

Algorithme de relaxations par la droite et spirales d'un diagramme de courbes

Sandrine Caruso

25 octobre 2012

Table des matières

1	Algorithme de relaxations par la droite	1
2	Spirales	7
2.1	Suites d'intersections	7
2.2	Arc de spirale, spirale	8
3	Effet de l'algorithme sur les spirales	11
3.1	Multibigone	11
3.2	Intervalle de sécurité	12
3.3	Orientation d'une spirale	13
3.4	Base gauche d'une spirale	13
3.5	Limite de sécurité et base gauche au cours de l'algorithme	14

Introduction

Le groupe des tresses à n brins peut être vu comme le groupe modulaire du disque privé de n points, avec le bord fixé point par point. Dans ce cadre, une tresse est entièrement caractérisée par son diagramme de courbes, c'est-à-dire l'image par cette tresse d'une famille d'arcs séparant les n points. Si l'on se donne un diagramme de courbes, on peut retrouver la tresse qui lui est associée : un premier algorithme, dit de transmissions et relaxations, a été donné par Wiest et Dynnikov dans [1]. Nous en donnons ici un deuxième, l'algorithme de relaxations par la droite : c'est l'objet de la première section.

Dans la deuxième section, nous définissons la notion de spirale dans un diagramme de courbes. Enfin, dans la troisième section, nous étudions l'effet de l'algorithme de relaxations par la droite sur les spirales, afin de démontrer que l'apparition d'une spirale dans le diagramme de courbes correspond, dans la tresse associée, à l'apparition d'une puissance d'un glissement semi-circulaire (c'est-à-dire le croisement d'un brin j avec les $j - i$ précédents).

1 Algorithme de relaxations par la droite

On note D_n le disque unité fermé dans \mathbb{C} auquel on a enlevé n points régulièrement espacés sur l'axe réel. On note A_1, \dots, A_n ces n points, numérotés de gauche à droite. Le groupe modulaire de D_n , *i.e.* l'ensemble des homéomorphismes qui fixent point par point le bord de D_n (et préservent globalement l'ensemble des trous), quotienté par la relation d'isotopie, est identifié naturellement au groupe des tresses à n brins. Celui-ci est donné classiquement par la présentation par générateurs et relations

$$\mathcal{B}_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} ; \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \text{ et } \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ pour } |i - j| \geq 2 \rangle.$$

On note

$$\Sigma_{ij} = \sigma_i \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{j-1} \tag{1}$$

$$\bar{\Sigma}_{ij} = \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}. \tag{2}$$

Remarquons que $\sigma_i = \Sigma_{i,i+1} = \bar{\Sigma}_{i,i+1}^{-1}$. (Remarque : quand on écrit un homéomorphisme comme un mot en les σ_i , en les Σ_{ij} ou en les $\bar{\Sigma}_{ij}$, on les écrit dans l'ordre de la composition d'applications, c'est-à-dire que l'on commence par appliquer le générateur le plus à droite.)

Le disque D_n étant toujours considéré comme étant plongé dans \mathbb{C} , on prolonge les homéomorphismes de D_n (et les éléments du groupe modulaire) à $\mathbb{C} \setminus \{A_1, \dots, A_n\}$, par l'identité sur $\mathbb{C} \setminus D_0$.

Dans tout ce document, les courbes et arcs que l'on considérera sont tous sans auto-intersection. Soit \mathcal{E} l'ensemble de courbes défini sur la figure 1 : \mathcal{E} est la réunion de $n - 1$ courbes, l'une entourant uniquement le premier trou, la deuxième entourant les deux premiers trous, etc, la dernière entourant les $n - 1$ premiers trous, chacune coupant exactement deux fois le bord de D_0 . On appelle *diagramme de courbes* l'image, à isotopie près, de \mathcal{E} par un élément du groupe modulaire. On choisira toujours, pour un diagramme de courbes, un représentant qui coupe l'axe réel transversalement, et qui le coupe un nombre minimum de fois.

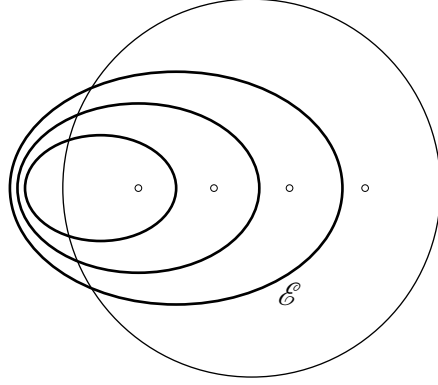


FIG. 1 – Le diagramme de courbes trivial \mathcal{E}

L’algorithme de relaxations par la droite, que nous décrivons dans cette section, est une variante de l’algorithme de transmissions-relaxations introduit par Dynnikov et Wiest dans [1]. Il s’agit d’un procédé permettant, étant donné un diagramme de courbes, de retrouver efficacement la tresse qui l’a produit.

Définition 1. On appelle *arc semi-circulaire* un arc isotope à un demi-cercle, dont les extrémités sont sur \mathbb{R} et qui n’a pas d’autre intersection avec \mathbb{R} .

Définition 2. Soit \mathcal{D} un diagramme de courbes. On dit que \mathcal{D} forme un *bigone* avec l’axe réel si une composante connexe de $D_n \setminus (\mathcal{D} \cup \mathbb{R})$ a pour frontière uniquement un segment de \mathbb{R} et un arc semi-circulaire de \mathcal{D} (voir figure 2).

Ce segment de \mathbb{R} sera appelé le *bord réel* du bigone, et l’arc de \mathcal{D} sera appelé le *bord semi-circulaire*.

Les extrémités communes du bord réel et du bord semi-circulaire sont appelées les *extrémités* du bigone.

Les deux autres arcs semi-circulaires de \mathcal{D} ayant pour extrémité l’une des extrémités du bigone sont appelées les *branches* du bigone. On appelle *branche gauche* celle qui a pour extrémité commune l’extrémité gauche du bigone, et *branche droite* l’autre.

Remarque 3. Comme \mathcal{D} sépare les trous A_1, \dots, A_n , le bord réel d’un bigone contient au plus un trou. Comme, de plus, on suppose toujours que \mathcal{D} a le nombre minimal d’intersections avec \mathbb{R} , il en contient au moins un (sinon on pourrait éliminer le bigone en déformant \mathcal{D}).

Lemme 4. *Tout diagramme de courbes non trivial admet au moins un bigone.*

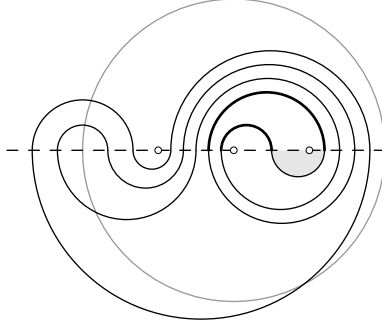


FIG. 2 – La partie grisée est un bigone, les deux arcs en gras sont ses branches

Lemme 5. Soit \mathcal{D} un diagramme de courbes, considérons son bigone b situé le plus à droite (voir figure 2). Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{R}$ ses extrémités et P'_1 et P'_2 les autres extrémités de ses branches. Alors $P'_i < P_i$ ($i = 1, 2$) (i.e. l'extrémité P'_i est située à gauche de P_i).

Démonstration des lemmes 4 et 5. Une remarque importante pour démontrer ces deux résultats est la suivante : supposons que le diagramme de courbes \mathcal{D} admette un arc semi-circulaire α , tel que α soit inclus dans D_n . Alors, \mathcal{D} admet un bigone inclus dans le demi-disque délimité par α et l'axe réel. En effet, si α n'est pas lui-même un bigone, c'est qu'il existe un autre sous-arc de \mathcal{D} dans ce demi-disque ; comme le nombre de sous-arcs semi-circulaires de \mathcal{D} est fini, l'un de ces sous-arcs est nécessairement un bigone.

Pour établir le lemme 4, il suffit maintenant de remarquer que tout diagramme non trivial admet nécessairement un sous-arc semi-circulaire compris dans D_n : au moins l'une des $n - 1$ courbes formant le diagramme admet au moins deux intersections avec \mathbb{R} comprises dans D_n .

Le lemme 5 s'en déduit également rapidement. Les branches du bigone b sont des arcs semi-circulaires, donc le demi-disque qu'elles délimitent contient au moins un bigone b' . Si l'une de ces branches partait vers la droite, le bigone b' serait situé à droite de b ; or, on a choisi pour b le bigone le plus à droite, c'est donc impossible. \square

Le principe de l'algorithme de relaxations par la droite est d'éliminer un à un les bigones, en éliminant à chaque étape celui situé le plus à droite.

Définition 6. Soit α un arc semi-circulaire dans D_n , dont l'une des extrémités, A , est un des trous de D_n , et l'autre, B , ne l'est pas. On dit que l'on *fait glisser* A le long de α si l'on applique un homéomorphisme $\psi \circ \phi$ de D_n , où ψ et ϕ sont des homéomorphismes du disque sans trous, tels que :

- (i) ϕ est l'identité hors d'un voisinage U de α , où U ne contient pas d'autre trou de D_n que A ,
- (ii) ϕ envoie A sur B ,
- (iii) ψ envoie $\{\phi(A_1), \dots, \phi(A_n)\}$ sur $\{A_1, \dots, A_n\}$ en préservant l'ordre de ces éléments sur l'axe réel, et en préservant globalement l'axe réel.

Voir la figure 3.

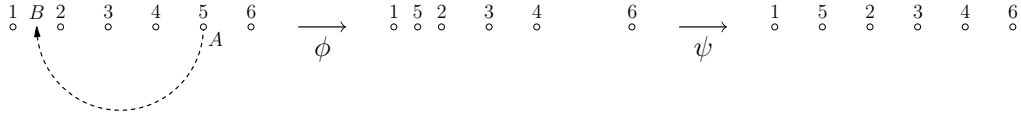


FIG. 3 – Glissement semi-circulaire

En terme de tresses, un glissement semi-circulaire est homotope à un Σ_{ij} , un $\bar{\Sigma}_{ij}$, un Σ_{ij}^{-1} ou un $\bar{\Sigma}_{ij}^{-1}$. Faire glisser le trou A_j « vers la gauche » juste avant le trou A_i pour $j > i$ revient à appliquer Σ_{ij} si l'on fait glisser « par le bas » et $\bar{\Sigma}_{ij}$ si l'on fait glisser « par le haut ». Les glissements « vers la droite » correspondent à Σ_{ij}^{-1} ou $\bar{\Sigma}_{ij}^{-1}$.

Définition 7 (Algorithme de transmissions par la droite). Le déroulement de l'algorithme est le suivant. Soit \mathcal{D} un diagramme de courbes non trivial.

1. Considérons le bigone le plus à droite de \mathcal{D} . D'après la remarque 3, le segment réel qui le borde contient un unique trou A_j . Notons P' l'extrémité de la branche droite du bigone, qui n'est pas une extrémité du bigone. D'après le lemme 5, P' est à gauche de A_j .
2. a) Dans le cas où P' est à l'intérieur du disque D_0 , on procède comme suit. Soit α un arc semi-circulaire dont l'une des extrémités est A_j , et l'autre, B , est située juste à droite de P' (*i.e.* il n'y a pas d'autre intersection de \mathcal{D} avec \mathbb{R} , ni de trou, entre B et P'). On fait glisser semi-circulairement A_j le long de α , ce qui permet d'éliminer ce bigone (voir figure 4). Pour réaliser ce glissement, on applique un Σ_{ij} ou un $\bar{\Sigma}_{ij}$.
- b) Il peut arriver que l'extrémité P' soit en dehors du disque, dans le cas où la branche droite du bigone est l'un des $2(n-1)$ arcs semi-circulaires qui coupent le bord du disque. Dans ce cas, on ne peut pas faire glisser A_j comme ci-dessus, car il sortirait du disque. Au lieu de cela, on le fait glisser jusqu'à un point B qui se trouve juste à gauche de l'extrémité de la branche gauche. Cela permet d'appliquer également un Σ_{ij} ou un $\bar{\Sigma}_{ij}$.

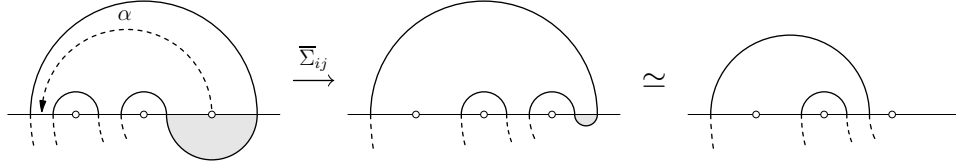


FIG. 4 – Glissement permettant d'éliminer un bigone

3. Le nouveau diagramme de courbes a au moins deux intersections de moins avec l'axe réel. On recommence jusqu'à obtenir le diagramme trivial.

Au cours de ce processus, on a obtenu une suite d'éléments de la forme Σ_{ij} ou $\bar{\Sigma}_{ij}$. La composition de ces éléments donne une tresse β^{-1} qui est l'inverse de la tresse β telle que $\beta(\mathcal{E}) = \mathcal{D}$. On obtient donc β comme un mot en les Σ_{ij}^{-1} et $\bar{\Sigma}_{ij}^{-1}$. Un exemple de l'application de l'algorithme est donné sur la figure 5, page 6.

Définition 8. Soit \mathcal{D} un diagramme de courbes et β la tresse telle que $\beta(\mathcal{E}) = \mathcal{D}$. Après l'application de l'algorithme, β^{-1} est écrit comme un mot en les Σ_{ij} et $\bar{\Sigma}_{ij}$. Le mot en les Σ_{ij}^{-1} et $\bar{\Sigma}_{ij}^{-1}$ obtenu en inversant cette écriture est appelé *forme normale de relaxations par la droite* de la tresse β .

2 Spirales

2.1 Suites d'intersections

Soit \mathcal{C} une courbe fermée simple dans D_n . Quitte à remplacer \mathcal{C} par une courbe isotope, on peut supposer qu'elle coupe \mathbb{R} transversalement et un nombre minimal de fois. Soit l le nombre d'intersections de \mathcal{C} et \mathbb{R} . Après avoir choisi un point de départ sur \mathcal{C} et un sens de parcours, on peut lui associer une suite $[i_1, s_1], \dots, [i_l, s_l]$, définie de la manière suivante. Lorsque l'on parcourt \mathcal{C} , à partir du point de départ choisi, et dans le sens choisi, on coupe une première fois l'axe réel entre un trou i et le trou $i + 1$ (resp. à gauche du premier trou, ou à droite du dernier trou); si le point de départ est déjà situé sur l'axe réel, on le considère comme la première intersection. On pose alors $i_1 = i$ (resp. $i_1 = 0$ ou $i_1 = n$), et $s_1 = \downarrow$ si on a coupé \mathbb{R} du haut vers le bas, $s_1 = \uparrow$ si on a coupé \mathbb{R} du bas vers le haut. On définit de même i_2 et s_2 lors de la deuxième intersection, puis i_3 et s_3 , etc. On s'arrête lorsqu'on est revenu au point de départ (qui, s'il est sur l'axe réel, n'est *pas* considéré comme la dernière intersection, afin de ne tenir compte de ce point qu'une seule fois dans la suite). Cette suite, appelée *suite d'intersections*, détermine entièrement \mathcal{C} à isotopie près.

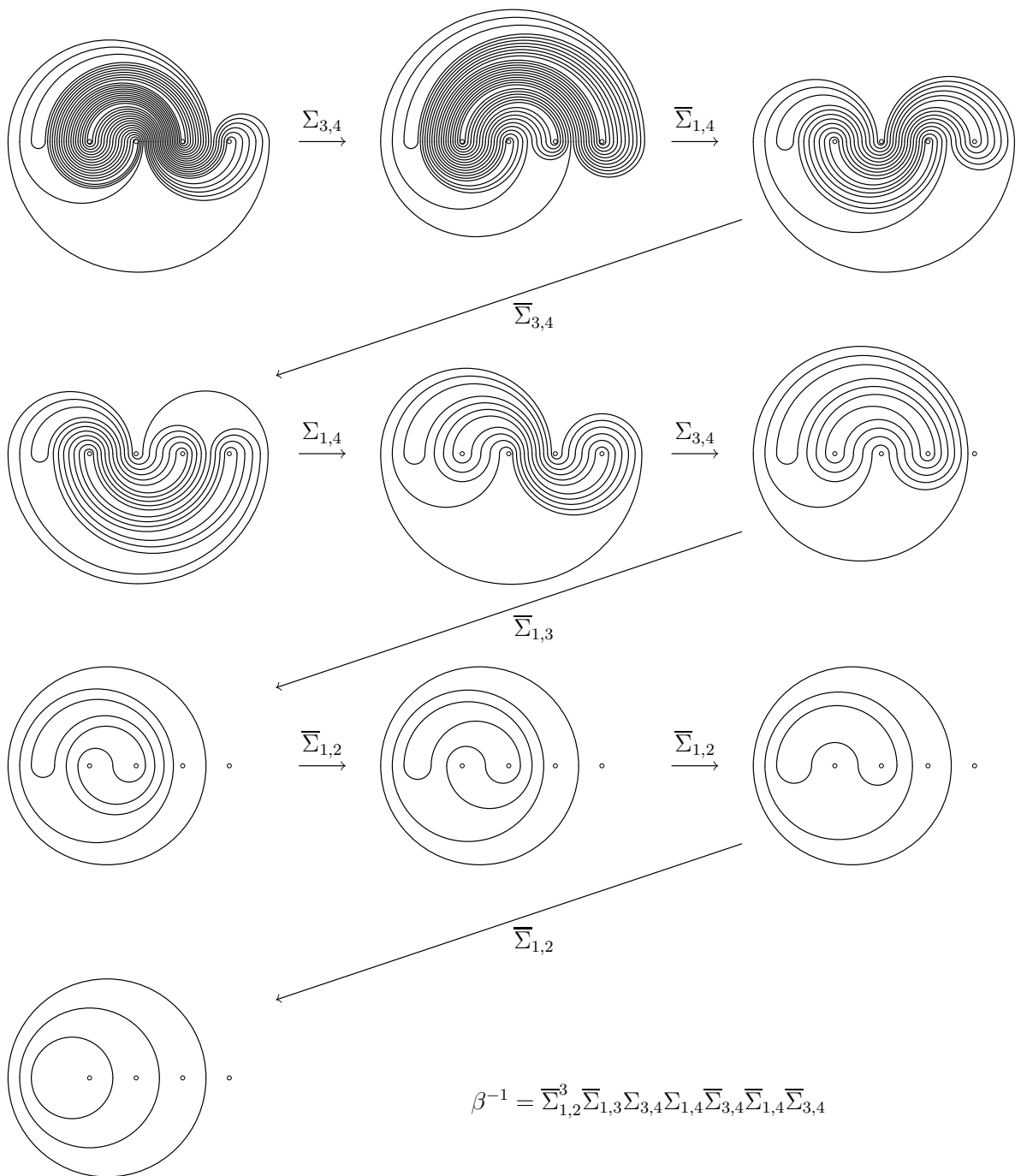


FIG. 5 – Algorithme appliqué à la tresse $\sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_3^{-1} \sigma_2 \sigma_1^4$

Remarque. On pourrait ne préciser que s_1 . En effet, \downarrow et \uparrow sont nécessairement alternés. Pour une courbe fermée simple, l est toujours pair.

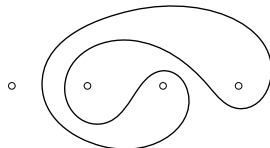


FIG. 6 – Une suite d’intersections de la courbe ci-dessus est $[1, \uparrow], [4, \downarrow], [3, \uparrow], [1, \downarrow], [2, \uparrow], [3, \downarrow]$.

Remarque 9. Si l’on choisit un autre point de départ, les $[i_j, s_j]$ seront simplement permutés circulairement. Si l’on choisit l’autre sens de parcours, l’ordre des i_j sera inversé et les \downarrow et \uparrow changés l’un en l’autre. On identifie de telles suites d’intersections qui sont associées à la même courbe.

Définition 10. On dit qu’une courbe \mathcal{C} est *ronde* si elle admet une suite d’intersections de la forme $[i_1, \downarrow], [i_2, \uparrow]$.

On définit de manière similaire une suite d’intersections d’un arc connexe d’extrémités distinctes ; mais dans ce cas, on choisit nécessairement comme point de départ l’une des extrémités de l’arc, et le sens de parcours se déduit de ce choix. Il n’y a donc que deux choix possibles. En outre, contrairement au cas d’une courbe fermée, si la dernière extrémité de l’arc est située sur l’axe réel, elle est comptée dans la suite d’intersections, car elle est distincte de la première extrémité.

2.2 Arc de spirale, spirale

Définition 11. Soit \mathcal{C} une courbe fermée simple. On appelle *arc de spirale de support* \mathcal{S} un arc connexe \mathcal{S} vérifiant les conditions suivantes. Les extrémités de \mathcal{S} sont distinctes, et l’une des suites d’intersections $[i_1, s_1], \dots, [i_l, s_l]$ de \mathcal{C} est telle que l’une des suites d’intersections de \mathcal{S} est de la forme

$$[i_1, s_1], \dots, [i_l, s_l], [i_1, s_1], \dots, [i_l, s_l], \dots, [i_1, s_1], \dots, [i_l, s_l], [i_1, s_1], \dots, [i_r, s_r],$$

où la chaîne $[i_1, s_1], \dots, [i_l, s_l]$ est répétée k fois ($k \geq 2$), puis est éventuellement suivie à nouveau de quelques uns des premiers termes (voir figure 7).

Intuitivement, l’arc de spirale \mathcal{S} fait k fois le tour de \mathcal{C} . Si k est le nombre maximal de répétitions, on parlera aussi de k -arc de spirale.

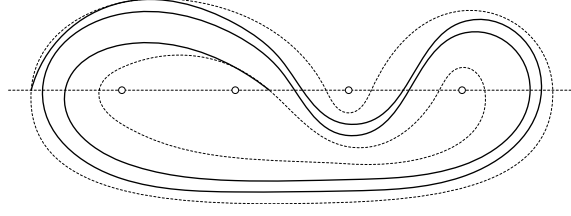


FIG. 7 – Un 2-arc de spirale dont le support est la courbe de suite d'intersections $[2, \downarrow], [3, \uparrow], [4, \downarrow], [0, \uparrow]$.

Soit \mathcal{D} un diagramme de courbes. On associe à \mathcal{D} les $n - 1$ suites d'intersections associées à chacune des $n - 1$ courbes fermées constituant \mathcal{D} , en notant -1 l'intersection de chacune de ces courbes qui est située à l'extérieur du disque D_n .

La famille ordonnée des $n - 1$ suites d'intersections d'un diagramme de courbes \mathcal{D} sera notée $SI(\mathcal{D})$. Par exemple,

$$SI(\mathcal{E}) = \left(([-1, \uparrow], [1, \downarrow]); ([-1, \uparrow], [2, \downarrow]); \dots; ([-1, \uparrow], [n - 1, \downarrow]) \right)$$

Si $\mathcal{D}_1 \neq \mathcal{D}_2$, alors $SI(\mathcal{D}_1) \neq SI(\mathcal{D}_2)$, et il est facile de dessiner un diagramme de courbes \mathcal{D} si l'on connaît $SI(\mathcal{D})$.

Remarque 12. Par défaut, on fera commencer chacune des $n - 1$ suites d'intersections par $[-1, \uparrow]$. Pour alléger les notations, on notera parfois simplement $[i]$ à la place de $[i, \downarrow]$ ou $[i, \uparrow]$ (une fois que l'on a fixé l'un des symboles \downarrow ou \uparrow , les autres s'en déduisent, car les deux symboles sont alternés dans chaque suite). On notera également simplement $[i]$ même lorsqu'il ne s'agit pas de courbes d'un diagramme de courbes, si le contexte indique clairement le choix d'orientation.

Soit \mathcal{D} un diagramme de courbes. Si l'on se donne un sous-arc de \mathcal{D} , sa suite d'intersections se lit comme une sous-suite d'éléments consécutifs d'une des $n - 1$ suites d'intersections de \mathcal{D} . En particulier, \mathcal{D} admet des arcs de spirale si une de ses suites d'intersections contient une répétition successive d'un motif $[i_1], \dots, [i_l]$.

Lemme 13. *Soit \mathcal{D} un diagramme de courbes. On suppose qu'une des suites d'intersections de $SI(\mathcal{D})$ contient une période de la forme*

$$[i_1], \dots, [i_l], [i_1], \dots, [i_l], \dots, [i_1], \dots, [i_l], \quad (3)$$

où la chaîne $[i_1], \dots, [i_l]$ est la plus courte possible ($l \geq 2$) et est répétée $k \geq 2$ fois (k maximal). Alors, si $[i'_1], \dots, [i'_l]$ représente la même courbe fermée que $[i_1], \dots, [i_l]$, les autres périodes de la forme

$$[i'_1], \dots, [i'_l], [i'_1], \dots, [i'_l], \dots, [i'_1], \dots, [i'_l], \quad (4)$$

contenues dans la même suite ou dans une autre suite de $SI(\mathcal{D})$, sont de longueur au moins $k - 1$.

Démonstration. Si une suite d'intersections contient une période

$$[i_1], \dots, [i_l], [i_1] \dots, [i_l], \dots, [i_1], \dots, [i_l]$$

de longueur k , cela signifie que la courbe correspondante contient un k -arc de spirale autour de la courbe de suite d'intersections $[i_1], \dots, [i_l]$. Toute autre arc de spirale de \mathcal{D} autour de la même courbe est entrelacé avec celui-ci sans le couper, donc est au moins un $(k - 1)$ -arc de spirale, c'est-à-dire qu'il admet une période de la forme (4) de longueur au moins $k - 1$. \square

Définition 14. Soit \mathcal{D} un diagramme de courbes admettant un arc de spirale de support \mathcal{C} . On appelle *spirale* la réunion de tous les arcs de spirale de support \mathcal{C} du diagramme. On définit le *nombre de tours* de la spirale comme étant le nombre de tours minimal des arcs qui la composent.

Remarque 15. D'après le lemme 13, si k est le nombre de tours d'une spirale, ses arcs de spirale sont soit des k -arcs, soit des $(k + 1)$ -arcs.

Soit \mathcal{S} une spirale dans un diagramme \mathcal{D} ; donnons quelques précisions sur la manière dont ses arcs de spirale $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_m$ apparaissent dans $SI(\mathcal{D})$. Chacun de ces m arcs est visible dans $SI(\mathcal{D})$ sous forme d'une chaîne de la forme

$$[i_r], \dots, [i_l], [i_1], \dots, [i_l], [i_1], \dots, [i_l], \dots, [i_1], \dots, [i_l], [i_1], \dots, [i_r] \quad (5)$$

ou

$$[i_{r'}], \dots, [i_1], [i_l], \dots, [i_1], [i_l], \dots, [i_1], \dots, [i_l], \dots, [i_1], [i_l], \dots, [i_r], \quad (6)$$

où $[i_1], \dots, [i_l]$ est une suite d'intersections fixée de \mathcal{C} ; on choisit les r et r' de sorte que ces chaînes soient les plus longues possibles.

Plus précisément, quitte à intervertir les deux sens, toute chaîne dans le sens (5) est suivie d'une chaîne dans le sens (6), les deux étant séparées par des intersections $[\tilde{z}]$ comprises à l'intérieur de la courbe \mathcal{C} .

Définition 16. Un arc de spirale correspondant à une chaîne dans le sens (5) est appelé *arc de spirale entrant*. Un arc de spirale correspondant à une chaîne dans le sens (6) est appelé *arc de spirale sortant*.

Voici un exemple illustrant cela. Les suites d'intersections du diagramme repré-

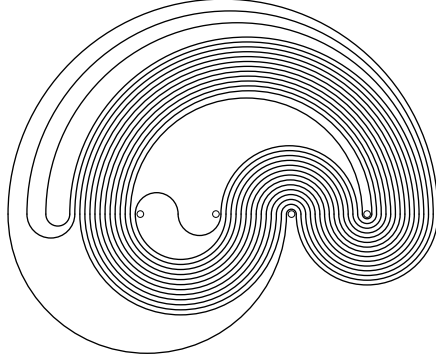


FIG. 8 – Exemple

senté sur la figure 8 sont

$$\begin{aligned}
 &([-1], \underbrace{[4], [3], [2], [0], [4], [3], [2], [0], [4], [3], [2], [0], [4], [3]}, \\
 &\qquad\qquad\qquad \underbrace{[0], [2], [3], [4], [0], [2], [3], [4], [0], [2], [3], [4], [0]}) \\
 &([-1], \underbrace{[4], [3], [2], [0], [4], [3], [2], [0], [4], [3], [2], [0], [4], [3], [2]}, [1], \\
 &\qquad\qquad\qquad \underbrace{[0], [2], [3], [4], [0], [2], [3], [4], [0], [2], [3], [4], [0]}) \\
 &([-1], [4], [3], [2]).
 \end{aligned}$$

Il y a une spirale ayant pour support la courbe \mathcal{C} de suite d'intersections $([4], [3], [2], [0])$, composée de quatre arcs de spirale, indiqués ci-dessus par des accolades. Ce sont des 3-arcs de spirale. Deux d'entre eux apparaissent dans la première suite, directement l'un après l'autre. Les deux autres apparaissent dans la deuxième suite, séparés par une intersection de type $[1]$. Parmi ces quatre arcs, les deux apparaissant en premier dans chacune des deux suites sont des arcs entrants. Les deux autres sont des arcs sortants.

3 Effet de l'algorithme sur les spirales

Dans la première section est décrit un algorithme qui simplifie un diagramme de courbes \mathcal{D} à l'aide d'un élément du groupe modulaire de D_n . Le but du théorème 27 est de déterminer l'action de cet algorithme sur les spirales de \mathcal{D} .

3.1 Multibigone

Définition 17 (Multibigone). Soit \mathcal{D} un diagramme de courbes. On appelle multibigone une famille d'arcs semi-circulaires de \mathcal{D} vérifiant les conditions suivantes.

- Ces arcs sont tous du même côté de l'axe réel.
- L'intersection de gauche de chacun de ces arcs est entre les deux mêmes trous A_{i-1} et A_i .
- Aucun des demi-disques délimités par ces arcs ne contient d'autre arc du diagramme que ceux de la famille.
- La famille est maximale à vérifier ces conditions.

Sur l'exemple de la figure 9, les multibigones d'un diagramme de courbe sont grisés.

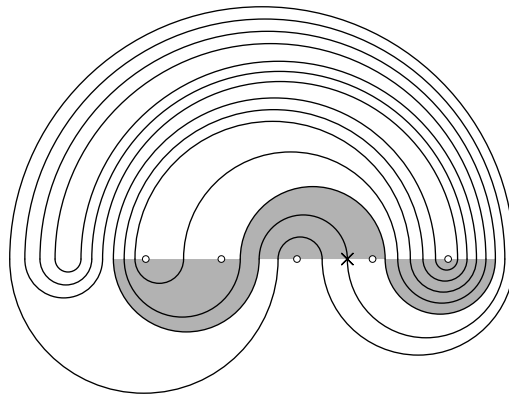


FIG. 9 – Les multibigones du diagramme de $\sigma_3\sigma_4\sigma_3\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3$ et la limite de sécurité

Remarque. Chaque multibigone contient un unique bigone, et chaque bigone est contenu dans un unique multibigone.

3.2 Intervalle de sécurité

Définition 18 (intervalle de sécurité). Soit \mathcal{D} un diagramme de courbes. On appelle *intervalle de sécurité* l'ensemble des intersections de \mathcal{D} avec l'axe réel situées strictement à gauche du multibigone le plus à droite de \mathcal{D} . On appelle *limite de sécurité* l'extrémité droite de l'intervalle de sécurité.

La limite de sécurité est représentée par une croix sur l'exemple de la figure 9.

Lemme 19. *On note $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ les éléments de l'intervalle de sécurité. Soit $\tilde{\Sigma}_{ij}$ le glissement semi-circulaire réalisé lors de l'algorithme de relaxations par la droite. Il existe un homéomorphisme φ de la classe d'homotopie de $\tilde{\Sigma}_{ij}$ tel que $\varphi(\mathcal{D})$ est toujours en position minimale, $\varphi(x_i) \in \mathbb{R}$ pour tout i , et $\varphi(x_1) < \varphi(x_2) < \dots < \varphi(x_N)$. (Autrement dit, l'action de $\tilde{\Sigma}_{ij}$ préserve l'ordre des intersections dans l'intervalle de sécurité.)*

Démonstration. Les effets du glissement semi-circulaire sont les suivants : aucune nouvelle intersection n'est créée, et dans la famille de suites d'intersections du diagramme, celles de type $j - 1$ et j qui se suivent sont supprimées. Les éléments de l'intervalle de sécurité sont situés strictement à gauche des intersections supprimées ; avec les notations de la définition 6, le glissement semi-circulaire que l'on applique est de la forme $\psi \circ \phi$, où $\phi(x_i) = x_i$ pour i de 1 à N , et les $\psi(x_i)$ sont toujours alignés sur l'axe réel, dans le même ordre. \square

Lemme 20. *On numérote les intersections de \mathcal{D} avec \mathbb{R} de la gauche vers la droite. Soit N le numéro de la limite de sécurité. Alors N décroît (au sens large) au cours de l'algorithme de relaxations par la droite.*

Démonstration. Comme aucune intersection n'est formée au cours de l'algorithme, aucun multibigone ne peut apparaître plus à droite de celui qui était le plus à droite à l'étape précédente. Donc à aucun moment, N ne peut croître strictement. \square

3.3 Orientation d'une spirale

Soit \mathcal{D} un diagramme de courbe contenant une spirale de support une courbe \mathcal{C} . On peut définir l'orientation d'une telle spirale, il y a deux orientations possibles, que l'on appellera *directe* et *indirecte*. Voici plusieurs manières équivalentes de les définir.

Définition 21 (orientation d'une spirale). **1.** L'orientation de la spirale est *directe* si, en appliquant un twist de Dehn autour de \mathcal{C} , on obtient une spirale (toujours de support \mathcal{C}) ayant un tour de plus. Elle est *indirecte* si on obtient un tour de moins.

2. L'orientation de la spirale est *directe* si ses arcs de spirale entrants sont orientés dans le sens inverse du sens trigonométrique, et ses arcs de spirale sortants sont orientés dans le sens trigonométrique. Elle est *indirecte* dans le cas contraire.

3.4 Base gauche d'une spirale

On conserve les notations de la sous-section précédente. Notons $[i_1], \dots, [i_l]$ la suite d'intersections de \mathcal{C} telle que i_1 est l'intersection la plus à gauche de \mathcal{C} avec l'axe réel, en notant les intersections dans le sens horaire si la spirale est d'orientation directe, et dans le sens trigonométrique si la spirale est d'orientation indirecte. Ainsi, dans $SI(\mathcal{D})$, les arcs de spirale apparaissent sous la forme

$$\underbrace{[i_s], \dots, [i_l]}_{}, \underbrace{[i_1], \dots, [i_l]}_{}, \underbrace{[i_1], \dots, [i_l]}_{}, \dots, \underbrace{[i_1], \dots, [i_l]}_{}, \underbrace{[i_1], \dots, [i_r]}_{}, [\cdot], \dots, [\cdot],$$

$$\underbrace{[i_{r'}], \dots, [i_1]}_{}, \underbrace{[i_l], \dots, [i_1]}_{}, \dots, \underbrace{[i_l], \dots, [i_1]}_{}, \underbrace{[i_l], \dots, [i_{s'}]}_{}$$

Définition 22 (base gauche d'une spirale). On appelle *base gauche de la spirale* l'ensemble des intersections de \mathcal{D} avec l'axe réel correspondant aux occurrences de $[i_1]$ dans chacune des suites des arcs de spirale.

Remarque. Attention : la courbe \mathcal{C} peut avoir plusieurs intersections du même type que l'intersection la plus à gauche (c'est le cas de la courbe représentée sur la figure 6, page 7). Sur la suite d'intersections de \mathcal{C} , cela signifie qu'un des i_j ($j \neq 1$) est égal à i_1 . Les intersections correspondantes de la spirale *ne font pas partie* de la base gauche de la spirale.

La figure 10 représente un diagramme de courbe admettant une spirale de support la courbe de suite d'intersections $[1], [4], [3], [1], [2], [3]$. La famille de suites d'intersections de ce diagramme est

$$([-1], [1])$$

$$([-1], [4], [3], [1], [2], [3], [1], [4], [3], [1], [2], [3], [1], [4], [3], [1], [2], [3], [1], [3], [4],$$

$$[1], [3], [2], [1], [3], [4], [1], [3], [2], [1], [3], [4], [1])$$

$$([-1], [4], [3], [1], [2], [3])$$

où on a écrit en gras les intersections de la base gauche de la spirale. Celles-ci sont représentées par des étoiles sur la figure 10.

3.5 Limite de sécurité et base gauche au cours de l'algorithme

Soit \mathcal{D} un diagramme de courbes admettant une spirale. En numérotant les intersections avec \mathbb{R} de la gauche vers la droite, soit n_1 le numéro de l'extrémité droite de la base gauche de cette spirale.

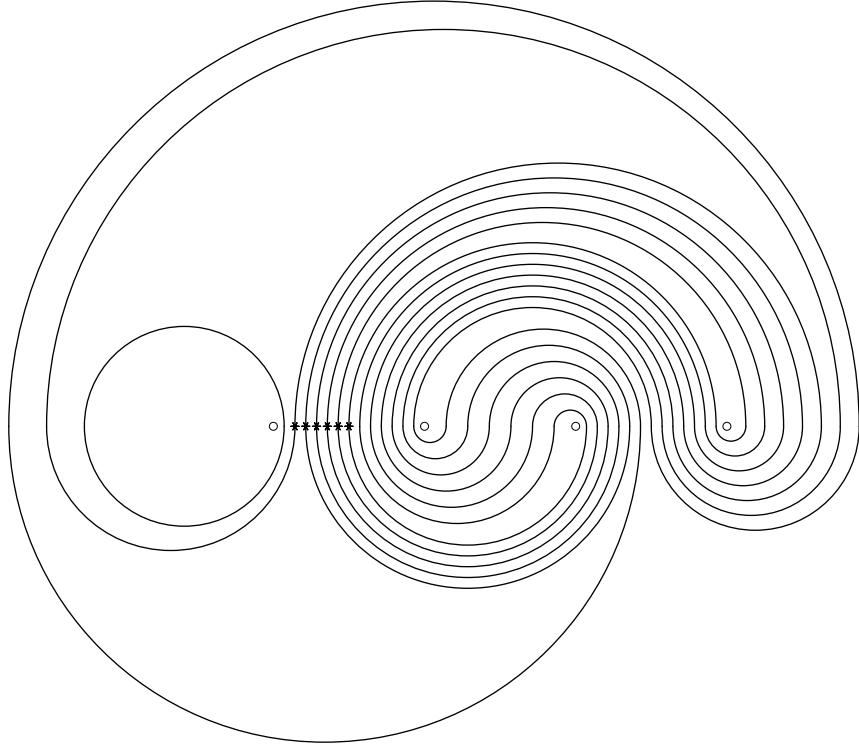


FIG. 10 – La base gauche d’une spirale

On exécute l’algorithme de relaxations par la droite sur le diagramme \mathcal{D} , et on numérote les étapes à l’aide d’un paramètre t : on passe d’une étape à la suivante par le glissement semi-circulaire qui élimine le bigone le plus à droite. On note $N(t)$ le numéro de la limite de sécurité du diagramme à l’étape t . (Le paramètre n_1 , lui, est fixé, et ne restera donc pas tout au long de l’algorithme l’extrémité de la base gauche d’une spirale.)

On rappelle que $N(t)$ décroît lorsque t augmente. Soit t_0 le temps tel que $N(t_0 - 1) > n_1$ et $N(t_0) \leq n_1$. Appelons G la base gauche de la spirale dans le diagramme de courbes initial. D’après le lemme 19, jusqu’au temps t_0 , les intersections dans G sont transformées étape par étape, si l’on choisit bien le représentant du glissement semi-circulaire, en des intersections qui sont toujours numérotées de la même façon le long de l’axe réel. Par un léger abus de notation, on appelle toujours G l’ensemble de ces intersections, à chaque étape de l’algorithme.

Définition 23. On dit qu’une spirale est en forme *quasi-minimale* si elle est de la forme présentée sur la figure 11, dont on détaille les propriétés ci-dessous.

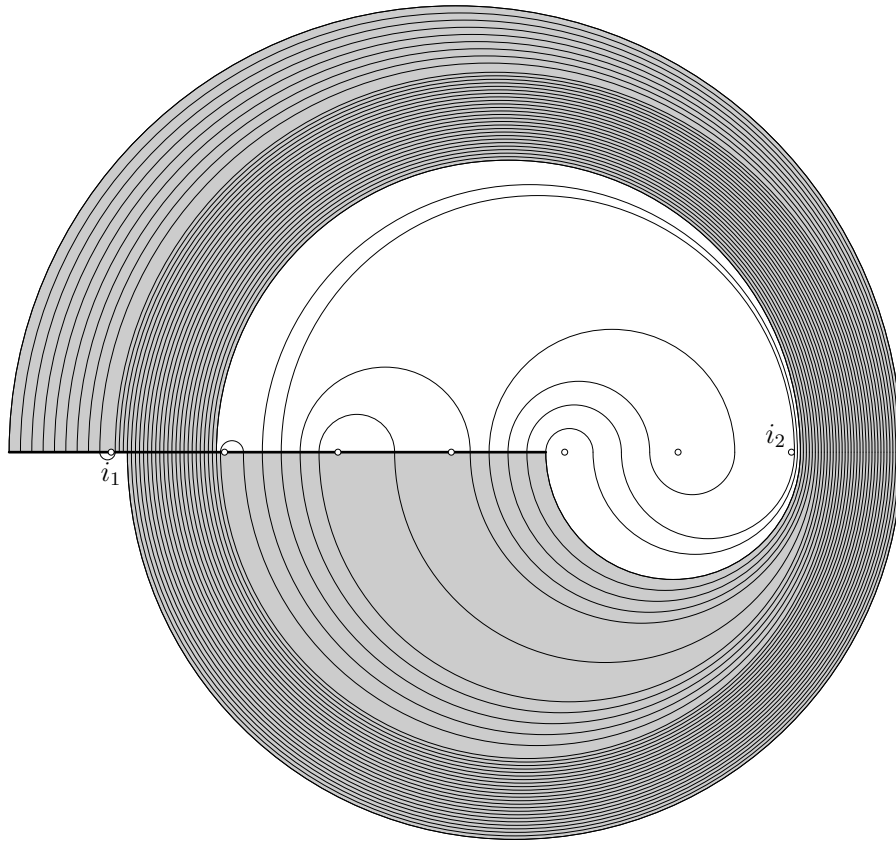


FIG. 11 – Spirale en forme quasi-minimale

- La spirale est ronde, de support $[i_1], [i_2]$.
- Ce qui est représenté sous forme d'une bande grisée, que nous appellerons *bande épaisse*, contient des sous-arcs du diagramme, qui sont des arcs de spirale auxquels on a retiré au plus une portion semi-circulaire (entre des intersections de type i_1 et i_2) à l'intérieur de la spirale, et une à l'extérieur, et ajouté au plus une portion semi-circulaire, entre des intersections de type i_2 et $i_1 - 1$, ou $i_1 - 2$, etc., à l'extérieur, et une entre des intersections de type i_2 et $i_1 + 1$, ou $i_1 + 2$, etc., à l'intérieur de la spirale. Les intersections avec \mathbb{R} contenues dans le segment sur le bord de la bande épaisse représenté en gras constituent des intersections consécutives du diagramme de courbes.
- La bande épaisse ne contient aucun trou sauf éventuellement sur ses bords libres (les deux portions du segment en gras qui ne touchent que la partie supérieure ou que la partie inférieure de la bande), comme on en a représenté en guise

d'exemple sur la figure 11.

- À l'intérieur de la spirale et à droite du bord libre de la bande épaisse, il y a seulement un multibigone et une portion de ses branches (les branches d'un multibigone étant définies de manière similaire à celles d'un bigone).

Lorsque l'on part d'un diagramme \mathcal{D} quelconque présentant une spirale, étudions la manière dont cette spirale est transformée au cours de l'algorithme. Regroupons dans une bande, que nous appellerons *bande étroite*, les arcs de spirale auxquels on a retiré, le cas échéant, à l'intérieur, la portion depuis la dernière intersection dans G , et à l'extérieur, la portion jusqu'à la première intersection dans G . (De la sorte, pour chaque arc de spirale, on a enlevé au plus un tour autour de \mathcal{C}). Voir figure 12. La base gauche de la spirale est exactement l'ensemble des intersections contenues

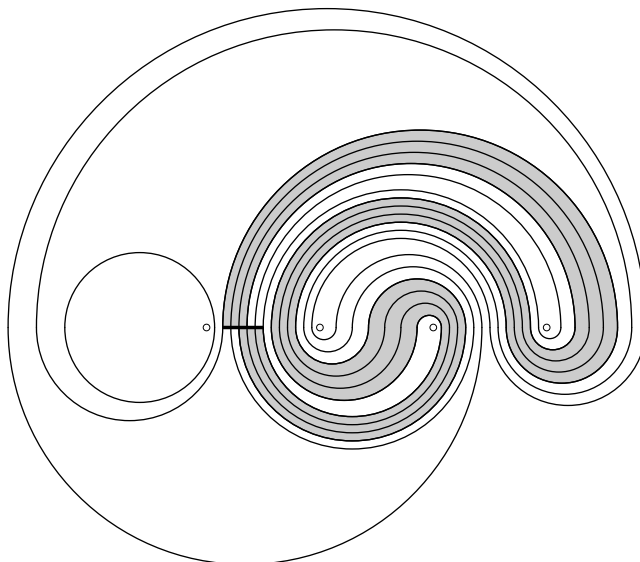


FIG. 12 – Bande étroite regroupant des arcs de spirale

dans la réunion des deux « bords » de la spirale, dessinés en gras. Tant que cette base gauche est comprise dans l'intervalle de sécurité, cela fait sens de considérer l'image à chaque étape de l'algorithme de la bande grisée, ainsi que de la courbe support \mathcal{C} . Il est possible qu'au cours de cet algorithme, des trous soient amenés sur l'un ou l'autre des bords libres de la bande (qui n'est donc plus la bande étroite de la spirale), mais ils n'en bougent plus par la suite, tant que G (qui est toujours l'ensemble des intersections sur le « bord » de la bande) est inclus dans l'intervalle de sécurité. La bande grisée contient, à chacune de ces étapes, autant d'arcs que la spirale de départ contient d'arcs de spirale.

Proposition 24. *Au temps t_0 , la spirale initiale et sa bande étroite ont été transformées en une spirale en forme quasi-minimale et sa bande épaisse.*

Démonstration. Étudions les positions possibles du multibigone M_0 le plus à droite au temps t_0 .

Supposons que la courbe au temps t_0 ne soit pas ronde. Alors elle coupe l'axe réel au moins quatre fois, et deux intersections consécutives sont toujours séparées par au moins un trou. De plus, le diagramme de courbes admet un bigone inclus dans le bigone le plus à droite de la courbe. Ceci n'est pas possible : le multibigone contenant ce bigone serait séparé de G par au moins un trou et une intersection (voir figure 13), et N ne pourrait pas être dans ou à gauche de G .

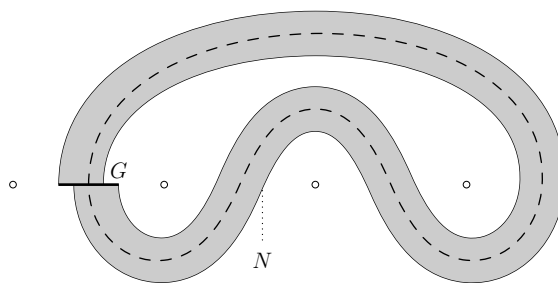


FIG. 13 – Lorsque la courbe \mathcal{C} n'est pas ronde, N ne peut pas être plus à gauche que la position indiquée.

Un argument similaire montre que M_0 est nécessairement à l'intérieur de la spirale : si ce n'était pas le cas, il serait à droite de la spirale, et alors N ne pourrait pas être plus à gauche que l'intersection la plus à droite de la spirale avec l'axe réel.

Ainsi, la courbe est ronde et la bande est en forme de coquille d'escargot. Supposons, pour fixer les idées, que la spirale est orientées de manière directe (coquille d'escargot « vers le haut » comme sur la figure 14). Le cas du sens indirect sera analogue.

Supposons que M_0 soit au dessus de l'axe réel. Il y a alors trois possibilités (figure 15) : le bigone B_0 contenu dans M_0 a soit ses deux extrémités dans G , soit exactement une, soit aucune. Le demi-disque de bord l'arc semi-circulaire en gras contient au moins un bigone. Dans les deux premiers cas, celui-ci serait à droite de B_0 , donc ces deux cas sont impossibles. Dans le troisième cas, pour qu'il n'y ait pas de bigone à droite de B_0 , la situation doit être de la forme présentée dans la figure 15, où $N(t_0) > n_1$. Ce cas est donc également impossible.

Donc, M_0 est en dessous de l'axe réel.

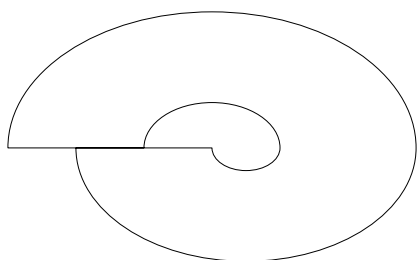


FIG. 14 – Spirale orientée dans le sens direct

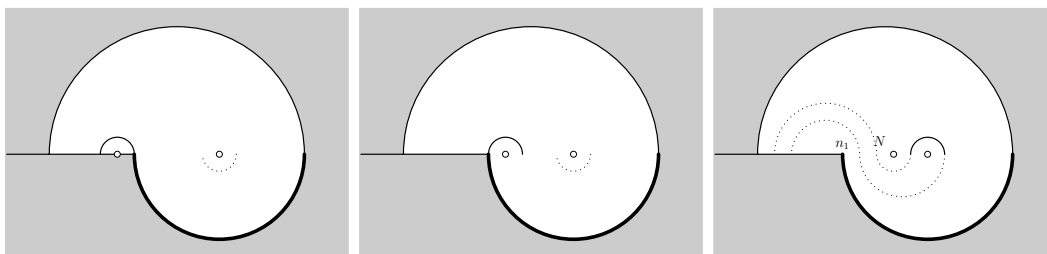


FIG. 15 – Possibilités dans le cas où M_0 est vers le haut

Compte tenu du fait que deux trous ne peuvent pas se trouver dans la même composante connexe de $D_0 \setminus \mathcal{D}$, on en déduit que \mathcal{D} est de l'une des deux formes de la figure 16 (toutes deux quasi-minimales). Dans le deuxième cas, la portion

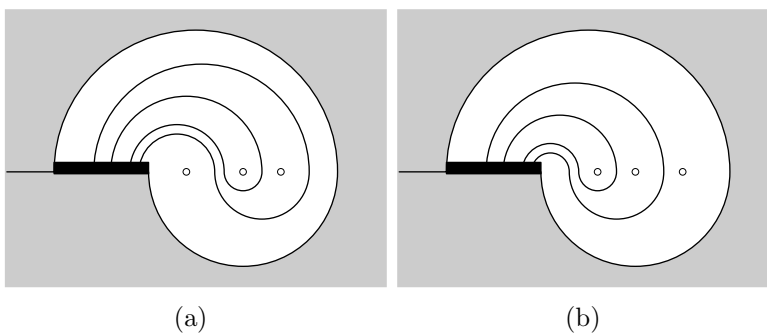


FIG. 16 – Les deux formes quasi-minimales possibles

de bord intérieur sous l'axe réel fait également partie du multibigone, ainsi que d'éventuelles portions semi-circulaires parallèles à celui-ci situées dans la bande grise. Le multibigone pourrait même être réduit à ces seuls arcs semi-circulaires (dans ce cas, on parle même de forme minimale, voire la définition 25 ci-dessous). La zone

masquée par un rectangle noir peut contenir plusieurs trous et arcs semi-circulaires. Ces deux cas sont compatibles avec l'hypothèse $N(t_0) \leq n_1$ et $N(t_0 - 1) > n_1$. \square

Définition 25. (On donne la définition dans le cas où la spirale est d'orientation positive, l'autre cas s'en déduit pas symétrie.) On appelle forme minimale une forme quasi-minimale où, d'une part, le multibigone est réduit à la portion de bord intérieur représentée en gras sur la figure 17 et aux éventuels arcs semi-circulaires parallèles (*i.e.* d'extrémités du même type) situés dans la bande épaisse, et d'autre part, la branche droite du bigone coïncide avec la portion semi-circulaire du bord intérieur située au dessus de l'axe réel.

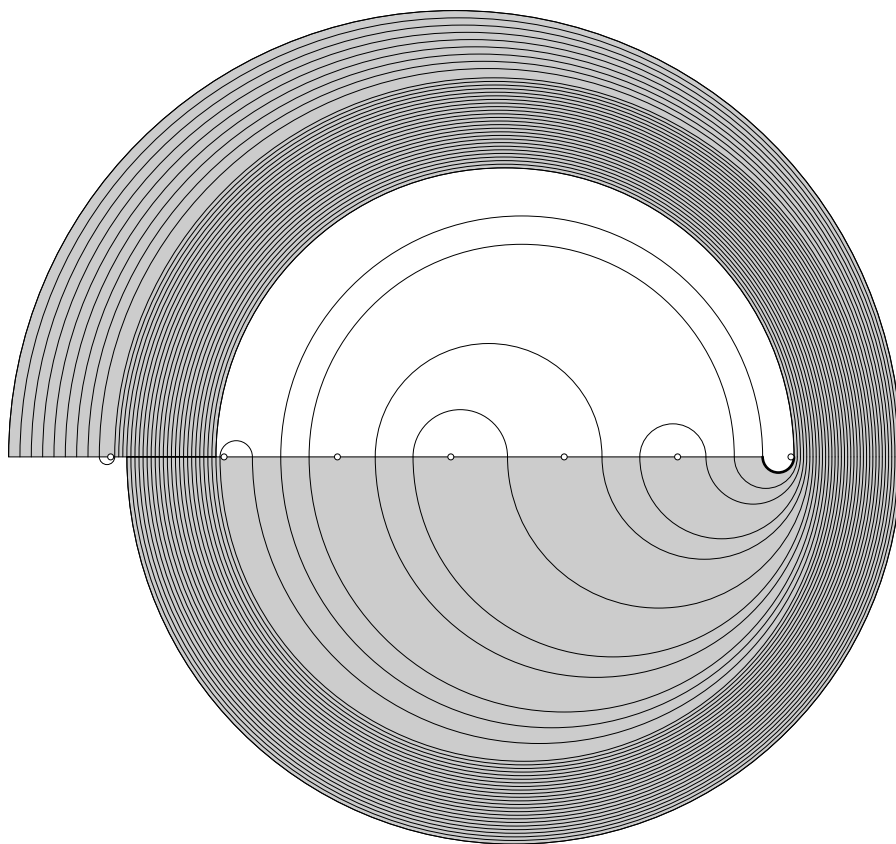


FIG. 17 – Forme minimale

Si la spirale n'est pas en forme minimale au temps t_0 , elle l'est cependant au temps $t_0 + t$, où t est le nombre de trous dans le multibigone dans le cas de la figure 16(a), et un de moins que ce nombre dans le cas de la figure 16(b). Les étapes correspondantes

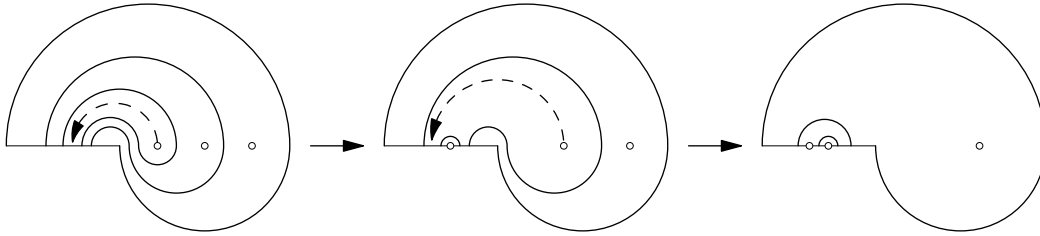


FIG. 18 – Passage d’une forme quasi-minimale à une forme minimale

de l’algorithmes sont celles de la figure 18. Au cours de ces étapes, la bande épaisse reste inchangée (à renormalisation près, *i.e.* écartement des trous vers la droite), et elle contient toujours un nombre d’arcs égal au nombre d’arcs de spirale de la spirale de départ. En particulier, le bord de la bande épaisse contient toujours exactement les intersections dans G , la base gauche de la spirale initiale.

Notons $t_1 = t_0 + t$ cette étape, et M_1 le multibigone (qui, rappelons-le, est composé des arcs parallèles au bigone le plus à droite).

Étudions à présent ce qu’il se passe dans la suite de l’algorithme. La première remarque est la suivante.

Remarque 26. Lorsque la spirale est en forme minimale, l’algorithme applique à l’étape suivante $\tilde{\Sigma}_{ij}$ (égal à Σ_{ij} si la spirale est orientée de manière indirecte, $\bar{\Sigma}_{ij}$ si elle est directe), où les trous intérieurs à la spirale sont ceux de A_i à A_j .

Ceci est une conséquence du fait que la branche droite du bigone coïncide avec la portion de bord intérieur située au-dessus (cas direct) ou au-dessous (cas indirect) de l’axe réel.

Ainsi, à l’étape $t_1 + 1$, si la spirale était « assez large », dans un sens qui sera clarifié plus tard, on obtient à nouveau une spirale en forme minimale « un peu moins large ».

Plus précisément : à l’étape t_1 , le bord de la bande épaisse contient exactement les intersections dans G . À l’étape $t_1 + 1$, on obtient une spirale en forme minimale dont la bande épaisse correspondante a pour bord un intervalle dont on note G_1 l’intersection avec \mathcal{D} ; le nombre d’intersections dans G_1 est égal au nombre d’intersections dans G auquel on a soustrait le nombre d’arc composant M_1 : voir figure 19, sur laquelle le multibigone M_1 et ses branches à l’étape t_1 sont représentés en gras, ainsi que leur image à l’étape $t_1 + 1$. La zone masquée par un rectangle noir peut contenir plusieurs trous et arcs semi-circulaires.

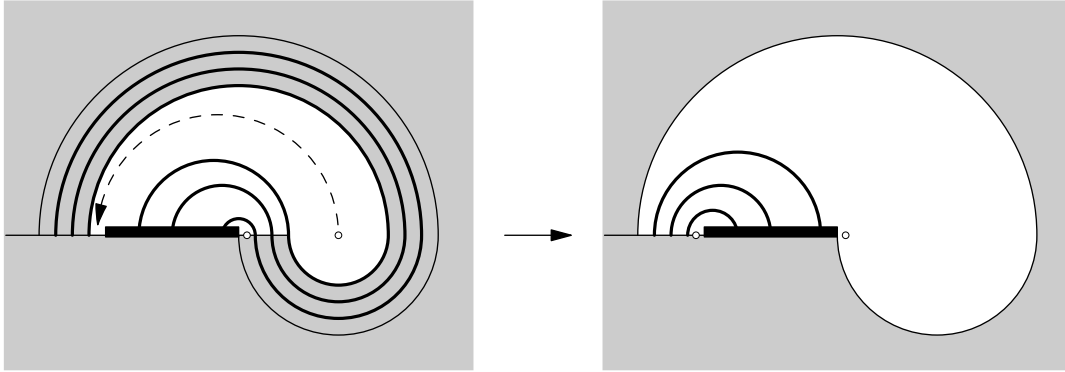


FIG. 19 – Démêlage progressif de la spirale

À l'issue de cette étape, les arcs de spirale qui contenaient le multibigone ont perdu un tour. Tant que la spirale est « assez large », ce processus est réitéré, et donc, dans l'algorithme, cela correspond à appliquer une certaine puissance de $\tilde{\Sigma}_{ij}$. À chaque étape, des arcs de spirale perdent un tour, et ce à tour de rôle (il y a toujours au plus un tour d'écart entre deux arcs de la spirale). Vient un moment où les arcs n'ont plus qu'un tour au maximum. À ce moment, les deux « bords » de la bande épaisse deviennent disjoints (figure 20(b)), la spirale n'est pas « assez large », et ce n'est plus nécessairement $\tilde{\Sigma}_{ij}$ qui sera appliqué à l'étape suivante. Notons t_2 ce moment.

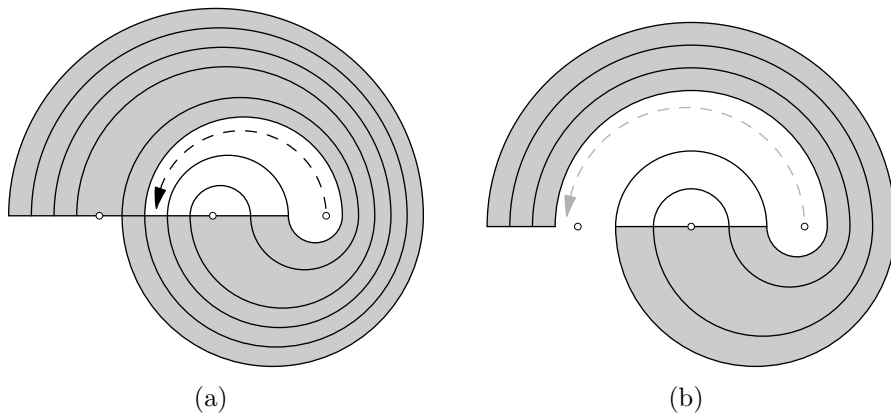


FIG. 20 – Fin du démêlage de la spirale

Déterminons maintenant quelle puissance de $\tilde{\Sigma}_{ij}$ est appliquée au cours du processus décrit ci-dessus. Pour cela, considérons à nouveau la spirale au début de l'al-

gorithme et la bande étroite associée (figure 12). Rappelons que le bord de la bande étroite intersecte le diagramme exactement en les points de la base gauche G . D'autre part, notons m le nombre d'arcs de spirale. Chacun des deux bords libres de la bande contient exactement m intersections avec le diagramme, puisque chaque arc de spirale intersecte une fois chacun de ces deux bords libres (voir figure 21). Comme chaque arc fait k ou $k + 1$ tours, le nombre d'intersections dans tout le bord de la bande, c'est-à-dire le cardinal de G , vérifie $km \leq \#(G) < (k + 1)m$.

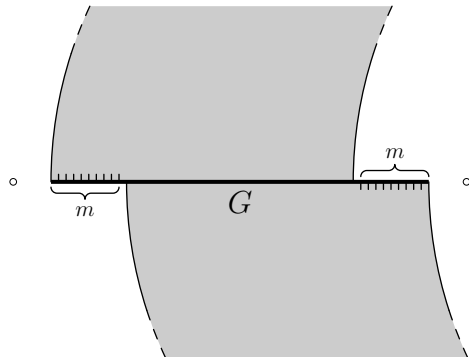


FIG. 21 – Bord de la bande étroite au début

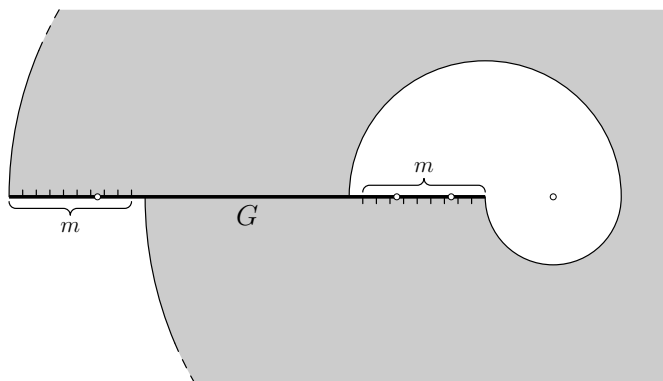


FIG. 22 – Bord de la bande épaisse à l'étape t_1

Arrivé à l'étape t_0 puis t_1 , le bord de la bande épaisse a toujours le même nombre d'intersections que la bande étroite de départ, ainsi que ses bords libres (voir figure 22). C'est à l'issue de cette étape t_1 , alors que la spirale est en forme minimale, que l'on commence à appliquer des générateurs $\tilde{\Sigma}_{ij}$.

Numérotons de 1 à m les intersections du bord libre intérieur de la bande, comme sur la figure 23. Chaque numéro correspond à un des arcs de la spirale. En appliquant

un $\tilde{\Sigma}_{ij}$, les dernières intersections, à droite du bord libre, disparaissent, tandis qu'à gauche, les intersections appartenant aux mêmes arcs sont « libérées ». Ainsi, après $j - i + 1$ itérations ($j - i + 1$ étant le nombre de trous à l'intérieur de la spirale), on retrouve la numérotation d'origine, et donc chacun des m arcs a exactement perdu un tour.

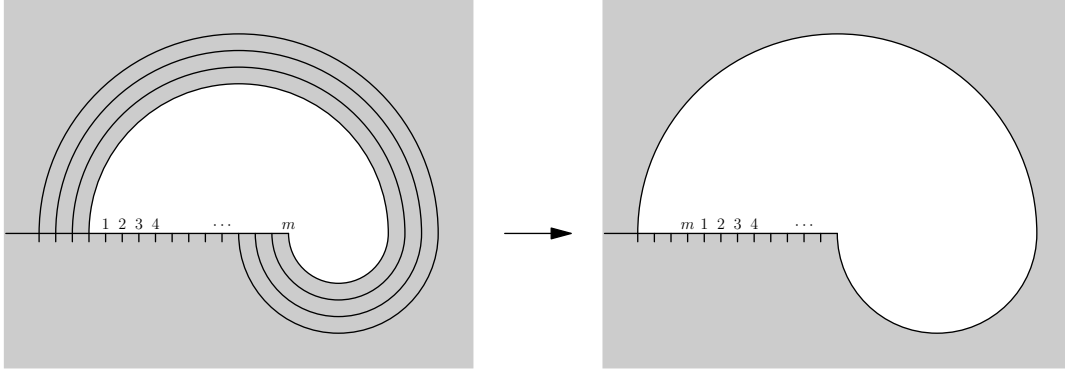


FIG. 23 – Numérotation des arcs de spirale

Or, comme $km \leq \#(G) < (k + 1)m$, on arrive au temps t_2 après avoir appliqué exactement $(k - 1)(j - i + 1)$ générateurs $\tilde{\Sigma}_{ij}$. On en déduit que, lors de l'algorithme, une puissance au moins égale à $(k - 1)(j - i + 1)$ d'un générateur $\tilde{\Sigma}_{ij}$ est appliquée pour démêler une spirale de k tours et ayant $j - i + 1$ trous à l'intérieur de sa courbe support.

Il est intéressant également de majorer la puissance de $\tilde{\Sigma}_{ij}$ qui sera utilisée. Il est en effet possible qu'un ou plusieurs $\tilde{\Sigma}_{ij}$ aient été appliqués juste avant le processus ci-dessous, et qu'un ou plusieurs $\tilde{\Sigma}_{ij}$ soient appliqués juste après.

Commençons donc par étudier ce qu'il se passe juste avant l'étape t_1 . Si l'on avait appliqué $(j - i + 1)$ fois le générateur $\tilde{\Sigma}_{ij}$, par le même argument que précédemment, les arcs de spirale auraient, avant cela, chacun exactement un tour de plus. Ainsi, la spirale serait au moins une $(k + 1)$ -spirale, mais par hypothèse, elle est seulement une k -spirale. Donc, juste avant t_1 , au plus $j - i$ occurrences de $\tilde{\Sigma}_{ij}$ ont pu être appliquées.

Voyons maintenant ce qu'il se passe après. On peut être amené à appliquer encore $\tilde{\Sigma}_{ij}^{j-i+1}$, comme sur la figure 24. Cependant, à l'étape suivante, on n'appliquera pas $\tilde{\Sigma}_{ij}$: en effet, le bigone le plus à droite, à ce stade, n'entoure plus le trou A_j . Si c'était le cas, l'arc représenté en gras sur la figure 24 ferait encore un tour de spirale sur la première figure, ce qui n'est plus le cas à ce stade de l'algorithme. Donc on peut appliquer au plus $j - i + 1$ occurrences supplémentaires de $\tilde{\Sigma}_{ij}$ après le temps $t_1 + 1$. Il est possible que l'on en applique moins, dans le cas où des trous intercalaires se

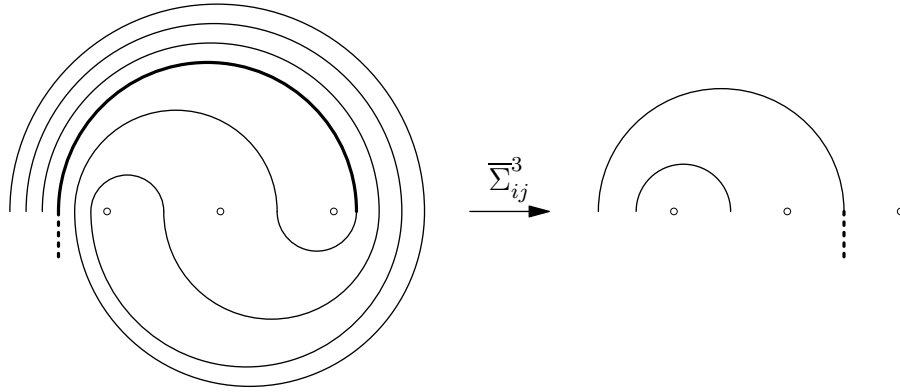


FIG. 24 – Juste après le temps t_2

sont glissés sur le bord libre extérieur de la bande épaisse, comme c'est le cas sur la figure 20.

On déduit de tout cela la majoration souhaitée : la spirale est démêlée après avoir appliqué une puissance au maximum égale à $(k+1)(j-i+1) - 1$ de $\bar{\Sigma}_{ij}$.

On a finalement démontré le théorème suivant :

Théorème 27. *Soit \mathcal{D} un diagramme de courbes. Supposons que \mathcal{D} admette une k -spirale \mathcal{S} . Soit $\beta_1^{l_1} \beta_2^{l_2} \cdots \beta_\nu^{l_\nu}$ l'inverse de la forme normale de relaxations par la droite de la tresse associée à \mathcal{D} , avec $l_\mu \geq 1$, β_μ de la forme Σ_{ij} ou $\bar{\Sigma}_{ij}$ ($\mu = 1, \dots, \nu$), et $\beta_\mu \neq \beta_{\mu+1}$ ($\mu = 1, \dots, \nu-1$). Alors il existe i et j , un entier $l \in [(k-1)(j-i+1), (k+1)(j-i+1)[$, et un $\mu \in \{1, \dots, \nu\}$ tels que $j-i+1$ soit le nombre de trous contenus à l'intérieur de la courbe support de \mathcal{S} , et $\beta_\mu^{l_\mu} = \tilde{\Sigma}_{ij}^l$ ($\tilde{\Sigma}_{ij} = \Sigma_{ij}$ ou $\tilde{\Sigma}_{ij} = \bar{\Sigma}_{ij}$).*

Références

- [1] I. DYNNIKOV, B. WIEST, *On the complexity of braids*, J. Eur. Math. Soc. 9, 801–840, 2007