alpha_5} 7^{\alpha_7} 11^{\alpha_{11}} \ldots$$

Le nombre des diviseurs de n est alors

$$(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)(\alpha_5 +)(\alpha_7 + 1)(\alpha_{11} + 1) \cdots \geq 48 \cdot (\alpha_{11} + 1) \ldots$$

Cette quantité égale à 144, donc $(\alpha_{11} + 1) \cdots \leq 3$, il y a donc au plus un α_p non nul pour les p supérieurs à 5, et par soucis de minimalité ce sera α_{11}. En étudiant un peu on arrive aux deux possibilités suivantes : $n = 2^5 3^3 5^2 7 = 151200$ et $n = 2^3 3^2 5^2 7 \cdot 11 = 110880$. La deuxième est la meilleure.

Solution de l'exercice 22 En remarque préliminaire, on peut faire en sorte que $x_0 < x_1 < \dots x_n$. Regardons les valeurs $(y_0, y_1 \dots, y_n)$ pour $F(x_0), F(x_1), \dots F(x_n)$ et construisons $L(X)$ comme le polynôme d'interpolation de Lagrange qui passe par ces points. Comme F est de degré n, $L = F$. La formule donne

$$F(X) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(X - x_0)\dots\widehat{(X - x_i)}\dots(X - x_n)}{(x_i - x_0)\dots\widehat{(x_i - x_i)}\dots(x_i - x_n)}$$

où le terme $a_0 \dots \widehat{a_i} \dots a_n$ signifie qu'on fait le produit de tous les termes sauf le i-ième. Maintenant regardons a_n le coefficient dominant de $F(X)$

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{(x_i - x_0)\dots\widehat{(x_i - x_i)}\dots(x_i - x_n)}$$

On note $m = \max |y_i|$, on sait que $a_n = 1$, donc on a l'inégalité suivante :

$$1 = a_n \leq m \sum_{i=0}^{n} \left| \frac{1}{(x_i - x_0)\dots\widehat{(x_i - x_i)}\dots(x_i - x_n)} \right|$$

Il reste à évaluer le produit $|(x_i - x_0)\dots\widehat{(x_i - x_i)}\dots(x_i - x_n)|$. Comme les x_i sont rangés dans l'ordre et que ce sont des entiers distincts, $|x_i - x_j| \geq |i - j|$ et donc $|(x_i - x_0)\dots\widehat{(x_i - x_i)}\dots(x_i - x_n)| \geq i!(n-i)!$.

$$1 \leq m \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!(n-i)!}$$

Pour calculer ce dernier terme on utilise la formule du binome :

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

Donc finalement :

$$m \geq \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!(n-i)!} \right)^{-1} = \frac{n!}{2^n}$$

On peut donc affirmer que pour tout $(n+1)$-uplet et tout polynôme unitaire, le maximum est au moins $\frac{n!}{2^n}$. Si on arrive maintenant à montrer que cette valeur est atteinte, c'est bingo. Je laisse au lecteur le loisir de se convaincre que si on prend $y_i = \frac{(-1)^i n!}{2^n}$ ca marche.

Solution de l'exercice 23 On va développer l'équation grace à la formule du binôme :

$$(5 + \sqrt{26})^{100} = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} 5^k \sqrt{26}^{100-k}$$

et on regarde la même chose avec $(5 - \sqrt{26})$ à la place de $(5 + \sqrt{26})$

$$(5 - \sqrt{26})^{100} = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} 5^k (-1)^k \sqrt{26}^{100-k}$$

Enfin, en additionnant les deux, on voit que tous les termes en $\sqrt{26}$ s'annulent, et il reste un entier. Finalement, remarquons que $(\sqrt{26}-5) < 0.1$, donc $|(5-\sqrt{26})^{100}| < 10^{-100}$ et $(5+\sqrt{26})^{100} = n-\epsilon$ avec n un entier et ϵ de l'ordre de 10^{-100}, donc les 10 premiers chiffres après la virgule sont tous des 9.

Solution de l'exercice 24 Nommons d'abord les variables que l'on cherche : x et y la longueur et la largeur du tapis, et d la longueur commune des deux pièces. Maintenant, on place le tapis $EFGH$ dans la salle rectangulaire $50 \times d$ $ABCD$, avec $E \in [AB]$, $F \in [BC]$, etc. On note toutes les longueurs : $AB = 50$, $AE = a$, $BC = d$, $AH = CF = b$, $EF = y$, $FG = x$. On note ensuite $k = \frac{y}{x}$. On voit que les triangles AEH, BFE, CGF, DHG sont semblables avec des rapports de $1, k$ ou $1/k$.Cela permet de voir que $EB = kb$ et $DH = ka$, on a donc le système à deux équations $a + kb = 50$ et $ka + b = q$, et on en déduit la valeur de a et b :

$$a = \frac{qk-50}{k^2-1} \quad \text{et} \quad b = \frac{50k-q}{k^2-1}$$

$$x^2 = a^2 + b^2 = \frac{(qk-50)^2 + (50k-q)^2}{(k^2-1)^2}$$

En mettant le tapis dans l'autre salle on obtient

$$x^2 = a^2 + b^2 = \frac{(qk-38)^2 + (38k-q)^2}{(k^2-1)^2}$$

Ces deux expressions sont égales, on a donc

$$(qk-50)^2 + (50k-q)^2 = (qk-38)^2 + (38k-q)^2$$

Ce qui donne aprés simplification

$$kq = 22(k^2+1)$$

En écrivant k sous forme irréductible $\frac{c}{d}$ avec $PGCD(c, d) = 1$, on développe tout,

$$cdq = 22(c^2 + d^2)$$

donc c et d divisent 22. Ceci donne comme conditions possibles

$$k = \frac{1}{22}, \frac{1}{11}, \frac{2}{11}, \frac{1}{2}, 1, 2, \frac{11}{2}, 11, 22$$

Comme k et $1/k$ donnent le même résultat il suffit de vérifier $1, 2, \frac{11}{2}, 11, 22$. Je laisse au lecteur le soin de vérifier que seul $k = 2$ donne une solution entière et qu'alors $x = 25$, $y = 50$.

VIII. Citations mémorables

- « J'imagine que vos parents n'ont pas un ordre total, donc ils ne peuvent vous demander qu'un ordre partiel, or ça, vous l'avez déjà » [Bodo]
- « La chambre de Vincent est partiellement ordonnée » [Michel]
- – « C'est merveilleux pour vous que ces deux théorèmes existent » [Bodo]
  – « Ça permet de ranger les chambres » [Michel]
  – « D'aprés le théoréme de Séginus, ça prend plus de temps d'expliquer ça aux parents que de ranger la chambre » [Vincent]
- – Au tableau : « Un probléme est dans NP (respectivement $Co - NP$) si et seulement si on peut convaincre rapidement les parents que la réponse est oui (respectivement non) »
  – « Quelque chose me dit que ce n'est pas la vraie définition ... » [Vincent]
- A propos du théorème du mariage :
  – « On a quelques hommes et quelques femmes... » [Bodo]
  – « Quelques ? ! ? Ah non, beaucoup » [Michel]
- – Au mois de février, les pays proposent un sujet, l'envoient (avec la solution !), et le pays organisateur va ensuite établir et dévoiler une présélection ». [François]
  – « Et publiera les sujets sur le net juste après » [Michel]
- En parlant d'une longue démonstration : « En attendant Bodo »
- « Un 7 est toujours congru à 0 modulo 3 » [Mathieu en jouant à set]
- « C'est vrai ...deux fois vrai, puisqu'on l'a prouvé deux fois » [Pierre]
- « Je le fais pas, parce qu'il y a des sommes partout, des logs...beurk. Croyez-moi, c'est vrai » [Pierre]
- «
  – Maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwartz... [Pierre]
  – Santé ! Schwarz, ça s'écrit sans t ! » [Michel]
- « Pour un polyèdre pas tout à fait régulier, c'est peut-être pas tout à fait vrai... » [Ilia]
- « Imaginez un hypercube accroché par une hyperficelle à un hyperplafond ». [Ilia]
- « Tu peux écrire plus fort, s'il te plaît ? » [Michel]
- « Merci à Ilia pour cette hyperconférence qui a cloturé cette hyperjournée ! » [François]
- « Les hyperboles, ça sert à boire de l'hypersoupe » [Antoine]
- « Est-ce-que vous connaissez le théorème de Dirichlet ? Parce qu'il permet de tôrcher le 7 » [Emmanuel]
- « Je peux venir formaliser ça proprement » [Vincent ? ! ?]
- « Je vais modifier un peu l'énoncé, parce que sinon la preuve devient un peu trop complexe avec ma méthode. » [Emmanuel]
- « Est-ce-que la chambre de vos fenê ...euuhh les fenêtres de vos chambres sont fermées ? » [Antoine]
- – « Fermées, ça veut bien dire... » [Vincent]

  – « OK ! Ta gueule ! » [Antoine]
- « La physique kantique, c'est la physique de Kant ? »[Anonyme]
- – « Et si on allait en cours ? »
  – « Pour quoi faire ? » [Un joueur de cartes]
- – « Y a-t-il une vie après les maths ? » [Jérémy]
  – « Y a-t-il des maths après la vie ? » [Jérémy]
- « Tu te fais prêter des chaussures, ou bien tu mets des chaussettes ou bien tu marches sur les mains … » [Igor à Vincent]
- « Si tu mets la bougie dans le même plan, c'est le problème que cette branche pourrait commencer à brûler » [Bodo]
- ... ?... (really sounds funny , but impossible to understand) [Walid trying to speak italian]
- « Sur votre table vous voyez une carte de la réalité projective mais il vous manque quand même la droite à l'infini que vous voyez mal » [Bodo]
- « Vous pouvez faire ça pendant la journée mais uniquement si vos parents sont absents » [Bodo]
- « Et maintenant vous faites appel au soleil pour que son rayon soit en direction de (CC') » [Bodo]
- « Entre deux entiers consécutifs il n'y a pas d'entier » [François]
- – « Il reste -39 minutes ! » [Vincent]
  – « Ah d'accord ! Ça suffit largement » [Bodo]
- – « Et classiquement, on fait ça comment ? » [Michel à propos de la démonstration projective du théorème de Ménélaüs]
  – « Aujourd'hui on ne fait pas de preuves idiotes ! » [Bodo]
- « Ça c'est l'extrême gauche…Ça c'est l'extrême droite…Comme vous le voyez, ça revient, donc extrême gauche = extrême droite » [Bodo]
- « Le mao est un jeu de 3 cartes qui commence à gauche du dealer et qui commence …maintenant ! » [beaucoup de monde]
- « Comme vous le savez, les prix Nobel de physique, chimie …sont souvent décernés à des gens un peu vieux …qui ressemblent un peu à rien » [Igor]
- « Quand on est mathématicien, il faut être vieux pour être riche » [Igor]
- « Tout le monde, euh …voit rien, c'est ça ? » [Igor]
- « Alors, qu'est-ce-que la percolation ? Eh bien on va percoler » [Igor]
- « Est-ce que quelqu'un a une craie rouge dans sa poche ? » [Igor]
- « Comme f est bijective et suffisamment gentille, comme je peux regarder suffisamment près de ce point, tout se passe assez gentiment » [Igor]
- « Un domaine simplement connexe…ou une patate sans trou » [Igor]
- – « Y'a pas du tout de probabilités en classe préparatoire »
  – « OUF ! » [Michel]
- « Ils sont où Cochon Machin et Cochonne Machine ? On les a pas trop vus depuis tout à l'heure ! [Antoine, à une heure avancée de la rédaction du poly]

IX. Annexe : test de sélection au stage de Grésillon 2010

Exercice 1

Enoncé. Soient $q > r > 0$ deux nombres rationnels tels que $\sqrt{q} - \sqrt{r}$ soit lui aussi rationnel. Démontrer que, dans ce cas, $\sqrt{q}$ et $\sqrt{r}$ sont eux-mêmes des nombres rationnels.

Première démonstration

On sait que q et r sont rationnels. Donc $q-r$ est rationnel. De plus le quotient de deux nombres rationnels est rationnel. Or par hypothèse $\sqrt{q} - \sqrt{r}$ est un rationnel **non nul** (car $\sqrt{q} - \sqrt{r} > 0$). On en déduit que $\frac{q-r}{\sqrt{q}-\sqrt{r}}$ est rationnel. On sait aussi que $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ donc si on pose $a = \sqrt{q}$ et $b = \sqrt{r}$, on obtient : $q - r = (\sqrt{q} - \sqrt{r})(\sqrt{q} + \sqrt{r})$ donc $\sqrt{q} + \sqrt{r} = \frac{q-r}{\sqrt{q}-\sqrt{r}}$. Donc $\sqrt{q} + \sqrt{r}$ est rationnel. D'où $(\sqrt{q} + \sqrt{r}) + (\sqrt{q} - \sqrt{r}) = 2\sqrt{q}$ est rationnel donc $\sqrt{q}$ est rationnel. Et de même $(\sqrt{q} + \sqrt{r}) - (\sqrt{q} - \sqrt{r}) = 2\sqrt{r}$ est rationnel donc $\sqrt{r}$ est rationnel. D'où le résultat.

Deuxième démonstration

On pose $s = \sqrt{q} - \sqrt{r}$ qui est un rationnel **non nul** par hypothèse. Donc $\sqrt{q} = s + \sqrt{r}$ donc en élevant au carré on obtient : $q = s^2 + r + 2s\sqrt{r}$. Donc $\sqrt{r} = \frac{q-s^2-r}{2s}$. Comme q, s et r rationnels, $q - s^2 - r$ et $2s$ rationnels, donc $\sqrt{r}$ rationnel. Donc $\sqrt{q} = \sqrt{r} + s$ est rationnel (car s et $\sqrt{r}$ sont rationnels). D'où le résultat.

Exercice 2

Enoncé.
Soit $ABCD$ une table de billard rectangulaire, munie de rebords élastiques et de trous aux sommets A, B, C, D du rectangle, dont les dimensions vérifient : $AB = CD = 200$cm, $BC = DA = 150$cm. Soit P le point du côté CD tel que $CP = 80$cm, $PD = 120$cm. Un joueur fait rouler une boule de A vers P. Démontrer qu'après six réflexions sur les côtés du rectangle, la boule tombe dans le trou C.

Solution.
Soit A_1B_1CD le symétrique $ABCD$ par rapport à (CD). On remarque que le deuxième point de rebond de la boule sur un côté de $ABCD$ est le symétrique de l'intersection P_2 de (AP)

avec un côté de A_1B_1CD par rapport à (CD). Puis on fait de même le symétrique $A_2B_1CD_1$ de A_1B_1CD par rapport à (B_1C), etc... . (voir figure IX).

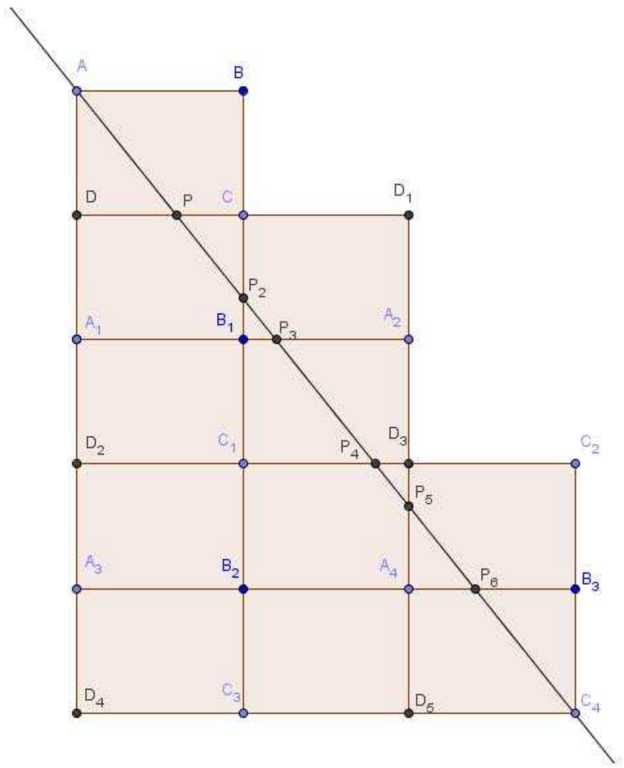


FIG. 1 – Constructions pour l'exercice 2.

Il y a une correspondance entre A et les A_i, B et les B_i, ..., Det les D_i. Il suffit donc de montrer que $P_7 = C_i$ pour un certain i. Montrons en effet que (AP) passe par C_4. Soit E le point d'intersection de (AP) et de (D_4C_4). Par le théorème de Thalès, on a : $\frac{AD}{AD_4} = \frac{DP}{D_4E}$ donc $\frac{DP}{D_4E} = \frac{1}{5}$ donc $D_4E = 5DP = 600cm = 3DC = D_4C_4$. Donc $E = C_4$. D'où $E = P_7 = C_4$ d'où le résultat.

Exercice 3

Enoncé.

Trouver tous les nombres entiers x, y, z qui vérifient : $1 < x < y < z$ et $x + y + z + xy + yz + zx + xyz = 2009$.

Solution.

L'idée est de factoriser le terme de gauche de l'égalité de sorte à obtenir une relation de divisibilité entre le terme de gauche et le terme de droite (qui sera un nombre entier fixé et dont on connaîtra les diviseurs).

On remarque que $x + y + z + xy + xz + yz + xyz = (1 + x)(1 + y)(1 + z) - 1$. L'égalité se réécrit donc : $(1 + x)(1 + y)(1 + z) = 2010 = 2 \times 3 \times 5 \times 67$ (décomposition en facteurs premiers de 2010). Comme $2 < 1+x < 1+y < 1+z$, obtient : $(1+x=3,\ 1+y=2\times 5,\ 1+z=67)$ ou $(1+x=3,\ 1+y=5,\ 1+z=2\times 67)$ ou $(1+x=5,\ 1+y=2\times 3,\ 1+z=67)$. Les couples (x,y,z) solutions sont donc : $(2,9,66)$, $(2,4,133)$ et $(4,5,66)$.

Exercice 4

Enoncé.
Huit équipes participent à un tournoi. Chaque équipe joue une et une seule fois contre chacune des autres équipes, et il n'y a pas de match nul.

a) Démontrer qu'il existe forcément quatre équipes A, B, C, D telles que A ait gagné contre B, C et D, B ait gagné contre C et D et C ait gagné contre D.

b) Peut-on affirmer la même chose s'il n'y a que sept équipes participant au tournoi ?

Solution.
a) Puisqu'il y a 8 équipes dans le tournoi, 28 matchs seront donc joués et donc il y aura 28 victoires, en tout, à répartir. Or, si aucune équipe ne gagnait plus de 3 matchs, cela ne donnerait qu'au plus $3 \times 8 = 24$ victoires. On en déduit qu'au moins une équipe, appelons-la A, a gagné au moins quatre matchs. Ne considérons maintenant plus que quatre équipes battues par A. Entre elles, ces équipes disputent 6 matchs et le raisonnement ci-dessus s'adapte directement pour conclure qu'une des ces quatre équipes, appelons-la B, en a battu deux parmi les trois autres. Appelons X et Y les deux équipe battues par B (et, rappelons-le, déjà battues par A). Le vainqueur du match entre X et Y est alors appelé C et le perdant est appelé D. Ainsi, A a battu B, C, D, et B a battu C, D, et C a battu D.

b) Comme on va le voir la conclusion n'est plus assurée pour un tournoi à 7 équipes. Pour prouver cela, il suffit de construire un exemple de tournoi à 7 équipes dans lequel il n'existe pas 4 équipes vérifiant les conditions du a). Plutôt que de partir un peu au hasard, regardons de plus près le raisonnement du a). Si une équipe a gagné au moins 4 matchs, tout se met en place et l'on conclurait comme au a). Il faut donc que dans notre tournoi aucune équipe n'ait gagné plus de trois matchs, et puisqu'avec 7 équipes il y a 21 matchs joués, cela signifie qu'il faut que chaque équipe ait gagné exactement trois matchs. Pour une équipe donnée, si parmi les trois équipes qu'elle a battu, l'une a battu les deux autres, la conclusion du a) est conservée. Il faut donc que, pour chaque équipe, les trois qu'elle a battues se soient battues entre elles en cycle $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X$. Le même raisonnement montre également que, pour chaque équipe, les trois qui l'ont battue se sont également battues entre elles en cycle. Avec tout cela, il n'est alors plus difficile de construire un tournoi à 7 équipes qui ne satisfait pas la conclusion du a) : On numérote les équipes 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 et on raisonne modulo 7. L'équipe n gagne contre $n+1$, $n+2$ et $n+4$, et perd contre $n-1$, $n-2$ et $n-4$. Cet exemple convient : Si A est l'équipe n, alors B, C et D sont forcément les équipes $n+1$, $n+2$ et $n+4$. Mais $n+1$ a battu $(n+1)+1 = n+2$, $n+2$ a battu $(n+2)+2 = n+4$ et $n+4$ a battu $(n+4)+4 = n+1$: c'est la contradiction cherchée.

Exercice 5

Enoncé. Soit n un entier strictement positif, qui n'est pas un carré parfait (c'est-à-dire : qui n'est pas le carré d'un entier). En regardant l'écriture décimale de $\sqrt{n}$, on constate que les k premières décimales ont toutes la même valeur v (par exemple, si $n = 48273160$, dans $\sqrt{n} = 6947,88888800044067...$, les 6 premières décimales sont égales à 8, donc $k = 6$ et $v = 8$).

(a) Si v = 0 ou v = 9, démontrer que $\sqrt{n} > \frac{10^k}{2}$.

(b) Pour toutes les valeurs de v, démontrer que $\sqrt{n} > \frac{10^k}{144}$.

Solution. a) Nous pouvons supposer que $k \geq 1$. Comme $v = 0$ ou $v = 9$, il existe un entier $m > 0$ tel que $\sqrt{n} = m + \epsilon$ avec $|\epsilon| \leq 10^{-k}$ et $\epsilon \neq 0$. L'identité $n = m^2 + 2m\epsilon + \epsilon^2$ implique $1 \leq |n - m^2| = |\epsilon| \cdot |2m + \epsilon|$ et donc $2m + \epsilon \geq 10^k \iff m \geq \frac{10^k}{2} - \frac{\epsilon}{2}$. Si $\epsilon > 0$, alors $m \geq \frac{10^k}{2}$ (m entier), i.e. $\sqrt{n} = m + \epsilon > \frac{10^k}{2}$. Si $\epsilon < 0$, alors $m \geq \frac{10^k}{2} + 1$, i.e. $\sqrt{n} \geq \frac{10^k}{2} + 1 + \epsilon > \frac{10^k}{2}$.

b) Nous pouvons supposer que $k \geq 3$ (pour $k \leq 2$, $\frac{10^k}{144} < 1$). Comme $1 \leq v \leq 8$, nous avons $\sqrt{n} = [\sqrt{n}] + \frac{v}{9} + \epsilon$ avec $|\epsilon| \leq \frac{8}{9} \cdot 10^{-k}$, où $[\sqrt{n}]$ est la partie entière de $\sqrt{n}$. Posons $m := 9 \cdot [\sqrt{n}] + v$ ($m > 0$ est entier) et $\delta := 9\epsilon$, $|\delta| \leq 8 \cdot 10^{-k}$ et $\delta \neq 0$. Nous avons donc $9\sqrt{n} = m + \delta$.

Comme dans la partie a), nous obtenons $1 \leq |81n - m^2| = |\delta| \cdot |2m + \delta|$, i.e. $2m + \delta \geq \frac{10^k}{8} \iff m \geq \frac{10^k}{16} - \frac{\delta}{2}$. Si $\delta > 0$, alors $m \geq \frac{10^k}{16}$ (m entier), i.e. $9\sqrt{n} = m + \delta > \frac{10^k}{16}$. Si $\delta < 0$, alors $m \geq \frac{10^k}{16} + \frac{1}{2}$ (m entier, $k \geq 3$), i.e. $9\sqrt{n} \geq \frac{10^k}{16} + \frac{1}{2} + \delta > \frac{10^k}{16}$. Nous avons donc toujours $9\sqrt{n} > \frac{10^k}{16} \iff \sqrt{n} > \frac{10^k}{144}$.

Remarque : Pour tous ceux qui aiment explorer les exemples, indiquons encore :

$$\sqrt{48225314814815} = 6944444,8888888880000000568888851911113550506503482...$$

Exercice 6

Enoncé.

Soit $ABCD$ une table de billard triangulaire, munie de rebords élastiques et de trous aux sommets A, B, C du triangle, dont les dimensions vérifient : $AB = BC = CA = 200$cm. Soit P le point du côté BC tel que $BP = 160$cm, $PC = 40cm$. Un joueur fait rouler une boule de A vers P. a) Démontrer qu'après sept réflexions sur les côtés du triangle, la boule tombe dans le trou A. b) Question supplémentaire (à traiter uniquement si vous avez résolu tous les autres problèmes du test) : démontrer que deux points de la table de billard ABC sont traversés trois fois chacun par la boule.

Solution.

a) Soit A_1BC le symétrique de ABC par rapport à (BC). On remarque que le deuxième point de rebond de la boule sur un côté de ABC est le symétrique de l'intersection de (AP) avec un côté de A_1BC par rapport à (BC). Pour trouver le 3^{me} point de rebond avec ABC on fait de même le symétrique CB_1A_1 de A_1CB par rapport à (A_1C) et on calcule le point d'intersection de (AP) avec un côté de A_1B_1C. On réitère le procédé (voir figure IX).

On est donc ramené à montrer que (AP) passe par A_3. Par le théorème de Thalès dans AB_3P_7, $\frac{CP}{B_3P_7} = \frac{AC}{AB_3} = \frac{1}{5}$ donc $B_3P_7 = 5CP = 200$cm donc $P_7 = A_3$ d'où le résultat.

b) Il est clair sur la figure IX que $B_1P_2 = 2CP = 80$cm et $A_2P_4 = 120$cm. Replaçons les points de contact P, P_1, P_2, ... sur les côtés d'un même triangle ABC, donc étudions la trajectoire réelle de la boule. $\frac{BP_2}{BP} = \frac{1}{2}$, donc le triangle BPP_2 est la moitié d'un triangle équilatéral, l'angle $P_2PB = 30$. De même, $\frac{CP}{CP_4} = \frac{1}{2}$ donc l'angle $PP_4C = 30$. La trajectoire P_1P_2 passe par le symétrique P' de P par rapport à (AC), vérifiant $P'P_4 = PP_4$ et l'angle $P'P_4P = 60$. $P'P_4P$ est

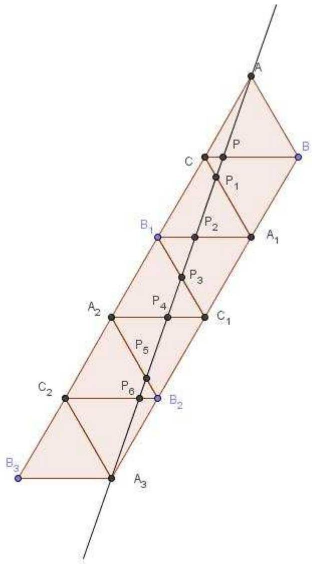
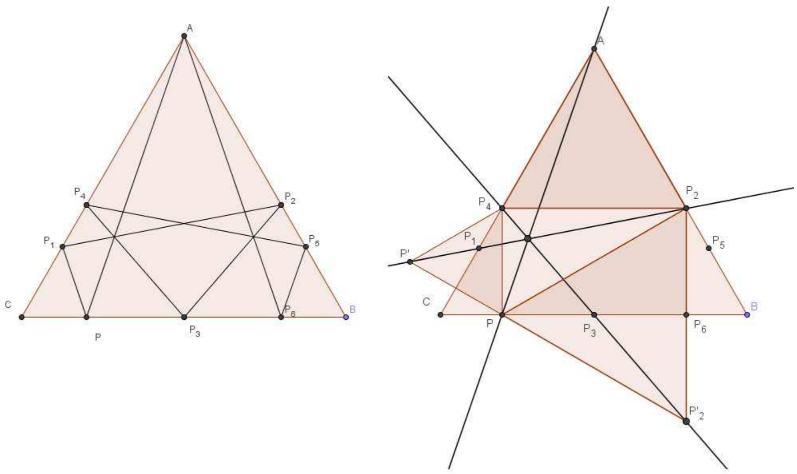


FIG. 2 – Constructions pour l'exercice 6.

donc un triangle équilatéral. De même la trajectoire P_3P_4 passe par le symétrique P_2' de P_2 par rapport à (CB), sommet d'un triangle équilatéral $P_2P_2'P$. Et comme, d'après Thalès, (P_2P_4) est parallèle à (BC), AP_4P_2 est lui aussi un triangle équilatéral. Si, sur les côtés d'un triangle (en l'occurrence PP_2P_4) on construit trois triangles équilatéraux, les droites joignant les sommets du triangle aux sommets des trois triangles équilatéraux sont concourantes en le point de Fermat du triangle. Le point de Fermat du triangle PP_2P_4 est donc traversé trois fois, et de même le point de Fermat du triangle $P_6P_4P_2$ est lui aussi traversé trois fois. Pour le deuxième point de concours de 3 droites, on conclut par symétrie de la trajectoire par rapport à la médiatrice de $[BC]$. (en effet P_3 est le milieu de $[BC]$).



SOMMAIRE

I - Introduction : solides platoniciens

II - Quelques définitions

III - Polytopes réguliers convexes en 4D

I – Introduction : polyèdres réguliers en 3D (les solides platoniciens)

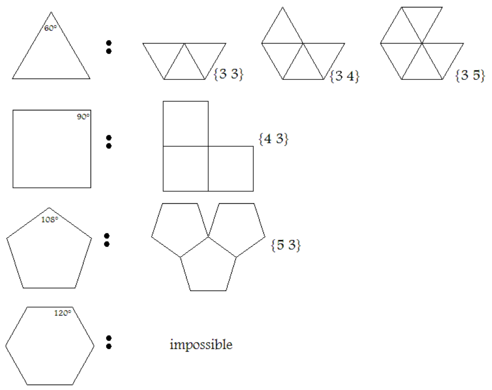
- *Polyèdre régulier* = solide dont les faces sont des polygones réguliers égaux et dont tous les sommets sont «identiques»

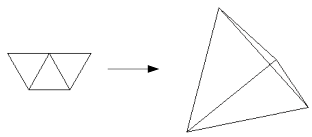
  i. e. solide dont : chaque face est un *p*-gone
  et chaque sommet est entouré de *q* faces

- Réciproquement, *p* et *q* définissent le polyèdre de façon unique.

- On le note *{p q}* : symbole de Schläfli

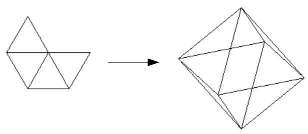
- Somme des angles autour d'un sommet < 2π
- $p \geq 3$
- $q \geq 3$





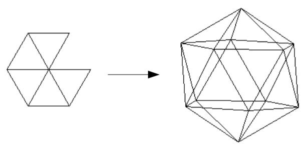
Tetraèdre ({3 3})
4 sommets
6 arêtes
4 faces

Pyramide triangulaire



Octaèdre ({3 4})
6 sommets
12 arêtes
8 faces

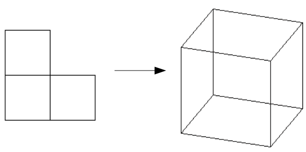
Bipyramide carrée
Antiprisme triangulaire



Icosaèdre ({3 5})
12 sommets
30 arêtes
20 faces

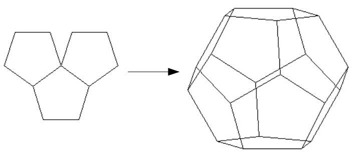
Antiprisme pentagonal surmonté de deux pyramides pentagonales

---



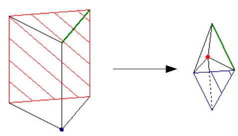
Cube ({4 3})
8 sommets
12 arêtes
6 faces

Prisme carré



Dodécaèdre ({5 3})
20 sommets
30 arêtes
12 faces

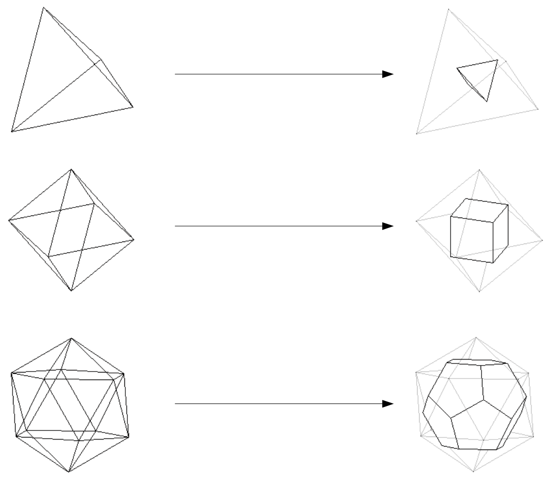
Dualité : sommets → faces
arêtes → arêtes
faces → sommets

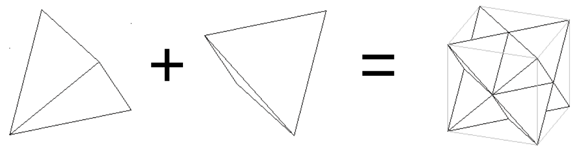


(donc opération involutive)

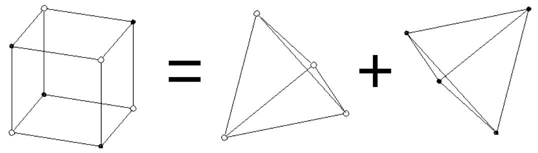
polyèdre régulier → polyèdre régulier

{p q} → {q p}





Stella octangula



Le tetraèdre est un « demi-cube » !

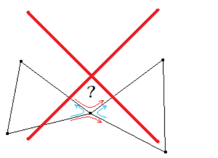
<u>II - Définitions</u>

• *Polytope* = généralisation d'un polyèdre en n dimensions.

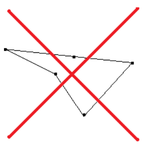
On va le définir par récurrence :

Dimension -1 : nullitope (ensemble vide)
Dimension 0 : point
Dimension n : contient un certain nombre (fini et non nul) de polytopes de dimensions inférieures, tels que
chaque polytope de dimension n-2 est contenu dans <u>exactement deux</u> polytopes de dimension n-1.

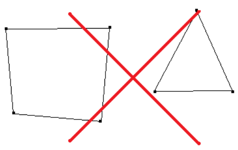
• <u>3 restrictions :</u>



•Deux éléments de dimension n-2 ne doivent pas être coïncidents



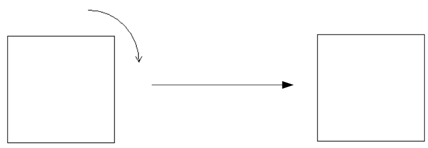
•Deux éléments de dimension n-1 ne doivent pas appartenir au même hyperplan



•Aucun sous-ensemble propre du polytope ne doit lui-même former un polytope.

<u>Polytope régulier</u>

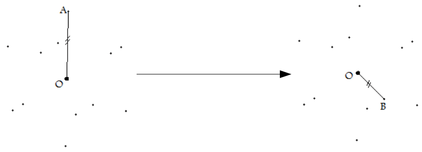
• Symétrie = isométrie de l'espace qui laisse le polytope invariant :



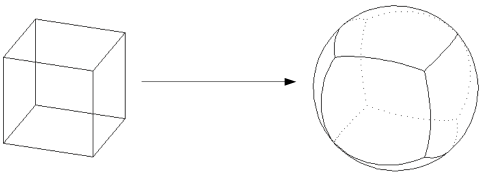
• Les symétries forment un groupe

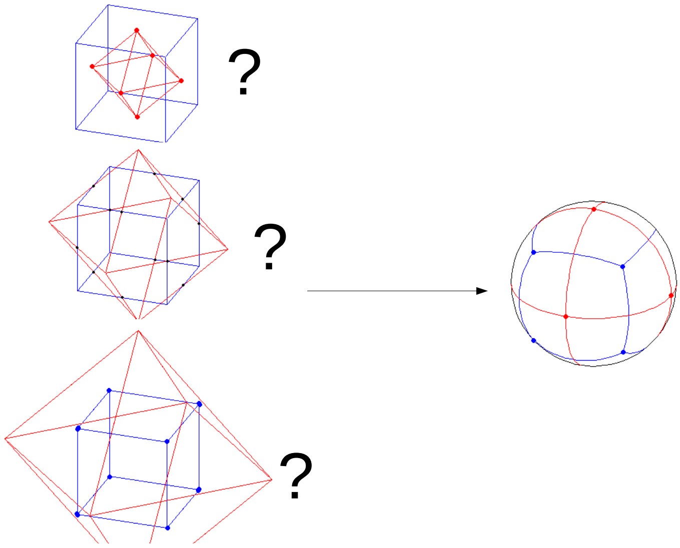
• *Polytope régulier* :
- Tous les éléments de dimension n-1 sont réguliers et égaux.
- Le groupe des symétries est transitif sur les sommets
(i. e. si A et B sont deux sommets, il existe une symétrie qui envoie A sur B)

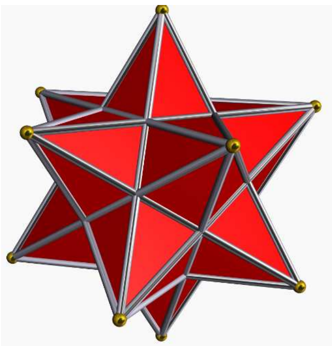
• Propriété essentielle : inscriptible dans une sphère



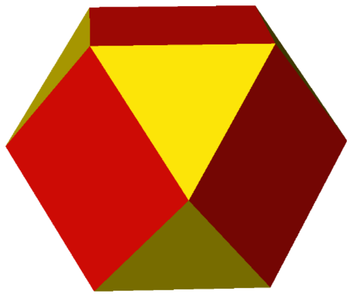
• Projection d'un polytope sur la sphère :



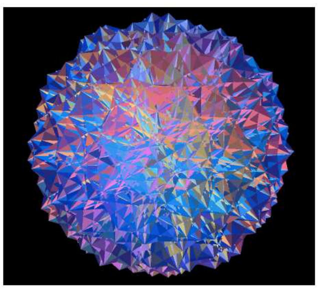




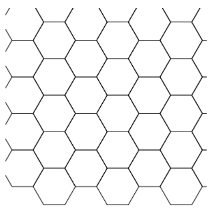
Petit dodécaèdre étoilé, {5/2 5}



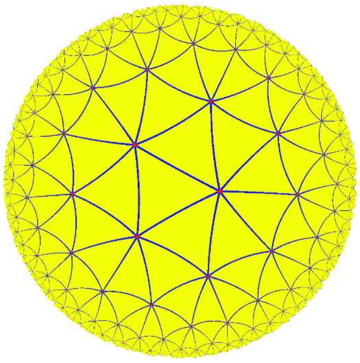
Cuboctaèdre



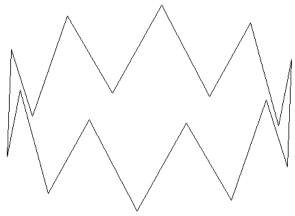
Section du « Grand prismosaure »



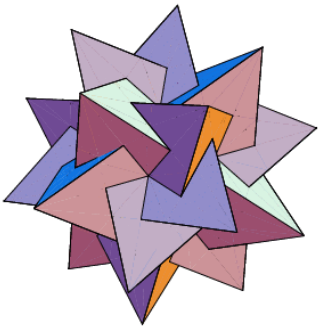
Pavage régulier du plan, {6 3}



Pavage régulier du plan hyperbolique, {3 7}



Octodécagone régulier non planaire



Composé régulier de cinq tetraèdres

III - Polychores réguliers (convexes)

- *Polychore* = polytope en 4D
(nullitope, point, segment, polygone, polyèdre, polychore, ...)

- C'est donc un objet en 4D délimité par des sommets, des arêtes, des faces (polygonales) et des *cellules* (polyédriques)

- Polychore régulier : cellules régulières et égales, sommets « identiques » -> donc arêtes et faces « identiques »
  i. e.
- r polyèdres {p q} autour de chaque arête
  -> noté {p q r}, avec p ≥ 3, q ≥ 3, r ≥ 3

- Somme des angles autour de chaque arête < 2π

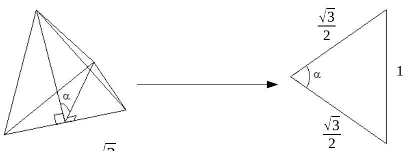
- Dualité : sommets → cellules
  arêtes → faces
  faces → arêtes
  cellules → sommets

  Toujours involutive

  polychore régulier → polychore régulier
  {p q r} → {r q p}

- On cherche les valeurs possibles de r pour chaque polyèdre régulier. Pour cela, on cherche l'angle entre deux de ses faces.

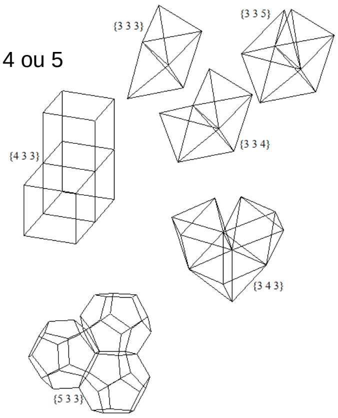
- Par exemple, pour un tetraèdre :



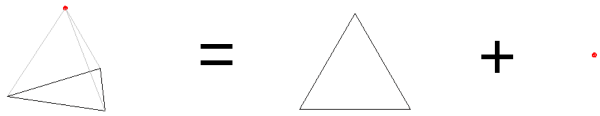
$$\alpha = 2\arcsin\left(\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})}{(\frac{1}{2})}\right) \approx 70°32'$$

et de même pour les autres polyèdres.

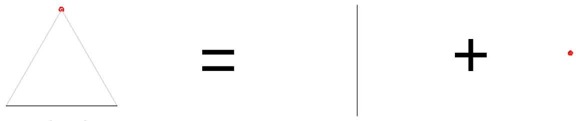
- Tetraèdre : α ≈ 70°32' → r = 3, 4 ou 5
- Cube : α = 90° → r = 3
- Octaèdre : α ≈ 109°28' → r = 3
- Dodecaèdre : α ≈ 116°34' → r = 3
- Icosaèdre : α ≈ 138°19' → impossible



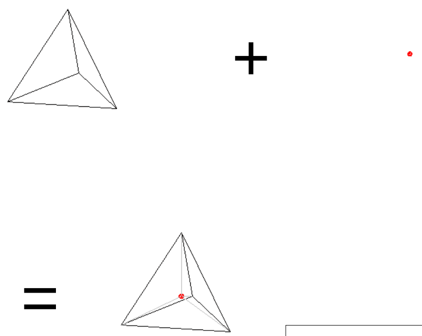
{3 3 3} : Pentachore, ou hypertétraèdre



Tétraèdre



Triangle

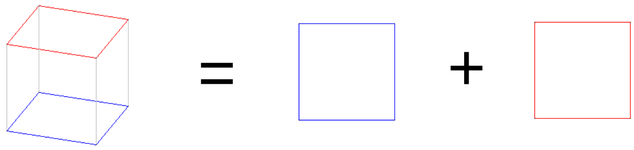


Pentachore

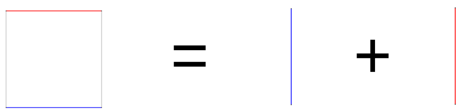
4+1 = 5 sommets
6+4 = 10 arêtes
4+6 = 10 faces triangulaires
1+4 = 5 cellules tétraédriques

Auto-dual

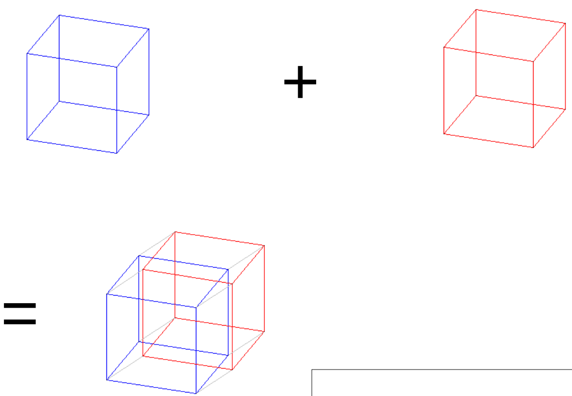
{4 3 3} : Tesseracte, ou hypercube



Cube

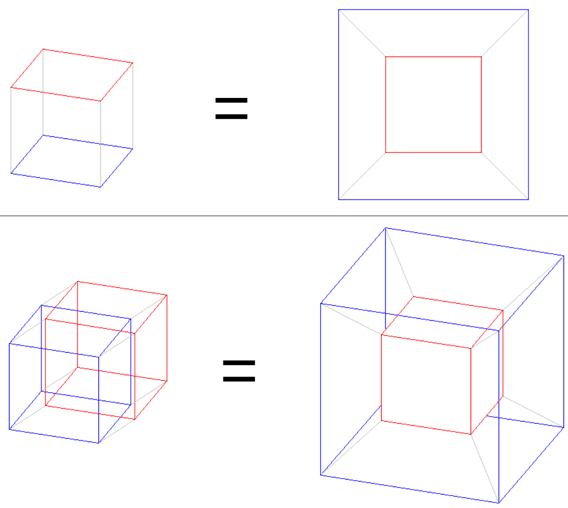


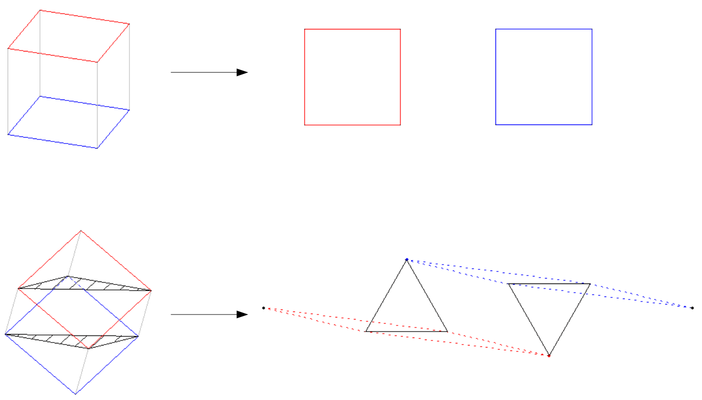
Carré

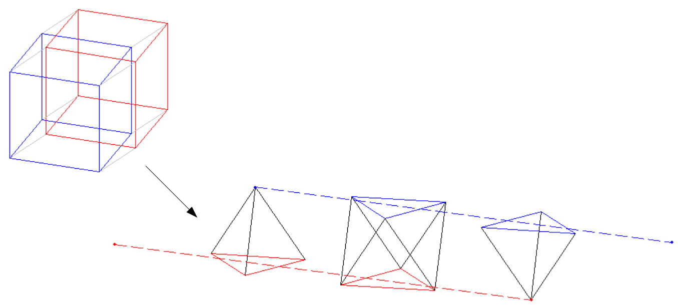


Tesseracte

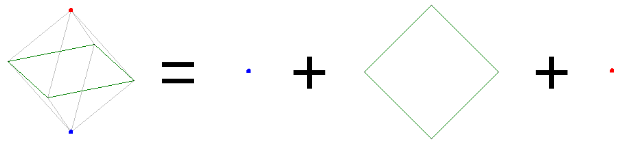
2x8 = 16 sommets
2x12 + 8 = 32 arêtes
2x6 + 12 = 24 faces carrées
2x1 + 6 = 8 cellules cubiques



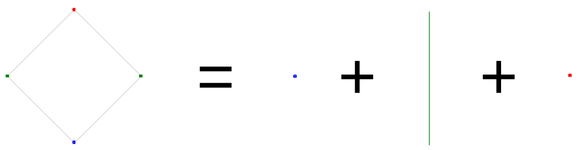




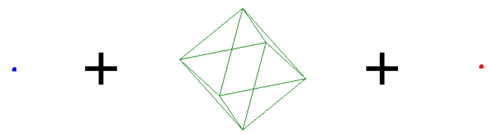
{3 3 4} : Hexadécachore, ou hyperoctaèdre

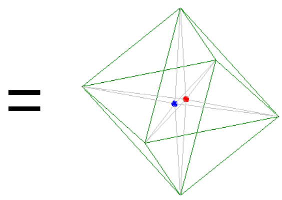


Octaèdre



Carré

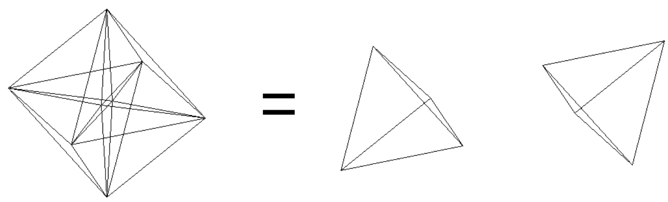


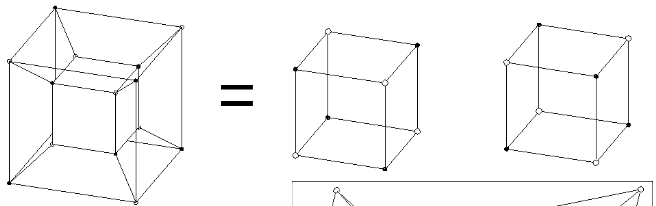


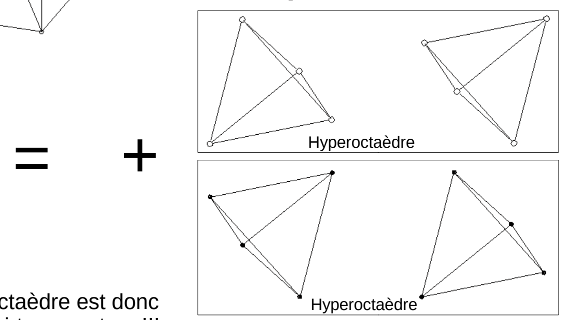
Hyperoctaèdre

6 +2x1   = 8 sommets
12+2x6   = 24 arêtes
8 +2x12 = 32 faces triangulaires
     2x8   = 16 cellules tétraédriques

Dual du tesseracte

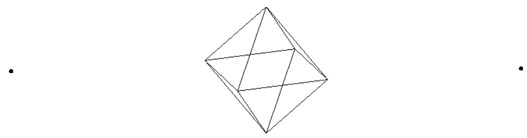






L'hyperoctaèdre est donc
un « demi-tesseracte » !!!

{3 4 3} : Icositetrachore

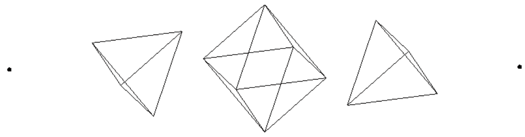


(1)

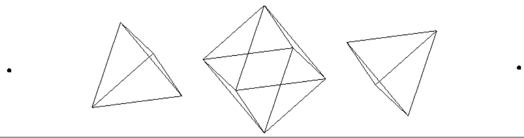
(2)

(3)

(1), (2) et (3) sont des hyperoctaèdres



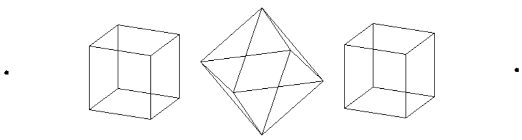
(1)+(2)



(1)+(3)

(2)+(3)

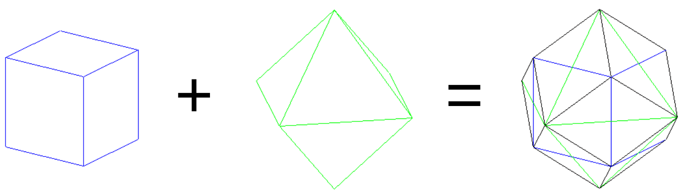
(1)+(2), (2)+(3) et (1)+(3) sont des tesseractes
(1), (2) et (3) jouent des rôles symétriques



(1)+(2)+(3) :
régulier ?

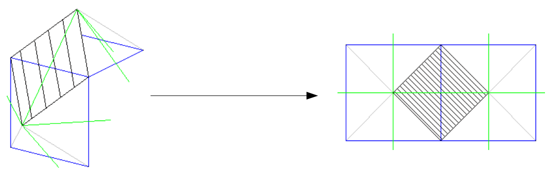
Arêtes ? Faces? Cellules ?

Analogue en 3D :

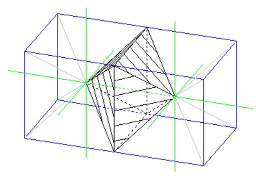


Dodécaèdre rhombique

Face d'un dodécaèdre rhombique :

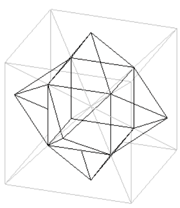


Cellule de notre polychore :



Arêtes : arêtes du tesseracte
+ arêtes qui le relient
à l'hyperoctaèdre

NB : chaque arête relie (1) à (2),
(1) à (3) ou (2) à (3)



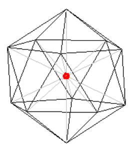
Tétracosachore

3x8 = 24 sommets
32+8x8 = 96 arêtes
8x12 = 96 faces triangulaires
24 cellules octaédriques

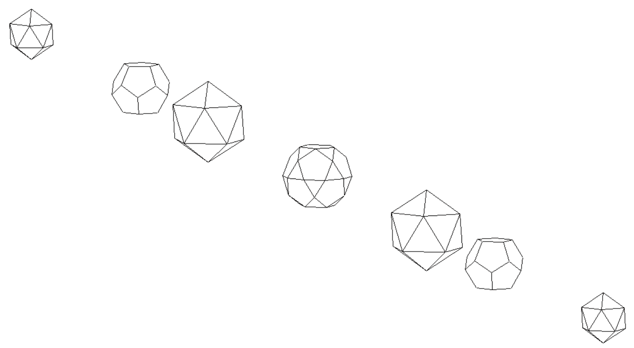
Auto-dual

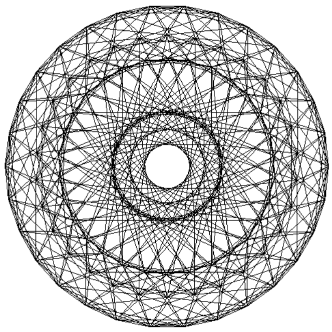
{3 3 5} : Hexacosichore, ou hypericosaèdre

20 tetraèdres arrangés autour de chaque sommet, en forme d'icosaèdre:



120 sommets
720 arêtes
1200 faces triangulaires
600 cellules tétraédriques





{5 3 3} : Hecatonicosachore, ou hyperdodécaèdre

600 sommets
1200 arêtes
720 faces pentagonales
120 cellules dodécaédriques

Dual de l'hypericosaèdre

Bibliographie

- Lo Jacomo François, *Visualiser la quatrième dimension*
- Coxeter H. S. M., *Regular polytopes*
- Abbott, Edwin Abbott, *Flatland: A Romance of Many Dimensions*
- *Uniform Polytopes in Four Dimensions* (George Olshevsky) : members.aol.com/Polycell/uniform.html
- Encyclopédie *Wolfram Mathworld* : mathworld.wolfram.com
- Wikipedia : en.wikipedia.org

Remerciements

Merci à M. Yves DUVAL, l'organisateur du Séminaire Mathématique des Elèves de Louis-le-Grand, qui m'a poussé à préparer cet exposé et m'a permis de le mettre au point.