Feuille de TD n°9

Exercice 1 (Théorème de Sturm)**.** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme. On définit une suite $(S_i)_{1 \leqslant i \leqslant p+1}$ de polynômes de la manière suivante. On pose $S_0 = P$, $S_1 = P'$, et pour $i \leqslant 1$, S_{i+1} est l'opposé du reste dans la division euclidienne de S_{i-1} par S_i (autrement dit, $\deg S_{i+1} < \deg S_i$ et il existe Q_i tel que $S_{i-1} = Q_i S_i - S_{i+1}$). On s'arrête au rang $p+1$ tel que que $S_{p+1} = 0$, donc S_p est un PGCD de P et P'. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $V(x)$ le nombre de changements de signes dans la suite $S_0(x), \dots, S_p(x)$. De façon formelle,

$$V(x) = \#\{(i,j), 0 \leqslant i < j \leqslant p, S_i(x)S_j(x) < 0 \text{ et } \forall k \in \{i, \dots, j\}, S_k(x) = 0\}.$$

Soient $a < b \in \mathbb{R}$, non racines de P. Le but de cet exercice est de montrer que le nombre de racines (réelles) distinctes dans l'intervalle $[a, b]$ est égal à $V(a) - V(b)$.

1. Dans les questions **1.** à **4.**, on suppose que P n'a que des racines simples. Quel est alors le degré de S_p ? En déduire que, pour tout i, S_i et S_{i+1} n'ont pas de racine commune.

2. Soit α une racine de P. En considérant le signe de la dérivée du polynôme P^2 (que l'on exprimera en fonction de P et P'), montrer que $V(x)$ diminue de 1 lorsque x « traverse » α.

3. Soit maintenant α une racine d'un certain S_i avec $i \neq 0$. Montrer que

$$S_{i-1}(\alpha)S_{i+1}(\alpha) < 0.$$

En déduire que $V(x)$ ne change pas lorsque x « traverse » α.

4. Montrer que le nombre de racines de P dans $[a, b]$ est égal à $V(a) - V(b)$.

5. On se place maintenant dans le cas général. Soit $T_i = \frac{S_i}{S_p}$. Pourquoi T_i est-il un polynôme ? À l'aide de T_0, montrer que le nombre de racines distinctes de P dans $[a, b]$ est égal à $V(a) - V(b)$.