

SUR LA GÉNÉRICITÉ DES TRESSES PSEUDO-ANOSOVIANNES II : CONJUGAISONS VERS DES TRESSES RIGIDES

SANDRINE CARUSO ET BERT WIEST

1. INTRODUCTION

Dans l'article récent [1], S. Caruso a démontré le résultat suivant : dans chaque groupe de tresses \mathcal{B}_n , parmi les tresses dans la l -boule du graphe de Cayley avec pour système de générateurs les tresses simples, pour l assez grand, la proportion des pseudo-anosoviennes est bornée inférieurement par une constante positive qui ne dépend pas de l (mais elle peut dépendre de n). En plus de cela, parmi les tresses rigides avec longueur canonique l , la proportion des pseudo-anosoviennes tend vers 1 quand l dans l'infini. L'objectif de cet article est de démontrer le résultat plus fort :

Théorème 5.1. *Dans chaque groupe de tresses \mathcal{B}_n , parmi les tresses dans la l -boule du graphe de Cayley avec pour système de générateurs les tresses simples, la proportion des pseudo-anosoviennes tend vers 1 quand l tend vers l'infini. De plus, cette convergence est exponentiellement rapide.*

En fait, on démontre un résultat technique légèrement plus fort : dans l'énoncé du théorème, on peut remplacer « pseudo-anosoviennes » par « tresses qui admettent une conjugaison non-intrusive vers une tresse rigide pseudo-anosovienne ».

Le plan de l'article est le suivant : dans la section 2, nous rappelons quelques définitions classiques. Dans la section 3, nous énonçons le fait que, parmi les tresses d'infimum fixé, la proportion de celles admettant une conjugaison non intrusive vers une tresse rigide tend exponentiellement vite vers 1 lorsque la longueur canonique tend vers l'infini. Ce fait sera démontré dans la section 4 grâce à la notion de tresse bloquante. Nous démontrons le théorème principal de cet article dans la section 5, et enfin, nous en tirons quelques conséquences et conjectures dans la section 7.

2. DÉFINITIONS

Rappelons que le théorème de classification de Nielsen-Thurston affirme qu'un élément $f \in \mathcal{B}_n$ est soit périodique, soit réductible non périodique, soit pseudo-anosovien. Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que, dans le cas de \mathcal{B}_n , la définition de *périodique* est la suivante : une tresse $x \in \mathcal{B}_n$ est périodique si et seulement si il existe des entiers non nuls m et l tels que $x^m = \Delta^l$, où $\Delta = (\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1})(\sigma_1 \cdots \sigma_{n-2}) \cdots (\sigma_1 \sigma_2) \sigma_1$ (Δ correspond au demi-twist autour du bord du disque).

D'autre part, nous rappelons quelques éléments de théorie de Garside, dans le cadre des groupes de tresses (on pourra consulter [4] ou [5] pour plus de détails).

Le groupe \mathcal{B}_n est muni d'une relation d'ordre \preceq définie par $x \preceq y \Leftrightarrow x^{-1}y \in \mathcal{B}_n^+$, le monoïde des tresses positives. Si $x \preceq y$, on dit que x est un *préfixe* de y . Deux éléments $x, y \in \mathcal{B}_n$ ont un unique plus grand préfixe commun, noté $x \wedge y$.

On définit également \succcurlyeq par $x \succcurlyeq y \Leftrightarrow xy^{-1} \in \mathcal{B}_n^+$. Remarquons que $x \succcurlyeq y$ n'est pas équivalent à $y \preceq x$. Si $x \succcurlyeq y$, on dit que y est un *suffixe* de x .

Les éléments de l'ensemble $\{x \in \mathcal{B}_n, 1 \preceq x \preceq \Delta\}$ sont appelés *tresses simples*, ou *tresses de permutation*.

Définition 2.1 (pondération à gauche). Soient s_1, s_2 deux tresses simples dans \mathcal{B}_n . On dit que s_1 et s_2 sont pondérés à gauche, ou encore que le couple (s_1, s_2) est pondéré à gauche, s'il n'existe aucun générateur σ_i tel que $s_1\sigma_i$ et $\sigma_i^{-1}s_2$ soient toutes les deux encore simples.

Définition 2.2 (ensemble de départ, ensemble d'arrivée). Soit $s \in \mathcal{B}_n$ une tresse simple. On appelle *ensemble de départ* de s l'ensemble $S(s) = \{i, \sigma_i \preceq s\}$ et *ensemble d'arrivée* de s l'ensemble $F(s) = \{i, s \succcurlyeq \sigma_i\}$.

Remarque 2.3. Deux tresses simples s_1 et s_2 sont pondérées à gauche si et seulement si $S(s_2) \subset F(s_1)$.

Proposition 2.4. Soit $x \in \mathcal{B}_n$. Il existe une unique décomposition $x = \Delta^p x_1 \cdots x_r$ tels que x_1, \dots, x_r sont des éléments simples distincts de Δ et de 1, et tels que pour tout $i = 1, \dots, r-1$, x_i et x_{i+1} sont pondérés à gauche.

Définition 2.5 (forme normale à gauche). Dans la proposition précédente, l'écriture $x = \Delta^p x_1 \cdots x_r$ s'appelle *forme normale à gauche* de x , p est appelé l'*infimum* de x et noté $\inf x$, $p+r$ est le *suprémum* de x et noté $\sup x$, et r est appelé *longueur canonique* de x et noté $\ell_c(x)$.

En outre, si $r \geq 1$, on note $\iota(x) = \tau^{-p}(x_1)$ le *facteur initial* de x , où τ désigne la conjugaison par Δ , c'est à dire $\tau(x) = \Delta^{-1}x\Delta$. En particulier, $\iota(x) = x_1$ si p est pair, $\iota(x) = \Delta x_1 \Delta^{-1}$ si p est impair. On note $\varphi(x) = x_r$ le *facteur final* de x .

3. CONJUGAISONS NON INTRUSIVES

Définition 3.1. Soit x une tresse de forme normale $x = \Delta^{\inf(x)} x_1 \cdots x_l$. Une conjugaison de x est *non-intrusive* si la forme normale de la tresse conjuguée contient le sous-mot $x_{2 \cdot \lceil \frac{l}{5} \rceil + 1} \cdots x_{l - 2 \cdot \lceil \frac{l}{5} \rceil}$.

Autrement dit, une conjugaison est non-intrusive si le cinquième central de la tresse x apparaît encore dans la forme normale du conjugué.

Exemple 3.2. Soit x la tresse à 4 brins et de longueur canonique 5 suivante :

$$x = \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \cdot \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \cdot \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \cdot \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \cdot \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1.$$

Son cinquième central est le facteur $\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2$. Soit \tilde{x} son conjugué à gauche par les deux derniers facteurs $\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_3 \cdot \sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1$:

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2 \\ &= \Delta \cdot \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_3 \cdot \sigma_1\sigma_3 \cdot \sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1 \cdot \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2.\end{aligned}$$

La conjugaison de x vers \tilde{x} est non intrusive, car \tilde{x} contient le facteur $\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2$ dans sa forme normale.

Notation 3.3. Notons

$$\mathcal{B}_n^{i,l} = \{x \in \mathcal{B}_n, \inf(x) = i, \ell_c(x) = l\}$$

et $\rho_n^{i,l}$ la proportion, parmi les éléments de $\mathcal{B}_n^{i,l}$, des tresses qui admettent une conjugaison non-intrusive vers une tresse rigide.

On observe que pour tout $l \in \mathbb{N}$ et $i \in \mathbb{Z}$ on a $\rho_n^{i,l} = \rho_n^{i+2,l}$ – donc $\rho_n^{i,l}$ ne dépend que de n , de l , et de la parité de i .

Proposition 3.4. *Il existe une constante $\mu_R \in]0, 1[$ (qui dépend de n) telle que $\rho_n^{i,l} \geq 1 - \mu_R^l$.*

L'objectif de la section suivante est de démontrer cette proposition.

4. TRESSSES BLOQUANTES ET DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.4

Notation 4.1. Si X et Y sont deux tresses telles que Y est d'infimum 0, on dit que $X \cdot Y$ est en forme normale si la forme normale (à gauche) du produit $X \cdot Y$ est égale, en tant que mot, à la forme normale de X , suivie par la forme normale de Y .

Si $X \cdot Y$ n'est pas en forme normale, $\text{FN}_g(X \cdot Y)$ désignera son écriture en forme normale.

Si s_1 est le dernier facteur de la forme normale de X , et s_2 le premier facteur de celle de Y , on notera également $F(X) = F(s_1)$ et $S(Y) = S(s_2)$, de sorte que $X \cdot Y$ est en forme normale si et seulement si $S(Y) \subset F(X)$.

Soit x une tresse d'infimum $\varepsilon \in \{0, 1\}$, et de longueur canonique $l \geq 5$. Introduisons encore quelques notations. On découpe le mot en forme normale représentant x (autre que la puissance de Δ initiale) en cinq morceaux de taille à peu près égale, chacun en forme normale à gauche :

$$\begin{aligned}P_1(x) &= x_1 \cdots x_{\lceil \frac{l}{5} \rceil}, & P_2(x) &= x_{\lceil \frac{l}{5} \rceil + 1} \cdots x_{2 \cdot \lceil \frac{l}{5} \rceil}, \\ P_3(x) &= x_{2 \cdot \lceil \frac{l}{5} \rceil + 1} \cdots x_{l - 2 \cdot \lceil \frac{l}{5} \rceil}, \\ P_4'(x) &= x_{l+1-2 \cdot \lceil \frac{l}{5} \rceil} \cdots x_{l - \lceil \frac{l}{5} \rceil}, & P_5'(x) &= x_{l+1 - \lceil \frac{l}{5} \rceil} \cdots x_l.\end{aligned}$$

Remarquons que $P_1(x), P_2(x), P_4'(x)$ et $P_5'(x)$ ont exactement la même longueur. Le mot $P_3(x)$ est le sous-mot central mentionné précédemment. Enfin, notons

$$P_4(x) = \tau^\varepsilon(P_4'(x)) \quad \text{et} \quad P_5(x) = \tau^\varepsilon(P_5'(x)).$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera simplement P_i à la place de $P_i(x)$. La tresse x peut toujours être conjuguée vers

$$\tilde{x} = \Delta^\varepsilon \cdot P_4 \cdot P_5 \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot P_3$$

et cette écriture est presque en forme normale à gauche : le seul endroit où deux lettres successives ne sont pas forcément pondérées à gauche est la transition de la dernière lettre de P_5 vers la première lettre de P_1 . Tous les autres couples de lettres successives sont pondérées à gauche, même $\varphi(P_3)$ suivi par $\iota(\Delta^\varepsilon P_4)$ (la dernière lettre suivie par la première).

Observation 4.2. Regardons la forme normale de $P_4 \cdot P_5 \cdot P_1 \cdot P_2$. Si

$$\iota(P_4 \cdot P_5 \cdot P_1 \cdot P_2) = \iota(P_4) \tag{1}$$

et

$$\varphi(P_4 \cdot P_5 \cdot P_1 \cdot P_2) = \varphi(P_2) \tag{2}$$

alors la tresse \tilde{x} est un conjugué non-intrusif de x (puisque la forme normale de \tilde{x} contient P_3 comme sous-mot, voir définition 3.1), et elle est rigide.

Intuitivement, l'hypothèse de l'observation 4.2 dit que l'écriture de l'élément \tilde{x} en haut n'est certes pas en forme normale, mais les modifications qu'il faut faire pour le transformer vers la forme normale sont limitées, localisées à l'intérieur du mot, et ne touchent pas ses extrémités (à une apparition éventuelle de facteurs Δ près).

Dans l'exemple 3.2, les hypothèses de l'observation 4.2 sont vérifiées, et le conjugué \tilde{x} est bien rigide.

Notre but maintenant est de démontrer que la proportion des tresses x pour lesquelles les hypothèses de l'observation 4.2 sont satisfaites tend vers 1 quand la longueur de x tend vers l'infini. Pour ce faire, nous allons observer qu'il y a certaines tresses qui « bloquent les réactions en chaîne de la transformation vers la forme normale », et que ces « tresses bloquantes » ont des très bonnes chances d'effectivement apparaître.

Rappelons que pour une tresse simple s , on note ∂s son complémentaire, c'est-à-dire $\partial s = s^{-1}\Delta$. Nous étendons cette définition à toute tresse y par la formule

$$\partial y = y^{-1} \cdot \Delta^{\text{sup}(y)}.$$

C'est l'unique tresse telle que $y \cdot \partial y = \Delta^{\text{sup}(y)}$. Si la forme normale de y est $\Delta^{\text{inf } y} y_1 \cdots y_l$ alors la forme normale de ∂y est $\bar{y}_l \cdots \bar{y}_1$ avec $\bar{y}_{l-i} = \tau^{-i}(\partial y_{i-1})$ pour $i = 0, \dots, l-1$ (c'est-à-dire $\bar{y}_{l-i} = y_{l-i}^{-1} \cdot \Delta = \partial y_{l-i}$ si i est pair et $\bar{y}_{l-i} = \Delta \cdot y_{l-i}^{-1} = \tau^{-1}(\partial y_{l-i})$ si i est impair). En particulier, $\text{inf}(\partial y) = 0$ et $\text{sup}(\partial y) = \ell_c(y)$.

Maintenant, le mot en forme normale représentant $P_4 \cdot P_5 \cdot P_1 \cdot P_2$ est

$$\text{FN}_g(P_4 \cdot P_5 \cdot P_1 \cdot P_2) = \text{FN}_g(P_4 \cdot P_5 \cdot t) \cdot \text{FN}_g(t^{-1} \cdot P_1 \cdot P_2) \tag{3}$$

où

$$t = P_1 \cdot P_2 \wedge \partial(P_4 \cdot P_5).$$

Remarquons que, puisque $P_4 \cdot P_5 \cdot t \cdot t^{-1} \cdot \partial(P_4 \cdot P_5) = \Delta^{\text{sup}(P_4 P_5)} = \Delta^{\text{sup}(P_4 P_5 t)}$, on a

$$\partial(P_4 \cdot P_5 \cdot t) = t^{-1} \cdot \partial(P_4 \cdot P_5). \tag{4}$$

Ceci suggère une façon d'énoncer le problème dans laquelle $P_1 \cdot P_2$ et $\partial(P_4 \cdot P_5)$ jouent des rôles strictement symétriques :

Lemme 4.3. *Supposons que*

$$\varphi(t^{-1} \cdot P_1 \cdot P_2) = \varphi(P_1 \cdot P_2), \quad (5)$$

et

$$\varphi(t^{-1} \cdot \partial(P_4 \cdot P_5)) = \varphi(\partial(P_4 \cdot P_5)). \quad (6)$$

Alors les hypothèses de l'observation 4.2 sont satisfaites.

Démonstration. En vertu de l'égalité (3), on a

$$\varphi(P_4 \cdot P_5 \cdot P_1 \cdot P_2) = \varphi(t^{-1} \cdot P_1 \cdot P_2).$$

Comme $P_1 \cdot P_2$ est en forme normale, $\varphi(P_1 \cdot P_2) = \varphi(P_2)$, ce qui donne l'implication de (5) vers (2), et

$$\iota(P_4 \cdot P_5 \cdot P_1 \cdot P_2) = \iota(P_4 \cdot P_5 \cdot t)$$

ce qui, couplé à (4) et au fait que $\iota(P_4 \cdot P_5) = \iota(P_4)$, donne l'implication de (6) vers (1). \square

Notre but maintenant est de démontrer que, dans la plupart des cas, (5) et (6) sont en effet satisfaites.

Définition 4.4. Une tresse positive α est *bloquante* s'il existe un $i \in \{1, \dots, n-1\}$ tel que pour toute tresse X avec $\inf(X) = 0$, en forme normale, telle que $X \cdot \alpha$ est en forme normale, la seule tresse simple non triviale qui est un suffixe de $X \cdot \alpha$ est σ_i ; autrement dit, le dernier facteur de la forme normale à droite de $X \cdot \alpha$ est σ_i .

Lemme 4.5. *Soit α une tresse bloquante et X une tresse telle que $\inf X = 0$. Soit t un préfixe de $X \cdot \alpha$, où $X \cdot \alpha$ est en forme normale. Si $(\sigma_i =) \varphi(X \cdot \alpha) \neq \varphi(t^{-1} \cdot X \cdot \alpha)$ alors $t = X \cdot \alpha$.*

Démonstration. Soit $s = t^{-1} \cdot X \cdot \alpha$ la tresse telle que $t \cdot s = X \cdot \alpha$ (bien sûr, $t \cdot s$ n'est pas en forme normale tel qu'il est écrit). Supposons (pour obtenir une contradiction) que s soit non trivial. Alors $\varphi(s)$ est une tresse simple non triviale qui est un suffixe de s et donc de $t \cdot s = X \cdot \alpha$. Or, par hypothèse, la seule tresse simple non triviale qui est un suffixe de $X \cdot \alpha$ est σ_i . Donc $\varphi(X \cdot \alpha) = \varphi(s)$: contradiction. \square

Lemme 4.6. *Soit α une tresse bloquante et X une tresse telle que $\inf X = 0$. Soit t un préfixe de $X \cdot \alpha \cdot Y$, où $X \cdot \alpha \cdot Y$ est en forme normale. Si $\varphi(t^{-1} \cdot X \cdot \alpha \cdot Y) \neq \varphi(X \cdot \alpha \cdot Y)$ alors la forme normale de t contient la forme normale de $X \cdot \alpha$ en tant que préfixe.*

Démonstration. Soit $t_1 = t \wedge X \cdot \alpha$. Alors nous affirmons, et démontrons plus bas, que $\varphi(t_1^{-1} \cdot X \cdot \alpha) \neq \varphi(X \cdot \alpha)$. En appliquant le lemme précédent à t_1 , on en déduit que $X \cdot \alpha$ est un préfixe de t . Il reste à montrer que la forme normale de $X \cdot \alpha$ est même le début de la forme normale de t : en effet, t étant un préfixe de $X \cdot \alpha \cdot Y$, $(X \cdot \alpha)^{-1}t$ est un préfixe de Y et en particulier, $S((X \cdot \alpha)^{-1}t) \subset S(Y) \subset F(\alpha)$, la dernière inclusion venant du fait que $X \cdot \alpha \cdot Y$ est en forme normale. Donc $X \cdot \alpha \cdot \text{FN}_g((X \cdot \alpha)^{-1}t)$ est en forme normale, ce qui implique ce que nous voulons.

Voici la démonstration de notre affirmation. On suppose, par l'absurde, que $\varphi(t_1^{-1} \cdot X \cdot \alpha) = \varphi(X \cdot \alpha)$: cela signifie que $\text{FN}_g(t_1^{-1} \cdot X \cdot \alpha) \cdot Y$ est en forme normale. On en déduit, comme $t_1^{-1}t \wedge t_1^{-1}X \cdot \alpha = 1$, que l'on a également $t_1^{-1}t \wedge t_1^{-1}X \cdot \alpha \cdot Y = 1$. Puis, comme $t_1^{-1}t$ divise à gauche $t_1^{-1}X \cdot \alpha \cdot Y$, on a $t_1^{-1}t = 1$. Enfin, cela implique que t est un préfixe de $X \cdot \alpha$, et donc $\varphi(t^{-1} \cdot X \cdot \alpha \cdot Y) = \varphi(X \cdot \alpha \cdot Y)$: contradiction. \square

Lemme 4.7. *Il existe des tresses bloquantes.*

Démonstration. En voici une construction : en notant $\Delta_{i,j}$ le demi-twist positif sur les brins numéro $i, i+1, \dots, j$, posons

$$\alpha = \Delta_{1,n-1}\sigma_{n-1} \cdot \Delta_{1,n-2}\sigma_{n-1}\sigma_{n-2} \cdot \Delta_{1,n-3}\sigma_{n-2}\sigma_{n-3} \cdot \Delta_{1,n-4}\sigma_{n-3}\sigma_{n-4} \cdots \\ \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_4\sigma_3 \cdot \sigma_1\sigma_3\sigma_2 \cdot \sigma_2.$$

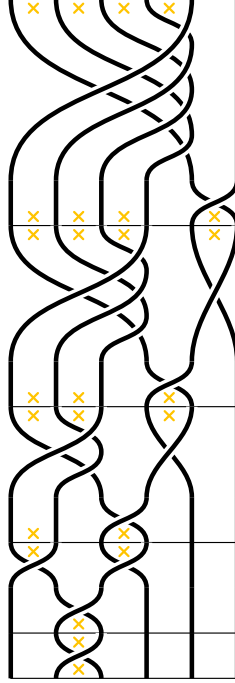


FIG. 1. Exemple d'une tresse bloquante à 6 brins. Les croix jaunes indiquent les ensembles de départ et d'arrivée.

Par exemple pour six brins

$$\alpha = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_5 \cdot \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_5\sigma_4 \cdot \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_4\sigma_3 \cdot \sigma_1\sigma_3\sigma_2 \cdot \sigma_2.$$

C'est un mot de tresse qui est en forme normale à gauche, mais aussi en forme normale à droite. Nous observons que l'ensemble de départ de α est $S(\alpha) = \{1, \dots, n-2\}$ et son ensemble d'arrivée est $F(\alpha) = \{2\}$. Si $X \cdot \alpha$ est en forme normale (à gauche), alors

$F(X) \supseteq \{1, \dots, n-2\}$ et donc $F(X) = \{1, \dots, n-2\}$. Ceci implique que $X \cdot \alpha$ est aussi en forme normale à droite. Donc le seul facteur simple qu'on peut extraire à droite de $X \cdot \alpha$ est σ_2 , comme souhaité. \square

Démonstration de la Proposition 3.4. On note encore

$$t = P_1 \cdot P_2 \wedge \partial(P_4 \cdot P_5).$$

Nous allons appliquer un raisonnement symétrique à $P_1 \cdot P_2$ et $\partial(P_4 \cdot P_5)$. Pour cela, remarquons que

$$\text{FN}_g(\partial(P_4 \cdot P_5)) = \text{FN}_g(\partial P_5) \cdot \text{FN}_g(\tau^{\sup(P_5)}(\partial P_4)) = \text{FN}_g(\partial P_5) \cdot \text{FN}_g(\tau^{\lceil \frac{l}{5} \rceil}(\partial P_4)).$$

Ainsi, P_1 et ∂P_5 d'une part, et P_2 et $\tau^{\lceil \frac{l}{5} \rceil}(\partial P_4)$ d'autre part, joueront un rôle symétrique. Le lemme suivant découle du lemme 3.5 et de la remarque 3.6 dans [1].

Lemme 4.8. *Soient a_1, a_2, a_3 des fonctions de l à valeur dans \mathbb{N} , avec $a_1 + a_3$ et a_2 croissantes et tendant vers l'infini quand l tend vers l'infini, et telles que $a_1(l) + a_2(l) + a_3(l) = l$.*

Pour toute tresse x d'infimum $\varepsilon \in \{0, 1\}$ et de longueur canonique l , de forme normale $\Delta^\varepsilon x_1 \cdots x_l$, notons $P(x) = x_{a_1(l)+1} \cdots x_{a_1(l)+a_2(l)}$ ($P(x)$ est une partie de la forme normale de x de longueur $a_2(l)$).

Soit w une tresse de longueur fixée k . La proportion des tresses $x \in \mathcal{B}_n^{\varepsilon, l}$ telles que la forme normale de $P(x)$ contient celle de w comme sous-mot tend exponentiellement vite vers 1 quand l tend vers l'infini.

En particulier, la proportion des tresses x telles que P_2 et $\tau^{\lceil \frac{l}{5} \rceil}(\partial P_4)$ contiennent des tresses bloquantes tend vers 1 exponentiellement vite.

Parmi ces tresses là, selon le Lemme 4.6, une condition nécessaire pour que

$$\varphi(P_4 \cdot P_5 \cdot P_1 \cdot P_2) \neq \varphi(P_2),$$

et donc $\varphi(t^{-1} \cdot P_1 \cdot P_2) \neq \varphi(P_2)$, est que la forme normale de t contienne celle de P_1 en tant que préfixe. (Intuitivement, le facteur P_1 doit être complètement « mangé » lors de la transformation de $P_4 \cdot P_5 \cdot P_1 \cdot P_2$ en forme normale.) Ceci revient à dire que P_1 doit être un préfixe de ∂P_5 . Or, la proportion des tresses x pour lesquelles ceci est le cas décroît exponentiellement vite avec la longueur l .

En voici la démonstration : une tresse x vérifiant la propriété ci-dessus est déterminée par les $l - \lceil \frac{l}{5} \rceil$ premiers facteurs de sa forme normale (autre que les Δ initiaux), les $\lceil \frac{l}{5} \rceil$ derniers étant les complémentaires des $\lceil \frac{l}{5} \rceil$ premiers (ou de leur conjugué par Δ). D'après [1], le nombre de telles tresses (ayant le même infimum) est de l'ordre de $\lambda^{l - \lceil \frac{l}{5} \rceil}$ pour une constante $\lambda > 1$ (qui dépend de n), tandis que le nombre total de tresses d'infimum fixé est de l'ordre de λ^l . La proportion des tresses x vérifiant cette condition est donc de l'ordre de $\lambda^{-\lceil \frac{l}{5} \rceil}$.

Par l'argument symétrique, il n'arrive qu'exponentiellement rarement que

$$\iota(P_4 \cdot P_5 \cdot P_1 \cdot P_2) \neq \iota(P_4).$$

démonstration fautive

Selon l'observation 4.2, la proportion des tresses x telles que \tilde{x} est un conjugué non-intrusif et rigide tend exponentiellement vite vers 1 avec la longueur canonique de x . \square

5. GÉNÉRICITÉ DES TRESSSES PSEUDO-ANOSOVIENNES

Théorème 5.1. *Dans chaque groupe de tresses \mathcal{B}_n , parmi les tresses dans la l -boule du graphe de Cayley, la proportion des pseudo-anosoviennes tend vers 1 quand l tend vers l'infini. De plus, cette convergence est exponentiellement rapide.*

Plusieurs points clé de cet argument sont déjà présents dans [1].

Lemme 5.2. *Il existe une constante μ_{pA} (qui dépend de n) telle que, parmi les tresses dans $\mathcal{B}_n^{i,l}$, la proportion de celles qui sont conjuguables de façon non-intrusive vers une tresse rigide pseudo-anosovienne est supérieure à $1 - \mu_{pA}^l$ (pour l assez grand, indépendamment de i).*

Démonstration. En combinant un théorème de González-Meneses / Wiest, avec celui de Bernardete / Gutierrez / Nitecki, on voit que chaque facteur de la forme normale d'une tresse rigide réductible doit soit envoyer une courbe ronde sur une courbe ronde, soit préserver une courbe presque ronde, de telle façon que soit tout couple de brins à l'intérieur de la courbe presque ronde ou bien ne se croise pas de tout, ou bien se croise dans chaque facteur. L'article [1] (dans la proposition 4.4) profite de cette obstruction à la réductibilité de tresses rigides pour exhiber deux sous-mots, d'une longueur de deux ou trois lettres chacun, qu'une tresse rigide ne doit pas contenir tous les deux, ou son complémentaire contenir le deuxième, si elle veut être réductible.

Regardons la proportion, parmi les éléments x de $\mathcal{B}_n^{i,l}$, des tresses qui contiennent, dans leur cinquième central $P_3(x)$, les deux sous-mots mentionnés au paragraphe précédent, pendant que simultanément, leur complémentaire contient le deuxième dans son cinquième central $P_3(\partial x)$ (qui est égal à $\partial P_3(x)$ ou à $\tau(\partial P_3(x))$ selon la valeur de l). Il découle du lemme 4.8 que cette proportion tend vers 1 exponentiellement vite : il existe une constante μ_C (qui dépend de n) telle que cette proportion est supérieure à $1 - \mu_C^l$. (L'index C dans la notation μ_C vient du mot « courbe ».)

Regardons maintenant l'intersection des deux sous-ensembles de $\mathcal{B}_n^{i,l}$:

- (1) Les tresses de $\mathcal{B}_n^{i,l}$ qui sont conjuguables, de façon non-intrusive, vers une tresse rigide
- (2) Les tresses x de $\mathcal{B}_n^{i,l}$ qui contiennent, dans leur cinquième central $P_3(x)$, les trois sous-mots qui empêchent la réductibilité de tresses rigides. (Remarquons que ce sous-ensemble peut contenir des tresses réductibles mais non-rigides.)

Des tresses qui appartiennent à cette intersection ne peuvent pas être réductibles, par construction. En plus, les seules tresses rigides périodiques sont les puissances de Δ (voir [1]). Donc tous les éléments de cette intersection se conjuguent de façon non-intrusive vers une tresse rigide et pseudo-anosovienne.

En outre, la proportion des éléments de $\mathcal{B}_n^{i,l}$ appartenant au premier sous-ensemble est au moins $1 - \mu_R^l$ d'après la Proposition 3.4, et pour le deuxième sous-ensemble c'est au

moins $1 - \mu_C^l$. La proportion des éléments appartenant à l'intersection des deux est au moins $1 - \mu_R^l - \mu_C^l$. Donc pour tout μ_{pA} supérieur à $\max(\mu_R, \mu_C)$ on a le résultat souhaité. Ceci termine la démonstration du Lemme 5.2. \square

Démonstration du Théorème 5.1. On va mélanger trois ingrédients.

Premièrement, comme dans [1] on observe que la l -boule $\mathbf{B}(l)$ du graphe de Cayley de \mathcal{B}_n est la réunion disjointe

$$\mathbf{B}(l) = \bigcup_{k=0}^l \bigcup_{i=-l}^{l-k} \mathcal{B}_n^{i,k}$$

(Cette observation nécessite de savoir que les tresses en *forme normale mixte* sont des géodésiques, ce qui est démontré dans [3].)

Deuxièmement, on se souvient aussi de [1] qu'il existe un nombre $\lambda > 1$ (qui dépend de n) avec la propriété que $|\mathcal{B}_n^{i,k}| = \Theta(\lambda^k)$, c'est-à-dire que les suites $\frac{|\mathcal{B}_n^{i,k}|}{\lambda^k}$ et $\frac{\lambda^k}{|\mathcal{B}_n^{i,k}|}$ restent bornées.

Troisièmement, nous rappelons que dans chaque $\mathcal{B}_n^{i,k}$, la proportion des tresses qui n'ont pas de conjugaison non-intrusive vers une tresse rigide pseudo-anosovienne est un $O(\mu_{pA}^k)$, pour un certain nombre μ_{pA} avec $0 < \mu_{pA} < 1$.

Donc le nombre total des tresses dans la l -boule qui ne sont pas non-intrusivement conjugués vers une tresse rigide, pseudo-anosovienne est un

$$O\left((2l+1) + 2l \cdot (\lambda \cdot \mu_{pA})^1 + (2l-1) \cdot (\lambda \cdot \mu_{pA})^2 + \dots + (2l-l+1) \cdot (\lambda \cdot \mu_{pA})^l\right)$$

La proportion, parmi les tresses dans la l -boule, de ceux qui ne sont pas non-intrusivement conjugués vers une tresse rigide, pseudo-anosovienne est donc un

$$\begin{aligned} O\left(\frac{2l+1}{\lambda^l} + \frac{2l \cdot \mu_{pA}}{\lambda^{l-1}} + \frac{(2l-1) \cdot \mu_{pA}^2}{\lambda^{l-1}} + \dots + \frac{(2l-l+1) \cdot \mu_{pA}^l}{1}\right) \\ \leq O\left((l+1) \cdot (2l+1) \cdot \left(\max\left(\frac{1}{\lambda}, \mu_{pA}\right)\right)^l\right) \end{aligned}$$

et donc, pour tout $\varepsilon > 0$ un

$$O\left(\left(\max\left(\frac{1}{\lambda}, \mu_{pA}\right) + \varepsilon\right)^l\right).$$

En choisissant ε suffisamment petit pour que $\max(\frac{1}{\lambda}, \mu_{pA}) + \varepsilon < 1$, on a le résultat. \square

6. SOLUTIONS RAPIDES AU PROBLÈME DE CONJUGAISON

Le but de cette section est de démontrer que « génériquement, le problème de conjugaison dans \mathcal{B}_n peut être résolu en temps quadratique ». Rappelons d'abord une méthode standard pour résoudre le problème de conjugaison dans les groupes de tresses. Pour décider si deux tresses données x_1 et x_2 sont conjuguées, on calcule un certain sous-ensemble $SC(x_i)$ de la classe de conjugaison de x_i , pour $i = 1$ et $i = 2$. La définition exacte de ce sous-ensemble « des circuits glissants » $SC(x)$ d'une tresse x ne nous intéressera pas ici; nous aurons juste besoin de savoir deux choses :

- L'ensemble $SC(x)$ ne dépend que de la classe de conjugaison de x , et il est toujours non-vide.
- Si la classe de conjugaison de x contient une tresse rigide, alors $SC(x)$ est exactement l'ensemble des conjugués rigides. [6].

Pour décider alors si x_1 et x_2 sont conjugués, il suffit de tester si un élément arbitrairement choisi de $SC(x_1)$ est contenu dans $SC(x_2)$.

Notre but est de démontrer que pour un élément x de \mathcal{B}_n « générique », on peut calculer l'ensemble $SC(x)$ en temps polynomial.

Remarque 6.1. Remarquons que pour une tresse rigide x_r , l'ensemble des conjugués rigides $SC(x_r)$ contient au moins toute l'orbite de x_r

- par τ , c'est à dire conjugaison par Δ , et
- par permutation cyclique des facteurs autre que Δ .

Cette orbite a au plus $2 \cdot \ell_c(x_r)$ éléments. On verra que pour une tresse « générique », l'ensemble des conjugués rigides contient exactement *une* telle orbite.

Théorème 6.2. *Il existe un algorithme, qui prend en entrée une tresse $x \in \mathcal{B}_n$, qui s'exécute en temps $O(\ell_c(x)^2)$, et qui renvoie comme réponse*

- (1) *ou bien un conjugué rigide de x , fourni avec le certificat que l'ensemble des conjugués rigides de x ne contient que son orbite par τ et par permutation cyclique des facteurs (autres que Δ),*
- (2) *ou bien bien la réponse « Je ne sais pas ».*

Parmi les éléments dans la boule de rayon l du graphe de Cayley de B_n , la proportion des tresses dans le cas (2) tend vers 0 exponentiellement vite quand l tend vers l'infini.

Démonstration. Comme dans la section 4, on découpe la tresse x en 5 morceaux P_1, P_2, P_3, P'_4 et P'_5 , et on note $P_4 = \tau^{\text{inf } x}(P'_4)$ et $P_5 = \tau^{\text{inf } x}(P'_5)$. On note $P_{12} = P_1 \cdot P_2$ et $P_{45} = P_4 \cdot P_5$. (En fait, pour le déroulement de l'algorithme, il suffirait de couper la tresse en 3 morceaux, mais pour la rédaction de cette démonstration, nous réutilisons les notations des sections précédentes et le découpage en 5 morceaux.) Puis on exécute les opérations suivantes :

- (1) calculer $\text{FN}_g(P_{45}P_{12})$;
- (2) tester si $\iota(P_{45}P_{12}) = \iota(P_{45})$. Si ce n'est pas le cas, renvoyer « Je ne sais pas ». Si c'est le cas, continuer l'exécution ;
- (3) tester si $\varphi(P_{45}P_{12}) = \varphi(P_{12})$. Si ce n'est pas le cas, renvoyer « Je ne sais pas ». Si c'est le cas, continuer l'exécution ;
- (4) tester si P_3 contient dans sa forme normale le facteur en forme normale $(\Delta\sigma_2^{-1}) \cdot \sigma_1$. Si ce n'est pas le cas, renvoyer « Je ne sais pas ». Si c'est le cas, continuer l'exécution ;
- (5) renvoyer $\Delta^{\text{inf } x}P_{45}P_{12}P_3$.

Les tests (2) et (3) vérifient si les conditions de l'observation 4.2 sont vérifiées pour la tresse x . Si tel est le cas, cela assure que la tresse $y = \Delta^{\text{inf } x}P_{45}P_{12}P_3$ est bien un conjugué rigide de x , et, en outre, que la conjugaison se fait de manière non intrusive. Supposons

maintenant que x vérifie le test (4). Comme la conjugaison est non intrusive, y contient également le facteur $(\Delta\sigma_2^{-1}) \cdot \sigma_1$; puis, en permutant cycliquement les facteurs de y , on obtient une tresse rigide z vérifiant $\iota(z) = \sigma_1$ ou σ_{n-1} et $\varphi(z) = (\Delta\sigma_2^{-1})$ ou $(\Delta\sigma_{n-2}^{-1})$.

Nous affirmons que l'ensemble $SC(z)$ est alors réduit à l'orbite définie à la remarque 6.1. La démonstration est essentiellement la même que celle du lemme 2.4 dans [2]. Pour pouvoir l'adapter à notre cas, il suffit de montrer la chose suivante : aucun des conjugués de z par les préfixes stricts de $\iota(z)$ et de $\partial\varphi(z)$ ne sont dans $SC(z)$. Or, cette affirmation est une tautologie, puisque ni $\iota(z) = \sigma_1$ ou σ_{n-1} , ni $\partial\varphi(z) = \sigma_2$ ou σ_{n-2} , ne possède de préfixe strict !

Ceci montre que l'algorithme renvoie bien le résultat attendu.

Étudions à présent la complexité de cet algorithme. D'après [5], la complexité du calcul de la forme normale $\text{FN}_g(P_{45}P_{12})$ est en $O(\ell_c(P_{45}P_{12})^2) = O(\ell_c(x)^2)$. Les tests (2) et (3) sont réalisés en temps constant, le test (4) en temps linéaire. La complexité finale de l'algorithme est donc bien $O(\ell_c(x)^2)$.

Enfin, le fait que la proportion des tresses pour lesquelles l'algorithme renvoie « Je ne sais pas » tend exponentiellement vite vers 0 quand l tend vers l'infini est une conséquence des propriétés démontrées à la section 4 : la proportion de tresses dans la boule de rayon l dans le graphe de Cayley qui vérifient les hypothèses de l'observation 4.2 (c'est-à-dire les tests (2) et (3)) tend exponentiellement vite vers 1 quand l tend vers l'infini. D'après le lemme 4.8, c'est également le cas des tresses vérifiant le test (4). \square

Remarque 6.3. Dans la pratique, on pourrait remplacer le test (4) par « tester si P_3 contient dans sa forme normale un facteur de la forme $(\Delta\sigma_j^{-1}) \cdot \sigma_i$, $i \neq j$ ». Cela ne change pas la complexité en $O(\ell_c(x)^2)$ de l'algorithme, tout en étendant l'ensemble des tresses pour lesquelles l'algorithme renvoie un conjugué rigide tel que l'ensemble des circuits glissants est réduit à l'orbite de la remarque 6.1.

7. CONSÉQUENCES ET QUESTIONS

Nous remercions Alessandro Sisto qui a attiré notre attention sur le corollaire suivant.

Corollaire 7.1. *Pour tout entier positif l , il existe une boule de rayon l dans le graphe de Cayley de \mathcal{B}_n qui ne contient que des éléments pseudo-anosoviens.*

Démonstration. Si tout sommet du graphe de Cayley était à distance au plus l d'un élément non pseudo-anosovien, alors le graphe serait recouvert par des l -boules autour des éléments non pseudo-anosoviens. Ceci impliquerait que les l -boules autour des éléments non pseudo-anosoviens dans la R -boule $\mathbf{B}(R)$ recouvriraient la $(R-l)$ -boule $\mathbf{B}(R-l)$. (Attention, elles ne recouvriraient pas forcément toute la R -boule car les points l -proches du bord de celle-ci peuvent être recouvertes par des l -boules centrées en-dehors de la R -boule.) On a donc

$$\#(\beta \in \mathbf{B}(R), \beta \text{ non pseudo-anosovien}) \cdot \#(\mathbf{B}(l)) \geq \#(\mathbf{B}(R-l))$$

donc

$$\frac{\#(\beta \in \mathbf{B}(R), \beta \text{ non pseudo-anosovien})}{\#(\mathbf{B}(R))} \geq \frac{1}{\#(\mathbf{B}(l))} \cdot \frac{\#(\mathbf{B}(R-l))}{\#(\mathbf{B}(R))}.$$

Pour chaque l fixé, le membre de droite reste borné inférieurement quand R tend vers l'infini (car le groupe de tresses est de croissance exponentielle). Ceci est en contradiction avec le Théorème 5.1. \square

Remarque 7.2. Il serait souhaitable d'étendre notre résultat à un cadre beaucoup plus général. À partir de notre démonstration, il n'est même pas évident que le théorème 5.1 reste valable si l'on remplace le système de générateurs de Garside par une autre famille génératrice, ou si l'on remplace le groupe de tresses par le sous-groupe des tresses pures (qui est d'indice fini), ou par le noyau de l'homomorphisme $B_n \rightarrow \mathbb{Z}$ qui envoie chaque générateur d'Artin sur 1 (ce sous-groupe est d'indice infini).

Nous conjecturons que l'analogie dans notre cadre du résultat principal de Sisto [7] est vrai. Spécifiquement, soit G un groupe non-élémentaire muni d'une famille génératrice finie qui agit sur un complexe δ -hyperbolique, où au moins un élément de G agit de façon faiblement proprement discontinue (WPD). Nous conjecturons que la proportion des éléments dans la l -boule du graphe de Cayley qui agissent de façon WPD tend vers 1 exponentiellement vite quand l tend vers l'infini.

RÉFÉRENCES

- [1] S. CARUSO, *On the genericity of pseudo-Anosov braids*
- [2] S. CARUSO, *A family of pseudo-Anosov braids whose super summit sets grow exponentially* [arXiv:1302.5808](https://arxiv.org/abs/1302.5808)
- [3] R. CHARNEY, J. MEIER, *The language of geodesics for Garside groups*, Math. Zeitschrift, 248 (2004), p. 495–509
- [4] P. DEHORNOY, avec F. DIGNE, E. GODELLE, J. MICHEL, *Garside Calculus*, livre en préparation, version préliminaire sur <http://www.math.unicaen.fr/~garside/Garside.pdf>
- [5] E. A. ELRIFAI, H. MORTON, *Algorithms for positive braids*, Q. J. Math., Oxf. II Ser., 45 (1994), p. 479 – 497
- [6] V. GEBHARDT, J. GONZÁLEZ-MENESES, *The cyclic sliding operation in Garside groups*, Math. Z., 265 (2010), p. 85–114
- [7] A. SISTO, *Contracting elements and random walks* (2011), [arXiv:1112.2666](https://arxiv.org/abs/1112.2666)